数学

放送日●3月3日(水)　　解答→別冊付録p.66

長岡の“総合的研究”「微分・積分」

大東文化大教授　長岡亮介

ながおか・りょうすけ／長野県生まれ。東大大学院修了。東大講師もかねておられ，専門書・参考書と幅広く活躍。奥の深い解説に“数学の本質が理解できた”というファンが多い。

ROUND 1　微積分学の基礎(1)　数列の極限

注意　問題の最後にある㊥は「大学入試センター試験」範囲を，問題番号のところにある表示＊は「基本的な問題」，＊＊は「標準問題」，＊＊＊は「やや難しい・難しい問題」とその問題の程度を示しています。

今日の目標

「基礎解析」で，すでに微分，積分の基本的な考え方，計算の仕方を学びました。微分を使えば，曲線の接線の傾きや，関数の増減が調べられること，積分を利用すれば，図形の面積や体積を計算できることを知ったはずです。しかし，「基礎解析」で扱ったのは，結局のところ，$f(x)=x^3-2x-4$ のような，多項式で表される関数ばかりでした。多項式以外の関数，たとえば，$\dfrac{x}{x^2+1}$ のような分数関数や $\sqrt{1-x^2}$ のような無理関数，そして $\sin x$ や 2^x のような初等超越関数にまで，微積分の手法を拡大すること，これがこれから学ぶ「微分・積分」の当面の目標です。

話が少し抽象的になるので，初めは抵抗を感ずるかもしれませんが，小学生のとき以来勉強してきた数学の勉強の成果を一望の下に見渡す〈完成の喜び〉の境地にやがて達するでしょう。頑張って下さい。

基本事項

❶ 数列の極限

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ において，n の値が大きくなるにつれ(※)，a_n がある定数 α にいくらでも近づいていくとき，“n を限りなく大きくしたとき，a_n は限りなく α に近づく（**収束する**）”とか“$n\to\infty$ のときの a_n の極限値は α である”といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad あるいは \quad n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\alpha$$

と表す。

（※）　n の値が十分大きい範囲で，これがいえればよい。（☞〔例3〕）

〔例1〕　$a_n=\dfrac{1}{10^n}$ とすると，

$a_1=0.1,\ a_2=0.01,\ a_3=0.001,\ a_4=0.0001,\ \cdots\cdots$

となるから，　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

〔例2〕　$b_n=1-\dfrac{1}{10^n}$ とおくと，

$b_1=0.9,\ b_2=0.99,\ b_3=0.999,\ b_4=0.9999,\ \cdots\cdots$

となるから，　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$　　$\boxed{0.99999\cdots\cdots=0.\dot{9}=1}$

〔例3〕　$c_n=\dfrac{6n}{n^2+9}$ とすると，$c_1=\dfrac{6}{10}<c_2=\dfrac{12}{13}<c_3=\dfrac{18}{18}$ となり，初めは，0から遠のいていくが，それ以後は，

$$c_4=\frac{24}{25}>c_5=\frac{30}{34}>c_6=\frac{36}{45}>c_7=\frac{42}{58}>\cdots\cdots>c_{100}=\frac{600}{10009}>\cdots\cdots>c_{1000}=\frac{6000}{1000009}>\cdots\cdots$$

のようにして，どんどん0に近づいていく。（☞演習 1 (2)）

❷ 基本的な数列の極限値

1.　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

2.　$-1<r<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

❸ 数列の極限値に関する基本公式

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ であるとき

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\alpha\beta$，　$\beta\neq 0$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

したがって，

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\mu\lim\limits_{n\to\infty} b_n$　（λ，μ：定数）

演　習

＊
1　次の数列の極限値を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-4}{n^2-5n+6}$　　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}+5^n}{(-4)^n+5^n}$

＊＊
2　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+3}{x^{n+1}+2}$ とおく。$y=f(x)$ のグラフを描け。

＊＊
3　三角形ABCにおいて，$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，BC$=1$ とする。BCを n 等分する点を M_1，M_2，$\cdots\cdots$，M_{n-1} とし，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}AM_k^2$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n-1}$ の値を求めよ。

（名城大-理工　4年）