



長岡の“総合的研究”  
「微分・積分」

大東文化大教授 長岡亮介

ROUND 2 微積分学の基礎(2) 関数の極限

今日の目標

今回のテーマは、関数の極限です。実数値をとる変数  $x$  の関数  $f(x)$  においては  $x$  が限りなく大きくなる時  
以外に、  
-  $x$  が限りなく大きくなる時  
-  $x$  が限りなく小さくなる時 (0 に近づくとき)  
など、いろいろなタイプの極限が考えられます。

基本事項

4 関数の極限

(1) 関数  $f(x)$  において、 $x$  の値が大きくなるにつれ、 $f(x)$  が限りなく定数  $l$  に収束するとき、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

と書く。このような定数  $l$  が存在しないとき、“ $f(x)$  は、 $x \rightarrow \infty$  で収束しない (発散する)”とか“ $f(x)$  は、 $x \rightarrow \infty$  で極限值をもたない”という。

$f(x) = x^2$  のように、 $x$  が限りなく大きくなる時、 $f(x)$  も限りなく大きくなる場合には、 $f(x)$  は、 $x \rightarrow \infty$  で極限值をもつわけではないが、便宜上

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

という表現にする。

(2) 関数  $f(x)$  において、 $x$  の値が限りなく定数  $a$  に近づくとき、 $f(x)$  の値が限りなく定数  $l$  に近づくならば、“ $x \rightarrow a$  における  $f(x)$  の極限值は  $l$  である”といい、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

などと表す。

(注) 「 $x = \infty$  における  $f(x)$  の値  $f(\infty)$ 」が定義されていないにもかかわらず、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  が定義できるのと同じように、 $f(a)$  が定義されていなくても  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  を考えることができる。また、 $f(a)$  が定義されていたとしても、それと  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が等しいとは限らない。

極限値を求めるための極力な道具——くはさみ打ちの原理

(1)  $x$  が十分大きいときは、つねに

$$f(x) \leq F(x) \leq g(x)$$

が成り立ち、しかも、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \text{ がともに存在して、定数 } l \text{ に等しい}$$

ならば、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = l$$

(2)  $x$  が定数  $a$  の十分近いところ (ただし、 $a$  は除く) で、つねに

$$f(x) < F(x) < g(x)$$

が成り立ち、しかも、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ がともに存在して、定数 } l \text{ に等しい}$$

ならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = l$$

演習

1 次のおのおのの極限値を求めよ。

(1)\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3})$  (北海道工大 4年)

(2)\*\*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3})$

(3)\*  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

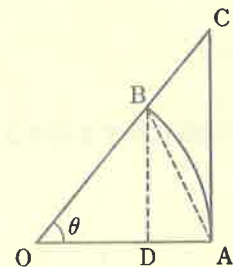
(4)\*\*  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

(5)\*\*  $\lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}}$

(6)\*\*  $\lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}$

2  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\sin \theta < \theta < \tan \theta$  であること

を利用して、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$  を求めよ。



ラ講TEXT4月号は3/13発売  
'94年入試突破「合格基礎力養成ゼミ」を開講！  
定価850円