数学 長岡の “総合的研究”「微分・積分」

ROUND 1　　3月 3 日(水)　　予習日 ／　復習日 ／　チェック ／

1　（解説）

基本事項にそって，きちんと算出するのは，意外に難しい。もし，まじめにやるとすると，たとえば(1)では，

『n が十分大きいときは，

$$n^2-5n+6\neq 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{n^2-5n+6}$$

を考えることができる。

←$n^2-5n+6=0$ となるのは，
$n=2$ または $n=3$
のときのみ!

また，$n\neq 0$ においては

$$\frac{2n^2+3n-4}{n^2-5n+6}=\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}}$$

と変形できる。ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

であることを用いると

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\times 0=0\\[2ex] \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=5\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5\times 0=0\end{cases}$$

であり，また

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\times 0=0$$

となることから

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\\[2ex] \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}=6\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\end{cases}$$

である。

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}$$
$$=2+0-0=2$$

←$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n,\ \lim_{n\to\infty}b_n,\ \lim_{n\to\infty}c_n$ がともに存在するなら
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n)$
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}$$
$$=1-0+0=1$$

であるから，求めるべき極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}}$$
$$=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}$$
$$=\frac{2}{1}=2\ 』$$

となる。しかし，高校数学では，次のようにこれを簡略に書くことが許されている。極限に関する議論に習熟すれば，このように簡略化しても誤まることがないからである。

（解答）

(1)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{n^2-5n+6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}}$$
$$=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}$$
$$=\frac{2}{1}=2$$

←本当は，この変形が可能であるかどうかわからない。

(2)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+5^{n+1}}{(-4)^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}+5}{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n+1}$$
$$=5$$

←分子・分母を 5^n で割る。
$3^{n-1}=3^n\cdot 3^{-1}=\frac{1}{3}\cdot 3^n$
$5^{n+1}=5^n\cdot 5$

2 i) $-1<x<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\frac{3}{2}$$

ii) $x>1$ または $x<-1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

←このとき $-1<\frac{1}{x}<1$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^n}}{x+\frac{2}{x^n}}$$

$$=\frac{1}{x}$$

←分子・分母を x^n で割った。

iii) $x=1$ のとき

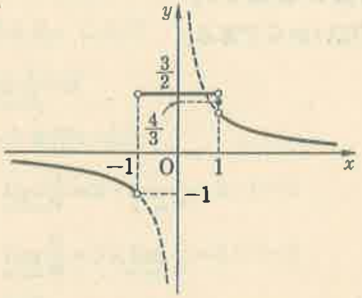
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\frac{4}{3}$$

iv) $x=-1$ のとき

$$\begin{cases} n\text{ が奇数のとき } \dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=\dfrac{2}{3} \\ n\text{ が偶数のとき } \dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}=4 \end{cases}$$

であるので, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}$ は存在しない。

以上より, $y=f(x)$ のグラフは, 次のようになる。



←$f(x)=\frac{x^n+3}{x^{n+1}+2}$ は'連続'関数だが, $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ は,'連続'でない。

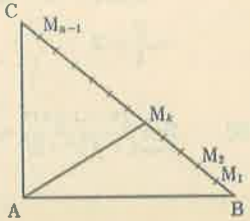
3 $\mathrm{BM}_k=\frac{k}{n}$ であるから, $\cos B=\alpha$ とおけば

余弦定理により

$$\mathrm{AM}_k{}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}_k\cdot\cos B$$

$$=\alpha^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\alpha\cdot\frac{k}{n}\cdot\alpha$$

$$=\alpha^2+\frac{k^2}{n^2}-2\alpha^2\frac{k}{n}$$



となる。ただし, $k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1$

したがって,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2+\frac{k^2}{n^2}-2\alpha^2\frac{k}{n}\right)$$

$$=\alpha^2(n-1)+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2\alpha^2}{n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

← $\sum_{k=1}^{n}c=cn$

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$\therefore\ \frac{S_n}{n-1}=\alpha^2+\frac{2n-1}{6n}-\alpha^2$$

$$=\frac{2n-1}{6n}$$

である。よって,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{6}$$

$$=\frac{1}{3}$$

ROUND 2	3月17日(水)	予習日	復習日	チェック

1 (解説)

前回同様, きちんと表現しようとすると, かなり面倒である。たとえば(1)では,

$$\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\neq 0$$

であるから

$$\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{(x^2+8x-1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$=\frac{8x+2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

となる。$x\to\infty$ の極限値を考えるのだから,

$$x>0$$

の範囲で考えれば十分であることに注意すると