数学

放送日●3月17日(水)

解答→別冊付録p.68

長岡の“総合的研究”「微分・積分」

大東文化大教授 長岡亮介

ROUND 2 微積分学の基礎(2) 関数の極限

今日の目標

今回のテーマは，関数の極限です。実数値をとる変数 x の関数 $f(x)$ においては

x が限りなく大きくなるとき

以外に，

$-x$ が限りなく大きくなるとき

x が限りなく小さくなるとき（0に近づくとき）

など，いろいろなタイプの極限が考えられます。

基本事項

❹ 関数の極限

(1) 関数 $f(x)$ において，x の値が大きくなるにつれ，$f(x)$ が限りなく定数 l に収束するとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

と書く。このような定数 l が存在しないとき，“$f(x)$ は，$x\to\infty$ で収束しない（発散する）”とか“$f(x)$ は，$x\to\infty$ で極限値をもたない”という。

$f(x)=x^2$ のように，x が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ も限りなく大きくなる場合には，$f(x)$ は，$x\to\infty$ で極限値をもつわけではないが，便宜上

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

という表現にする。

(2) 関数 $f(x)$ において，x の値が限りなく定数 a に近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく定数 l に近づくならば，“$x\to a$ における $f(x)$ の極限値は l である”といい，

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

などと表す。

(注) 「$x=\infty$ における $f(x)$ の値 $f(\infty)$」が定義されていないにもかかわらず，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ が定義できるのと同じように，$f(a)$ が定義されていなくても $\lim_{x\to a} f(x)$ を考えることができる。また，$f(a)$ が定義されていたとしても，それと $\lim_{x\to a} f(x)$ が等しいとは限らない。

❺ 極限値を求めるための極力な道具――〈はさみ打ちの原理〉

(1) x が十分大きいときは，つねに

$$f(x)\leqq F(x)\leqq g(x)$$

が成り立ち，しかも，

$\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\lim_{x\to\infty} g(x)$ がともに存在して，定数 l に等しい

ならば，

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=l$$

(2) x が定数 a の十分近いところ（ただし，a は除く）で，つねに

$$f(x)<F(x)<g(x)$$

が成り立ち，しかも，

$\lim_{x\to a} f(x)$，$\lim_{x\to a} g(x)$ がともに存在して，定数 l に等しい

ならば，

$$\lim_{x\to a} F(x)=l$$

演 習

1 次のおのおのの極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$ （北海道工大 4年）

(2)** $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$

(3)* $\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

(4)** $\lim_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$

(5)** $\lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}}$

(6)** $\lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}}$

** **2** $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ であることを利用して，$\lim_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ を求めよ。