旺文社　数学　校正テスト

問題と解答の整合性，誤植などがないかに注意して検算してください。
また，その他体裁などが間違えているところがあれば指摘してください。

$\boxed{1}$　２桁の整数のうち，次のような数はいくつあるか。

(1)　８で割り切れる数　　　(2)　６または８で割り切れる数

(3)　６で割り切れるが８で割り切れない数

(4)　６でも８でも割り切れない数

$\boxed{2}$　三角形OABの辺OA，OB上にそれぞれ点P，Qを OP：PA＝3：2，OQ：QB＝5：1 となるようにとる。AQとBPの交点をRとし，ORの延長がABと交わる点をSとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ と OB$=\vec{b}$ で表せ。

(2)　AS：SB を求めよ。

$\boxed{3}$　1654年にフランスで技術の等しい甲・乙２人が，３回先に勝った方が賭け金を64ピストル(ピストルは金貨の名)をとる約束で勝負を始ぬた。しかし，甲が１回勝ったところで都合により勝負を中止したので，賭け金の分配に困った。これを当時有名な数学者パスカルに相談したのが確率論の端緒となったといわれる。賭け金をどのように分配したら公平か。ただし，勝負に引き分けはないものとする。

$\boxed{4}$　A，B，a，b，c，d を実数とする。

(1)　不等式 $\left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{A^2+B^2}{2}$ を証明せよ。

(2)　(1)を利用して不等式 $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \leqq \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$ を証明せよ。

(3)　(2)を利用して不等式 $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \leqq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ を証明せよ。

$\boxed{5}$　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$　　　(2)　$\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$

$\boxed{1}$ (1) 8で割り切れる2桁の整数の集合を A とすると，

$A=\{8\cdot 2,\ 8\cdot 3,\ \cdots,\ 8\cdot 12\}$

よって $n(A)=12-2+1=\mathbf{11}$

(2) 6で割り切れる2桁の整数の集合をBとすると，

$B=\{6\cdot 2,\ 6\cdot 3,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$

よって，$n(B)=16-2+1=15$

また，6でも8でも割り切れる，すなわち24で割り切れる2桁の整数の集合は $A\cap B=\{24\cdot 1,\ 24\cdot 2,\ \cdots,\ 24\cdot 4\}$ より，

$$n(A\cap B)=4$$

ゆえに，6または8で割り切れる2桁の整数の個数は，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=11+15-4=\mathbf{22}$

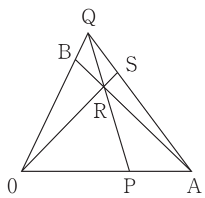
(3) 6で割り切れるが8で割り切れない2桁の整数の集合は $B\cap\overline{A}$ より，

$n(B\cap\overline{A})=n(B)-n(A\cap B)=15-4=\mathbf{11}$

(4) 6でも8でも割り切れない2桁の整数の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ より，

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B})&=n(\overline{A\cup B})\\ &=n(U)-n(A\cup B)\\ &=99-22=\mathbf{68} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (1) AR：RQ$=s:1-s$ とおくと



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{5}{3}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{5}{6}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

3点P，B，Rは一直線上にあるので，

$\dfrac{3}{5}(1-s)+\dfrac{5}{6}s=1 \qquad \therefore\quad s=\dfrac{4}{5}$

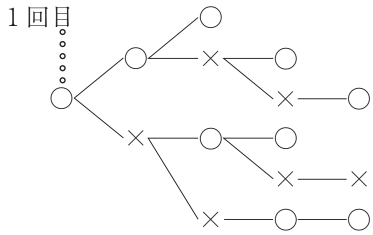
よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において，$\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{15}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{15}{13}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{3}{15}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{10}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+10\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{13}$

よって **AS：SB＝10：3**

$\boxed{3}$ 甲が1回目に勝ったとき64ピストル獲得できる場合は，次の樹形図の通り。



これにより，甲が64ピストル獲得できる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times2+\left(\frac{1}{4}\right)^4\times3=\frac{11}{16}$$

よって，このままゲームを続行したときの，甲の賞金の期待値は，

$$64\times\frac{11}{16}+0\times\frac{5}{16}=44 \quad \text{ピストル}$$

したがって，**甲が44ピストル，乙が20ピストルと分ければ，公平である.**

……(答)

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{A^2+B^2}{2}-\left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(A^2+B^2-2AB)=\dfrac{1}{4}(A-B)^2\geqq0$

等号が成りたつのは $A=B$ のとき。

(2) $\dfrac{a+b}{2}=A$，$\dfrac{c+d}{2}=B$ とおくと (1)から

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\leqq\frac{A^2+B^2}{2}$$

ここで $A^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqq\dfrac{a^2+b^2}{2}$，$B^2\leqq\left(\dfrac{c+d}{2}\right)^2\leqq\dfrac{c^2+d^2}{2}$

$$\therefore \quad \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}\right)=\frac{a^2+b^2+c^3+d^2}{4}$$

等号は $A=B$ かつ $a=b$，$c=d$ すなわち $a=b=c=d$ のとき。

(3) $\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{a+b+c+d}{4}$ すなわち $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ とする。このとき

(2)から $d^2=\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2\leqq\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

等号は $a=b=c=d$ のとき。

$\boxed{5}$ (**1**) $\sqrt{2x+1}=t$ とおくと

$$x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt}=t \text{ より } \quad dx=tdt$$

$$\therefore \quad \int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int\frac{t^2-1}{2t}\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int(t^2-1)dt$$

$$=\frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+C=\boldsymbol{\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C}$$ ……(答)

(2) $e^x=t$ とおくと

$$x=\log t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t} \text{ より } \quad dx=\frac{dt}{t}$$

$$\therefore \quad \int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log t-\log(t+1)+C$$

$$=\boldsymbol{x+\log(e^x+1)+C}$$ ……(答)