2 i) $-1<x<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\frac{3}{2}$$

ii) $x>1$ または $x<-1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

⬅このとき $-1<\dfrac{1}{x}<1$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^n}}{x+\dfrac{2}{x^n}}$$

$$=\frac{1}{x}$$

⬅分子・分母を 2^n で割った。

iii) $x=1$ のとき

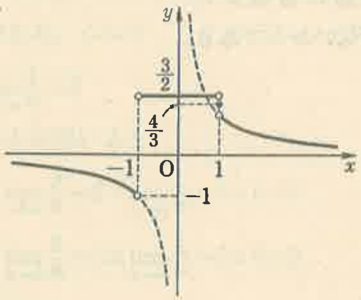
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\frac{4}{3}$$

iv) $x=-1$ のとき

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき } \dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\dfrac{2}{3} \\ n\text{ が偶数のとき } \dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=4 \end{cases}$$

であるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}$ は存在しない。

以上より，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる。



⬅$f(x)=\dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}$ は'連続'関数だが，$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ は，'連続'でない。

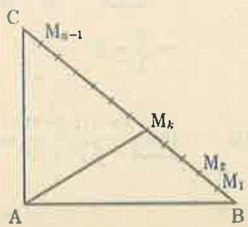
3 $\mathrm{BM}_k=\dfrac{k}{n}$ であるから，$\cos B=\alpha$ とおけば

余弦定理により

$$\mathrm{AM}_k{}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}_k\cdot\cos B$$

$$=\alpha^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\alpha\cdot\frac{k}{n}\cdot\alpha$$

$$=\alpha^2+\frac{k^2}{n^2}-2\alpha^2\frac{k}{n}$$



となる。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$

したがって，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2+\frac{k^2}{n^2}-2\alpha^2\frac{k}{n}\right)$$

$$=\alpha^2(n-1)+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2\alpha^2}{n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

⬅ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\therefore\quad\frac{S_n}{n-1}=\alpha^2+\frac{2n-1}{6n}-\alpha^2$$

$$=\frac{2n-1}{6n}$$

である。よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n}}{6+\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{6}$$

$$=\frac{1}{3}$$

ROUND 2　3月17日(水)

予習日　／　復習日　／　チェック　／

1 (解説)

前回同様，きちんと表現しようとすると，かなり面倒である。たとえば(1)では，

$$\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\neq 0$$

であるから

$$\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{(x^2+8x-1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{8x+2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

となる。$x\to\infty$ の極限値を考えるのだから，

$$x>0$$

の範囲で考えれば十分であることに注意すると

$$\frac{8x+2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{8+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+8x-1}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{8+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$\longrightarrow \frac{8}{1+1}=4 \quad (x\to\infty)$$

となる。しかし，次のように簡単に表現するのが慣例である。

（解答）

(1) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x-1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{8}{2}=4$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x-1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{8}{-2}=-4$$

⇐$x\to-\infty$ の極限値を考えるときは，$x<0$ の範囲に限定してよい。このとき

$x=\sqrt{x^2}$

ではなく

$x=\boxed{}$

（参考）

余裕のある人は，関数

$y=\sqrt{x^2+8x-1}$

$y=\sqrt{x^2-3}$

のグラフをそれぞれ描け。

(3) $$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

⇐"$x\to2$" を考えるときは $x\neq2$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$$

(4) $x\neq0$ のとき，

$$-1\leqq\sin\frac{1}{x}\leqq1$$

であるから，

$$\begin{cases} x>0 \text{ ならば } -x\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq x \\ x<0 \text{ ならば } -x\geqq x\sin\frac{1}{x}\geqq x \end{cases}$$

である。つまり

$$x\neq0 \text{ ならば } -|x|\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq|x|$$

である。ところで，$x\to0$ のとき

$$\begin{cases} |x| \longrightarrow 0 \\ -|x| \longrightarrow 0 \end{cases}$$

である。したがって，これらにはさまれた $x\sin\frac{1}{x}$ も，0 に収束する。すなわち

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

⇐これから

$\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=0$

をそれぞれ導き，これらから

$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

を結論してもよい。

(*cf.* (5)，(6))

(5) $$\lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}2^t=\infty$$

(6) $$\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}2^t=0$$

（注） x の変域を $x>0$ の範囲に限定して，$x\to0$ とすることを "$x\to+0$" と表す。"$x\to-0$" も同様。

2 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta \qquad \cdots\cdots①$$

であるから，両辺を $\sin\theta>0$ で割り

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta} \qquad \cdots\cdots②$$

を得る。ここで θ を 0 に限りなく近づけると，

$$\frac{1}{\cos\theta}\longrightarrow1$$

となるので

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1 \qquad \cdots\cdots③$$

となる。他方，$\sin\theta$, θ, $\tan\theta$ はいずれも奇関数であるから

$0>\theta>-\dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$\sin\theta>\theta>\tan\theta$$

である。この各辺を $\sin\theta<0$ で割れば，やはり②が得られる。したがって，

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1 \qquad\cdots\cdots④$$

となる。

③，④より，

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

⬅"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=1$" と同じ。

ROUND 3	3月 31 日(水)	予習日	復習日	チェック

1　(解説)

無限級数の定義に基づかなくてはいけません。

(解答)

(1) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

⬅
$$\begin{array}{rl} & 1-\frac{1}{2}\\ & \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ & \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ & \vdots\\ +) & \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ \hline & 1-\frac{1}{n+1}\end{array}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot2}\quad(n\to\infty)$$

すなわち，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}$$

(3) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}=\begin{cases}1 & (n\text{ が奇数のとき})\\ 0 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

であるので，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ は存在しない。したがって，和は存在しない。

(4) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(1-1)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=0$$

であるから，求める和は 0 である。

(5) $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{m}{2}$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k}>1+\frac{m}{2}$$

である。m を限りなく大きくすると，右辺は限りなく大きくなる。

したがって，左辺も収束しない。

(注)　ここで示された事態を，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$$

と表すが，これを

「級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ が ∞ に等しい」

と読んではいけない！

(6) $$S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$$

とおく。これと，これより得られる

$$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$$

との差を計算すると