数学Ⅱ・B 基礎問題精講［四訂版］

上園信武著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1

(1) $(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot(3y)$
$+3\cdot(2x)\cdot(3y)^2-(3y)^3$
$=\boldsymbol{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$

(2) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
$=(x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=x^3-(3y)^3$
$=\boldsymbol{x^3-27y^3}$

2

$a^6-9a^3b^3+8b^6=(a^3-b^3)(a^3-8b^3)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-2b)$
$\times(a^2+2ab+4b^2)$
$=\boldsymbol{(a-b)(a-2b)(a^2+ab+b^2)}$
$\boldsymbol{\times(a^2+2ab+4b^2)}$

3

a^3b^2 の係数は
$8\cdot 10=\boldsymbol{80}$
ab^4 の係数は
$2\cdot 5=\boldsymbol{10}$

4

(1) $(3x-2y)^6$ を展開したときの一般項は
${}_6\mathrm{C}_r(3x)^r(-2y)^{6-r}$
$={}_6\mathrm{C}_r\cdot 3^r\cdot(-2)^{6-r}\cdot x^ry^{6-r}$
$r=3$ のときが求める係数だから
$${}_6\mathrm{C}_3\cdot 3^3\cdot(-2)^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2}\cdot 27\cdot(-8)$$
$=\boldsymbol{-4320}$

(2) $(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b$
$+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$
の両辺に $a=1$，$b=-1$ を代入すると
$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$
$\therefore\ {}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$
となる.

5

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ 4x^2-4x+a+4 \\
x+1\,) & \overline{\,4x^3\qquad\ +ax+b} \\
 & \underline{4x^3+4x^2} \\
 & \quad -4x^2+ax \\
 & \quad \underline{-4x^2-4x} \\
 & \qquad (a+4)x+b \\
 & \qquad \underline{(a+4)x+a+4} \\
 & \qquad\qquad b-a-4
\end{array}$$

わりきれるとき，
余り$=0$
よって，
$b-a-4=0$ ……①

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \ 2x^2+x+\dfrac{a+1}{2} \\
2x-1\,) & \overline{\,4x^3\qquad\ +ax+b} \\
 & \underline{4x^3-2x^2} \\
 & \quad 2x^2+ax \\
 & \quad \underline{2x^2-\ x} \\
 & \quad (a+1)x+b \\
 & \quad \underline{(a+1)x-\dfrac{a+1}{2}} \\
 & \qquad\qquad \dfrac{a+1}{2}+b
\end{array}$$

余り$=6$ より $\dfrac{a+1}{2}+b=6$ ……②

①，②より，$a=\boldsymbol{1}$，$b=\boldsymbol{5}$

6

(1) 与式$=\left(3+\dfrac{1}{x-5}\right)-\left(5-\dfrac{1}{x-2}\right)$
$+\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$
$=\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$
$=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}$
$=2\left\{\dfrac{1}{(x-5)(x-3)}-\dfrac{1}{(x-2)(x-4)}\right\}$

$$=\frac{2(2x-7)}{(x-5)(x-3)(x-2)(x-4)}$$

(2) 与式$=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}$

$$-\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$

$$+\frac{ab}{(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-ca(a-c)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\mathbf{1}$$

7

$$2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\frac{803}{371}$$

$$\Longleftrightarrow \cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\frac{61}{371}$$

$$\Longleftrightarrow k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=\frac{371}{61}$$

$$\Longleftrightarrow k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\frac{5}{61}$$

$$\Longleftrightarrow k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}$$

$\therefore\quad k=\mathbf{6},\ m=\mathbf{12}$

8

(1) $x+\dfrac{1}{y}=1$ より

$$x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$$

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より $z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$xyz=\left(\dfrac{y-1}{y}\right)\cdot y\cdot\left(\dfrac{1}{1-y}\right)=\mathbf{-1}$

(2) $\dfrac{1}{bc+b+1}=\dfrac{a}{a(bc+b+1)}$

$=\dfrac{a}{1+ab+a}$ $(\because\ abc=1)$

$\dfrac{1}{ca+c+1}=\dfrac{ab}{ab(ca+c+1)}$

$=\dfrac{ab}{a+1+ab}$ $(\because\ abc=1)$

よって，

与式$=\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{a}{ab+a+1}$

$$+\frac{ab}{ab+a+1}$$

$$=\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=\mathbf{1}$$

9

(1) $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{2y+z}{7}=\dfrac{z+3x}{6}=k$

とおくと

$$\begin{cases} x+\ \ y=3k & \cdots\cdots① \\ 2y+\ \ z=7k & \cdots\cdots② \\ z+3x=6k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①×2−② より，$2x-z=-k$ ……④

③+④ より，$5x=5k$ $\therefore\quad x=k$

よって，①より，$y=2k$,

③より，$z=3k$

$xyz\neq0$ より，$k\neq0$ だから

$x:y:z=k:2k:3k=\mathbf{1:2:3}$

(2) $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2+4k^2-9k^2}{k^2+4k^2+9k^2}$

$=\dfrac{-4k^2}{14k^2}=\mathbf{-\dfrac{2}{7}}$ $(\because\ k\neq0)$

10

$$\begin{cases} 2a+b=3kc & \cdots\cdots① \\ 2b+c=3ka & \cdots\cdots② \\ 2c+a=3kb & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①+②+③ より，

$3(a+b+c)=3k(a+b+c)$

(i) $a+b+c\neq0$ のとき，$k=\mathbf{1}$

(ii) $a+b+c=0$ のとき，

$c=-a-b$ だから②より，$b-a=3ka$

$\therefore\ b=(3k+1)a$

このとき，$c=-(3k+2)a$

①に代入して，$(3k+3)a=-3k(3k+2)a$

$a\neq 0$ だから，

$k+1=-3k^2-2k \iff 3k^2+3k+1=0$

これをみたす実数解は存在しない．

したがって，$a+b+c=0$ の場合はない．

11

左辺の x^3 の係数が 1 より，$a=\mathbf{1}$

よって，

$$x^3-9x^2+9x-4$$
$$=x(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に $x=0$，$x=1$，$x=2$ を代入して

$$\begin{cases} -4=d \\ -3=c+d \\ -14=2b+2c+d \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} b=\mathbf{-6} \\ c=\mathbf{1} \\ d=\mathbf{-4} \end{cases}$$

逆に，このとき，

$$右辺=x(x-1)(x-2)-6x(x-1)+x-4$$
$$=x^3-3x^2+2x-6x^2+6x+x-4$$
$$=x^3-9x^2+9x-4=左辺$$

となり適する．

12

(1)　$a:b=b:c$ より　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$

とおくと，$a=bk$，$c=\dfrac{b}{k}$

$$左辺=\frac{1}{b^3k^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{k^3}{b^3}=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

$$右辺=\frac{b^3k^3+b^3+\dfrac{b^3}{k^3}}{b^2k^2\cdot b^2\cdot\dfrac{b^2}{k^2}}=\frac{k^3+1+\dfrac{1}{k^3}}{b^3}$$

$$=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

よって，$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}$

(2)　$x+\dfrac{1}{y}=1$ より　$x=\dfrac{y-1}{y}$，

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より　$z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{y}{y-1}=1$

13

$a>0$，$b>0$ より

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)-9=ab+\frac{4}{ab}-4$$
$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0$$

等号成立は，$\sqrt{ab}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$．

つまり，$ab=2$ のとき．

14

(1)　与式 $\iff (3x-2)(x-1)=0$

より，$x=\mathbf{1}$，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2)　与式

$$\iff (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=24$$
$$\iff (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$$

$x^2+5x=t$ とおくと，

$(t+4)(t+6)=24 \iff t(t+10)=0$

$\therefore\ t=0$ または -10

(i)　$t=0$，すなわち，$x^2+5x=0$ のとき，$x=\mathbf{0}$，$\mathbf{-5}$

(ii)　$t=-10$，すなわち，$x^2+5x+10=0$ のとき，

$$x=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}}$$

15

(1)　$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$

$=\mathbf{-2+2}\boldsymbol{i}$

(2)　$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^2\}^3}{8}$

$=\dfrac{(-2i)^3}{8}=\boldsymbol{i}$

注　$\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^3\}^2}{8}$ としてもよい．

(3)　$\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{1-i}{2}$

$\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$

より，与式$=\dfrac{1-i}{2}\times(1-i)=\boldsymbol{-i}$

16

(1)　$x+y=2$，$xy=2$ より

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2=\boldsymbol{-8}$

(2)　$x=1-\sqrt{2}\,i \Longleftrightarrow x-1=-\sqrt{2}\,i$

両辺を平方して整理すると，

$x^2-2x+3=0$

ここで，

$(x^3+2x^2+3x-7)\div(x^2-2x+3)$

を行うと，

商が $x+4$ で，余りが $8x-19$

となることから，

x^3+2x^2+3x-7

$=(x+4)(x^2-2x+3)+8x-19$

と表せ，$x^2-2x+3=0$，$x=1-\sqrt{2}\,i$

より，求める式の値は

$8(1-\sqrt{2}\,i)-19=\boldsymbol{-11-8\sqrt{2}\,i}$

17

(1)　$x^2-(k+1)x+k^2=0$ の判別式を D とすると

$D=(k+1)^2-4k^2=-3k^2+2k+1$

$=-(3k+1)(k-1)$

より

(i)　$D>0$，すなわち，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<k<1}$ **のとき，異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii)　$D=0$，すなわち，$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{3}}$，**1 のとき，重解をもつ**

(iii)　$D<0$，すなわち，$\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{1<k}$ **のとき，虚数解を 2 個もつ**

(2)　与えられた方程式は，2 次方程式より，$k\neq0$

$kx^2-2kx+2k+1=0$ の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-k(2k+1)=-k^2-k$

$=-k(k+1)$

より

(i)　$\dfrac{D}{4}>0$，すなわち，$\boldsymbol{-1<k<0}$ **のとき，異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii)　$\dfrac{D}{4}=0$，すなわち，$\boldsymbol{k=-1}$ **のとき，重解をもつ**

(iii)　$\dfrac{D}{4}<0$，すなわち，$\boldsymbol{k<-1}$，$\boldsymbol{0<k}$ **のとき，虚数解を 2 個もつ**

18

①，②，③の判別式をそれぞれ，D_1，D_2，D_3 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-1=(a-1)(a+1)$，

$\dfrac{D_2}{4}=4-a^2=-(a-2)(a+2)$，

$D_3=(a+1)^2-4a^2=-3a^2+2a+1$

$=-(3a+1)(a-1)$

よって，D_1，D_2，D_3 の符号は下表のようになる．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
D_1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D_2	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
D_3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$

ここで，題意をみたすためには，D_1，D_2，D_3 のうち，1 つが正または 0 で，残り 2 つが負であればよいので

$\boldsymbol{a<-2,\quad -1<a<-\dfrac{1}{3},\quad 2<a}$

19

(1)　与式

$\Longleftrightarrow (x^2+2x+1)+(x^2+3x+2)i=0$

x^2+2x+1，x^2+3x+2 は実数だから

$x^2+2x+1=0$　……①

$x^2+3x+2=0$　……②

① $\Longleftrightarrow (x+1)^2=0 \Longleftrightarrow x=-1$

② $\Longleftrightarrow (x+1)(x+2)=0$

$\Longleftrightarrow x=-1,\ -2$

①，②が同時に成りたつ x が求めるもので　$\boldsymbol{x=-1}$

(2)　与式

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{x+yi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+i}$$

$$\text{右辺}=\frac{i}{2(2+i)}=\frac{i^2}{2i(2+i)}$$

$$=\frac{-1}{-2+4i}=\frac{1}{2-4i}$$

$\therefore$　$x+yi=2-4i$

x，y は実数だから　$\boldsymbol{x=2,\ y=-4}$

20

与式

$\Longleftrightarrow (x^2-3ax+a)+(x-2a)i=0$

x，a は実数だから

$$\begin{cases} x^2-3ax+a=0 & \cdots\cdots① \\ x-2a=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より　$x=2a$．これを①に代入すると，

$2a^2-a=0$ となり　$a=0,\ \dfrac{1}{2}$

よって，$a>0$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

21

解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=5$

$$\therefore \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ \qquad\quad =16-10=6 \\ \alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=25 \end{cases}$$

よって，α^2，β^2 を解にもつ2次方程式は

$\boldsymbol{x^2-6x+25=0}$

22

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$，

$\alpha\beta\gamma=-3$，

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

より

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2$

$\qquad -3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=-\{1-3\cdot(-2)\}+3\cdot(-3)$

$=-7-9=\boldsymbol{-16}$

23

$x=1+i$ を与式に代入すると

$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$

$\Longleftrightarrow (-2+2i)+(a+ai)+b=0$

$\Longleftrightarrow a+b-2+(a+2)i=0$

a，b は実数だから

$$\begin{cases} a+b-2=0 & \cdots\cdots① \\ a+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より　$\boldsymbol{a=-2,\ b=4}$

24

(1)　$f(x)+g(x)$ を $x-a$ でわった余りは b より，

$f(a)+g(a)=\boldsymbol{b}$

$f(x)g(x)$ を $x-a$ でわった余りは c より，

$f(a)g(a)=\boldsymbol{c}$

(2)　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ を $x-a$ でわった余りは $\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$

より(1)を用いると，

$\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$

$=\{f(a)+g(a)\}^2-2f(a)g(a)$

$=\boldsymbol{b^2-2c}$

25

求める余りは，$ax+b$ とおけるので，

$f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$

と表せる．$f(2)=3$，$f(-1)=6$ だから

$2a+b=3$ ……①

$-a+b=6$ ……②

①，②より，$a=-1$，$b=5$ となり，求める余りは，$\boldsymbol{-x+5}$

26

(1) $P(x)$ は $x+1$，$x-1$，$x+2$ でわると，それぞれ，3，7，4 余るので

$P(-1)=3$，$P(1)=7$，$P(-2)=4$

ここで，

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおくと

$$\begin{cases} a-b+c=3 \\ a+b+c=7 \\ 4a-2b+c=4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$$

よって，求める余りは $\boldsymbol{x^2+2x+4}$

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ でわった余りを $R(x)$（2 次以下の整式）とおくと

$P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+R(x)$

と表せる．

$P(x)$ は $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余るので $R(x)$ も $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余る．

よって，$R(x)=a(x+1)^2+2x+1$ とおける．

$$\therefore \quad P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+a(x+1)^2+2x+1$$

$P(1)=-1$ より

$4a+3=-1 \quad \therefore \quad a=-1$

よって，求める余りは

$-(x+1)^2+2x+1$

すなわち，$\boldsymbol{-x^2}$

27

(1) $P(2)=0$

$\Longleftrightarrow 8a+8b-4ab-16=0$ ……①

$\Longleftrightarrow -4(a-2)(b-2)=0$

$\therefore \quad a=\boldsymbol{2}$ または $b=\boldsymbol{2}$

(2) $P(-2)=0$

$\Longleftrightarrow 24a-8b-8ab+24=0$ ……②

$\Longleftrightarrow -8(a+1)(b-3)=0$

$\therefore \quad a=\boldsymbol{-1}$ または $b=\boldsymbol{3}$

(3) ①，②が同時に成りたてばよいので

$(a,\ b)=\boldsymbol{(-1,\ 2)}$ または $\boldsymbol{(2,\ 3)}$

(i) $(a,\ b)=(-1,\ 2)$ のとき

$P(x)=-x^4+3x^3+5x^2-12x-4$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(-x^2+3x+1)}$

(ii) $(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき

$P(x)=2x^4+x^3-11x^2-4x+12$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(2x+3)(x-1)}$

28

$x^3=1$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$ より

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

(i) $\boldsymbol{n=3m}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1$

$=(\omega^3)^{2m}+(\omega^3)^m+1=1+1+1=\boldsymbol{3}$

(ii) $\boldsymbol{n=3m+1}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+2}+\omega^{3m+1}+1$

$=(\omega^3)^{2m}\cdot\omega^2+(\omega^3)^m\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=\boldsymbol{0}$

(iii) $\boldsymbol{n=3m+2}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+4}+\omega^{3m+2}+1$

$=(\omega^3)^{2m+1}\cdot\omega+(\omega^3)^m\cdot\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=\boldsymbol{0}$

29

共通解を α とおくと，

$\alpha^2-2a\alpha+6a=0$ ……①′

$\alpha^2-2(a-1)\alpha+3a=0$ ……②′

①′−②′ より，$-2\alpha+3a=0 \Longleftrightarrow \alpha=\dfrac{3}{2}a$

これを①′ に代入すると　$a^2-8a=0$

$\therefore \quad a=0,\ 8$

ここで $a=0$ とすると $\alpha=0$ となり題意に反するので，$a=\boldsymbol{8}$

① $\Longleftrightarrow x^2-16x+48=0$

$\Longleftrightarrow (x-4)(x-12)=0$

より，$x=4,\ 12$

② $\iff x^2-14x+24=0$

$\iff (x-2)(x-12)=0$

より，$x=2,\ 12$

よって，**共通解は 12** であり，**①の他の解は 4**，**②の他の解は 2** である．

30

(1)　①に $x=1+i$ を代入して

$(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$ ……①′

①′ $\iff 2i-2+2ai+b+bi+c=0$

$\iff (b+c-2)+(2a+b+2)i=0$

$a,\ b,\ c$ は実数だから，

$$\begin{cases} b+c-2=0 \\ 2a+b+2=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} b=\boldsymbol{-2a-2} \\ c=\boldsymbol{2a+4} \end{cases}$$

(2)　(1)より，①は

$x^3+ax^2-2(a+1)x+2a+4=0$

ここで，$x=1+i$ を解にもつから，

$x-1=i$　両辺を 2 乗して整理すると

$x^2-2x+2=0$

よって，$(x^2-2x+2)(x+a+2)=0$

ゆえに，①の実数解は $x=\boldsymbol{-a-2}$

(3)　①と②がただ 1 つの実数解を共有するとき，それは，$x=-a-2$ だから，②に代入して

$(a+2)^2+b(a+2)+3=0$

$\iff (a+2)^2-2(a+1)(a+2)+3=0$

$\iff -a^2-2a+3=0$

$\iff a^2+2a-3=0$

$\iff (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ \ a=-3,\ 1$

$a=-3$ のとき，$b=4,\ c=-2$

$a=1$ のとき，$b=-4,\ c=6$

よって，

$(a,\ b,\ c)=\boldsymbol{(-3,\ 4,\ -2),\ (1,\ -4,\ 6)}$

31

(1)　内分する点は，

$\left(\dfrac{2\times3+3\times(-1)}{3+2},\ \dfrac{2\times1+3\times2}{3+2}\right)$

$=\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)}$

外分する点は，

$\left(\dfrac{(-2)\times3+3\times(-1)}{3+(-2)},\ \dfrac{(-2)\times1+3\times2}{3+(-2)}\right)$

$=\boldsymbol{(-9,\ 4)}$

(2)　三角形の頂点は，それぞれの直線の交点であるから，その座標は，

$(0,\ 6),\ (-2,\ 0),\ (5,\ 0)$

よって，重心の座標は，

$\left(\dfrac{0+(-2)+5}{3},\ \dfrac{6+0+0}{3}\right)=\boldsymbol{(1,\ 2)}$

32

$2x+3y-6=0$

$\iff y=-\dfrac{2}{3}x+2$

より，平行な直線は，傾きが $-\dfrac{2}{3}$ で，

点 $(3,\ 2)$ を通るので

$y-2=-\dfrac{2}{3}(x-3)$

すなわち，$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{3}x+4}$

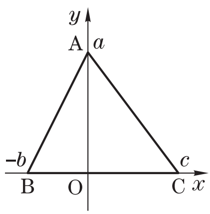
33

△ABC は鋭角三角形なので，

$\mathrm{A}(0,\ a),\ \mathrm{B}(-b,\ 0),\ \mathrm{C}(c,\ 0)$,

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

とおける．



このとき，

$\mathrm{AB}^2=a^2+b^2$,

$\mathrm{AC}^2=a^2+c^2$,

$\mathrm{BC}^2=(b+c)^2$

$\cos B=\dfrac{b}{\mathrm{AB}}$

$\therefore\ \ \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$=a^2+b^2+(b+c)^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\dfrac{b}{\mathrm{AB}}$

$=a^2+b^2+(b+c)^2-2b(b+c)$

$=a^2+c^2=\mathrm{AC}^2$

よって，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$

が成りたつ．

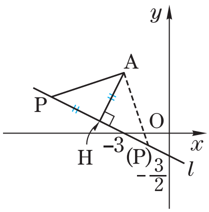
34

Aと l の距離は，

$\dfrac{|-3+8+3|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

より

$AH=HP=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

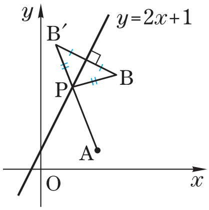


$\therefore\quad \triangle AHP$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{32}{5}}$

35

点Bの $y=2x+1$ に関する対称点を $B'(a,\ b)$ とおくと，直線 BB' の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ だから



$\dfrac{b-5}{a-4}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad a+2b=14\qquad\cdots\cdots①$

また，線分 BB' の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b+5}{2}\right)$ は $y=2x+1$ 上にあるので

$\dfrac{b+5}{2}=a+4+1$

$\therefore\quad 2a-b=-5\qquad\cdots\cdots②$

①，②より，$a=\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{33}{5}$

よって，$B'\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{33}{5}\right)$

ここで，$PB=PB'$ だから

$AP+PB=AP+PB'\geqq AB'$ （一定）

（等号は，点Pが直線 AB' と $y=2x+1$ の交点と一致するとき成立．）

直線 AB' は $y-1=\dfrac{1-\dfrac{33}{5}}{3-\dfrac{4}{5}}(x-3)$

より　$y=-\dfrac{28}{11}x+\dfrac{95}{11}$

この直線と $y=2x+1$ の交点は

$\left(\dfrac{42}{25},\ \dfrac{109}{25}\right)$ だから $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{42}{25}},\ \boldsymbol{\dfrac{109}{25}}\right)$ のとき，

$AP+PB$ は最小．

36

(1)　(i)　垂直のとき

$1\cdot1+a\{-(2a-1)\}=0$

$\Longleftrightarrow 2a^2-a-1=0$

$\Longleftrightarrow (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore\quad a=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}},\ \mathbf{1}$

(ii)　平行のとき

$1\cdot\{-(2a-1)\}-1\cdot a=0$

$\Longleftrightarrow 3a-1=0$

$\therefore\quad a=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2)　$x+y=3\qquad\cdots\cdots①$

$y-x=1\qquad\cdots\cdots②$

$x+3y=3\qquad\cdots\cdots③$

(ア)　①＋②より　$2y=4$

$\therefore\quad (x,\ y)=(1,\ 2)$

②＋③より　$4y=4$

$\therefore\quad (x,\ y)=(0,\ 1)$

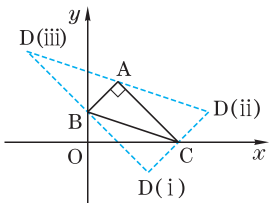
③－①より　$2y=0$

$\therefore\quad (x,\ y)=(3,\ 0)$

よって，3つの頂点の座標は，

$\mathbf{(1,\ 2),\ (0,\ 1),\ (3,\ 0)}$

(イ)　(ア)の答えの頂点の座標を順にA，B，Cとし，つけ加える点を $D(a,\ b)$ とすると，平行四辺形ができるのは次の3つの場合のみである．



(i)　BCが対角線のとき

平行四辺形の性質から，BC と AD の中点は一致するので，

$$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(2,\ -1)$

(ii) AC が対角線のとき，(i)と同様で

$$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\ \frac{2}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(4,\ 1)$

(iii) AB が対角線のとき，(i)と同様で

$$\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(-2,\ 3)$

(i)，(ii)，(iii)より，求める点の座標は

$\mathbf{(2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-2,\ 3)}$

37

(1) $y=ax+9-3a$

$\Longleftrightarrow (x-3)a+9-y=0$

これが任意の a について成りたつので

$$\begin{cases} x-3=0 \\ 9-y=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$$

よって，定点 $(3,\ 9)$ を通る．

(2) a がすべての実数値をとっても，y 軸に平行で，点 $(3,\ 9)$ を通る直線 $x=3$ は表せないので，これと x 軸との交点 $(3,\ 0)$ は通ることができない．

よって，$\boldsymbol{p=3}$ はとることができない．

38

$2x+y-1=0$ は，$x+y+1=0$ と垂直ではないので求める直線は，

$$k(2x+y-1)+(x-2y-3)=0$$

すなわち

$$(2k+1)x+(k-2)y-k-3=0$$

と表せる．

これが，$x+y+1=0$ と垂直だから，

$1\cdot(2k+1)+1\cdot(k-2)=0 \Longleftrightarrow 3k-1=0$

よって，$k=\dfrac{1}{3}$ より，

$$\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-\frac{10}{3}=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x-y-2=0}$$

39

(1) 求める円の方程式を

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと

A を通るので，

$5a+5b+c+50=0$ ……①

B を通るので，

$2a-4b+c+20=0$ ……②

C を通るので，

$-2a+2b+c+8=0$ ……③

①−② より $a+3b+10=0$ ……④

②−③ より $2a-3b+6=0$ ……⑤

④+⑤ より $a=-\dfrac{16}{3}$，

④より $b=-\dfrac{14}{9}$，

①より $c=-\dfrac{140}{9}$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{16}{3}x-\frac{14}{9}y-\frac{140}{9}=0}$$

(2) 3 点 A，B，D を通る円がかけないのは，D が直線 AB 上にあり，A とも B とも異なるときである．

$$\mathrm{AB}:y-5=\frac{5-(-4)}{5-2}(x-5)$$

$\Longleftrightarrow y=3x-10$

より，求める a，b の関係式は

$\boldsymbol{b=3a-10}\ \ ((\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\neq(5,\ 5),\ (2,\ -4))$

40

円の中心 $(-2,\ -1)$ と直線との距離を d とおくと

$$d=\frac{|-2a+1+9-3a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$$

(i) $d<5$ のとき，

すなわち $\dfrac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}<5$ のとき

両辺を平方して，

$a^2-4a+4<a^2+1 \Longleftrightarrow -4a<-3$

よって，

$a>\frac{3}{4}$ のとき，異なる 2 点で交わる．

(ii) $d=5$ すなわち，

$a=\frac{3}{4}$ のとき，接する．

(iii) $d>5$ すなわち，

$a<\frac{3}{4}$ のとき，共有点をもたない．

41

求める接線は y 軸と平行ではないので，

$$y+2=m(x-4)$$

すなわち，$mx-y-4m-2=0$

とおける．これが円 $x^2+y^2=10$ に接するので，$\dfrac{|-4m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

両辺を平方すると

$$16m^2+16m+4=10m^2+10$$

$\Longleftrightarrow 3m^2+8m-3=0$

$\Longleftrightarrow (3m-1)(m+3)=0$

$\therefore\quad m=\frac{1}{3},\ -3$

よって，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}} \text{ と } \boldsymbol{y=-3x+10}$$

42

$x^2+y^2=2$ ……①

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ ……②

①と②の中心間の距離$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

①の半径は $\sqrt{2}$，②の半径は 2 より

$$2-\sqrt{2}<\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$$

だから，2 円は異なる 2 点で交わる．

よって，①−② より，$-2x-2y=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x}$

43

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2,$$
$$\mathrm{BP}^2=(x-5)^2+(y-5)^2$$

$\mathrm{AP}^2:\mathrm{BP}^2=1:9$ だから

$$9\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$$

$\Longleftrightarrow 9(x-1)^2+9(y-1)^2$
$\quad=(x-5)^2+(y-5)^2$

$\Longleftrightarrow x^2-x+y^2-y-4=0$

$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$

よって，求める軌跡は，

円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$

44

円は x 軸の下側から x 軸に接しているので，中心の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，半径は $-Y$．

よって，円の方程式は

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=Y^2$$

となり，点 $(1,\ -2)$ を通るので，

$$(1-X)^2+(-2-Y)^2=Y^2$$

$\Longleftrightarrow X^2-2X+4Y+5=0$

よって，求める軌跡は，

放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

45

(1) $\begin{cases} x=-t+2 & \cdots\cdots① \\ y=2t+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×2+② より，$2x+y=5$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=-2x+5}$

(2) $\begin{cases} x=1-|t| & \cdots\cdots① \\ y=t^2-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より，$1-x=|t|$ ……①′

$|t|\geqq 0$ より，$x\leqq 1$

次に，①′ より $|t|^2=(1-x)^2$

$\therefore\quad t^2=(1-x)^2$

②に代入して　$y=(1-x)^2-1$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=x^2-2x\quad (x\leqq 1)}$

(3) $\begin{cases} x=1-\sin t \\ y=1+\cos t \end{cases}$

より $\begin{cases} 1-x=\sin t & \cdots\cdots① \\ y-1=\cos t & \cdots\cdots② \end{cases}$

①^2+②^2 より　$(1-x)^2+(y-1)^2=1$

また，$30° \leqq t \leqq 120°$ より，

$$\frac{1}{2} \leqq \sin t \leqq 1,\quad -\frac{1}{2} \leqq \cos t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

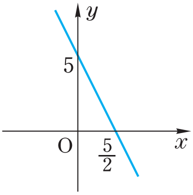
だから，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}+1$

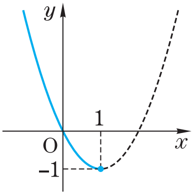
となり，求める軌跡は

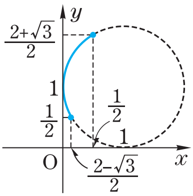
$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^2=\mathbf{1}$$

$$\left(\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leqq \boldsymbol{y} \leqq \frac{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{2}}{\mathbf{2}}\right)$$

(1)，(2)，(3)のグラフは順に下の図のようになる．







46

(1)　①と $y=-x^2+3x-2$ より，y を消去すると

$4x^2-2(2t+3)x+t^2+8t-4=0$ ……②

②は実数解をもつので，判別式を D とすると，$\frac{D}{4} \geqq 0$ より

$$(2t+3)^2-4(t^2+8t-4) \geqq 0$$

$\Longleftrightarrow -4t+5 \geqq 0$　　∴　$\boldsymbol{t} \leqq \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$

(2)　① $\Longleftrightarrow y=(x-t)^2-\frac{1}{2}t^2+4t-4$

だから，頂点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=t$　　……③

$Y=-\frac{1}{2}t^2+4t-4$　　……④

③，④より t を消去すると，

$$Y=-\frac{1}{2}X^2+4X-4$$

ここで，(1)より，$t \leqq \frac{5}{4}$ だから③より

$$X \leqq \frac{5}{4}$$

よって，求める軌跡は

$$\boldsymbol{y}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^2+\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\quad \left(\boldsymbol{x} \leqq \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)$$

47

(1)　$l \Longleftrightarrow (x-1)t-y=0$

より，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 0)$ を通る．

$m \Longleftrightarrow x-1+(y-2)t=0$

より，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 2)$ を通る．

∴　**A(1，0)，B(1，2)**

(2)　$t\cdot1+(-1)\cdot t=0$ より，l と m は直交するので，P は線分 AB を直径とする円を描く．ここで AB の中点は M(1，1) であり，

AM$=1$

よって，P は円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上を動く．

ここで，l は $x=1$，m は $y=2$ と一致することはないので点 $(1,\ 2)$ は含まれない．

よって，求める軌跡は，

円 $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^2=\mathbf{1}$ から，
点 (1，2) を除いたもの．

48

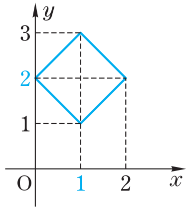
$|x-1|+|y-2|=1$ は曲線 $|x|+|y|=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$|x|+|y|=1$ は，x に $-x$ を代入しても y に $-y$ を代入しても式は変わらないので，x 軸，y 軸，原点に関して対称．

よって，$|x|+|y|=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$，すなわち，$x+y=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ を x軸，

y 軸，原点に関して対称移動した図形が

$|x|+|y|=1$

よって，求める図形は右図のような正方形．



49

(1)　$x-y<2 \Longleftrightarrow y>x-2$

よって，$y=x-2$ より上側を表す．

$$x-2y>1 \Longleftrightarrow y<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

よって，$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ より下側を表す．

よって，求める領域は下図の色の部分（境界は含まない）．

(2)　$x^2+y^2-2x+4y\leqq 4$

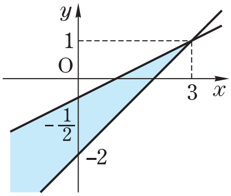
$\Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\leqq 9$

よって，$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ の周および内部を表す．

また，$y\geqq x$ は $y=x$ より上側とその図形上を表す．

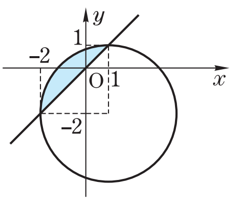
よって，求める領域は次図の色の部分（境界を含む）．

(1)



ただし，境界は含まない

(2)



ただし，境界は含む

50

(1)　$|x^2-2x|$

$$=\begin{cases} x^2-2x & (x^2-2x\geqq 0) \\ -(x^2-2x) & (x^2-2x<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-2x & (x\leqq 0,\ 2\leqq x) \\ -x^2+2x & (0<x<2) \end{cases}$$

よって，求める領域は $y=|x^2-2x|$ の下側で，境界を含む．

(2)　$|x^2-2|+1$

$$=\begin{cases} x^2-2+1 & (x^2-2\geqq 0) \\ -(x^2-2)+1 & (x^2-2<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq x) \\ -x^2+3 & (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}) \end{cases}$$

よって，求める領域は $y=|x^2-2|+1$ の上側で，境界を含む．

(3)　(i)　$x-1\geqq 0,\ y-2\geqq 0$

すなわち　$x\geqq 1,\ y\geqq 2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

$\Longleftrightarrow x-1+y-2\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\leqq -x+4$

(ii)　$x<1,\ y\geqq 2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

$\Longleftrightarrow -(x-1)+y-2\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\leqq x+2$

(iii)　$x\geqq 1,\ y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

$\Longleftrightarrow x-1-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq x$

(iv)　$x<1,\ y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

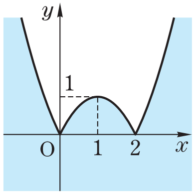
$\Longleftrightarrow -(x-1)-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq -x+2$

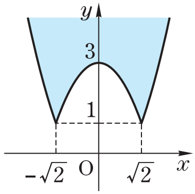
注　$|x|+|y|\leqq 1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動（⇨**48**）したものは，

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

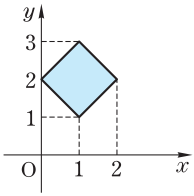
領域を図示すると順に次ページ図の色の部分となる．



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む

51

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+3y \leqq 12$，$2x+y \leqq 8$ の表す領域は，図Ⅰの色の部分である．ただし，境界は含む．

(1)　$x+3y=k$ とおくと，

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$ となり，図Ⅱより

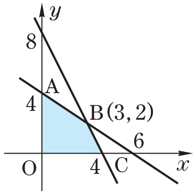
A(0，4) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最大で，k **の最大値は 12**

O(0，0) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最小で，kの**最小値は 0**

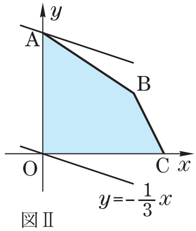
(2)　$x^2-y=k'$ とおくと，$y=x^2-k'$ となり，図Ⅲより

A(0，4) を通るとき，$-k'$ は最大で，k' **の最小値は -4**

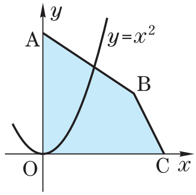
C(4，0) を通るとき，$-k'$ は最小で，k' **の最大値は 16**



図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ

52

(1)　(ア)　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ において，

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと，

$\theta=60^\circ$，120°

よって，$\boldsymbol{\theta=60^\circ+360^\circ\times n}$，

$\boldsymbol{120^\circ+360^\circ\times n}$　（$\boldsymbol{n}$ **：整数**）

(イ)　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ において，

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと，

$\theta=120^\circ$，240°

よって，$\boldsymbol{\theta=120^\circ+360^\circ\times n}$，

$\boldsymbol{240^\circ+360^\circ\times n}$　（$\boldsymbol{n}$ **：整数**）

(ウ)　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ において，

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を解くと，$\theta=30^\circ$，210°

よって，$\boldsymbol{\theta=30^\circ+360^\circ\times n}$，

$\boldsymbol{210^\circ+360^\circ\times n}$　（$\boldsymbol{n}$ **：整数**）

(2)　60° の動径を表す角は，nを整数として，$60^\circ+360^\circ\times n$ と表せる．

$\therefore$　$500^\circ<60^\circ+360^\circ\times n<5000^\circ$

$\Longleftrightarrow 440^\circ<360^\circ\times n<4940^\circ$

これをみたす整数nは，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13 だから求める個数は，**12 個**．

53

(1) (ア) $S=\frac{1}{2}rl$ より

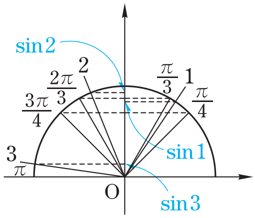
$$l=\frac{2S}{r}=\frac{2\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(イ) $l=r\theta$ より

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

(2) $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}<2<\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}<3<\pi$

より 8 個の角 $\frac{\pi}{4}$, 1, $\frac{\pi}{3}$, 2, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, 3, π は下図のような位置関係にある.



∴ $\boldsymbol{\sin 3<\sin 1<\sin 2}$

54

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{9}{25},$$

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=\frac{16}{25}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より,

$$\cos\alpha>0,\ \cos\beta<0$$

よって,

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\boldsymbol{-1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\boldsymbol{0}$$

55

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より, $\cos\theta<0$

$$∴\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

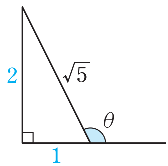
$$∴\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

$$∴\ \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{7}{9}}$$

56

$\tan\theta=-2$ のとき,

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ だから



右図より, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$∴\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$
$$=\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{32}{5\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\frac{2}{5\sqrt{5}}}$$

$$∴\ \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$=-\frac{4}{5\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{11}{5\sqrt{5}}}$$

57

(解 I) (和積の公式を使って)

$$\sin 3\theta+\sin 2\theta=2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より, $0\leqq\frac{\theta}{2}\leqq\frac{\pi}{4}$ だから,

$$\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$$

よって, $\sin\frac{5\theta}{2}=0$

$0\leqq\frac{5\theta}{2}\leqq\frac{5\pi}{4}$ だから, $\frac{5\theta}{2}=0$, π

$$∴\ \theta=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\frac{2\pi}{5}}$$

参考 （2倍角，3倍角の公式を使うと…）

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$,

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

より

$\sin 2\theta+\sin 3\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=\sin\theta(2\cos\theta+3-4\sin^2\theta)$

$=\sin\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)$

したがって，$\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$ より

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$(\because\ \ 0\leqq\cos\theta\leqq 1)$

このあと，$\theta=0$ は求められますが，

$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ から，$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ を求めることは厳しくなります．

（解Ⅱ）（$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ を使って）

$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

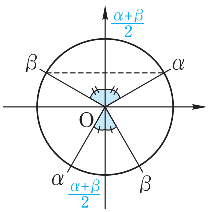
$\Longleftrightarrow \sin 3\theta=-\sin 2\theta$

$\Longleftrightarrow \sin 3\theta=\sin(\pi+2\theta)$

$\therefore\ \ \dfrac{3\theta+(\pi+2\theta)}{2}$

$=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$

（n：整数）



$\therefore\ \ \theta=\dfrac{2n\pi}{5}$

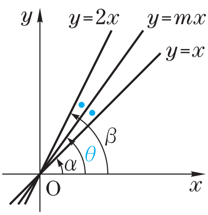
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$n=0,\ 1$

よって，$\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{5}$

58

（解Ⅰ）（加法定理を使って）

$y=x$，$y=2x$，$y=mx$ が x 軸の正方向となす角をそれぞれ α，β，θ $(0<\alpha<\theta<\beta<90°)$



とおくと，

$$\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=2$，$\tan\theta=m$

$\therefore\ \ \tan 2\theta=\tan(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=-3$

次に，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ だから，

$3\tan^2\theta-2\tan\theta-3=0$

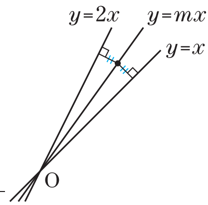
$\therefore\ \ m=\tan\theta=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\ \ (\because\ \ m>0)$

よって，求める直線は

$$\boldsymbol{y=\frac{1+\sqrt{10}}{3}x}$$

（解Ⅱ）（点と直線の距離の公式を使って）

$y=mx$ 上の点 $(x,\ y)$ と2つの直線 $y=x$，$y=2x$ との距離は等しいので



$\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{5}\,|x-y|=\sqrt{2}\,|2x-y|$

$\Longleftrightarrow \sqrt{5}\,(x-y)=\pm\sqrt{2}\,(2x-y)$

$\Longleftrightarrow (\sqrt{5}\pm\sqrt{2})y=(\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2})x$

$\Longleftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}\pm\sqrt{2}}x$ （複号同順）

$m>0$ より，$y=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}x$

$\therefore\ \ y=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}x$

59

(1) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\boldsymbol{2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) $0\leqq x<2\pi$ より,

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6} \quad\cdots\cdots①$$

(1)より $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geqq 1$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geqq\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots②$$

①, ②より $\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$

∴ $\boldsymbol{0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi}$

60

(1) $y=\cos^2 x-2\sin x\cos x+3\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin 2x+3(1-\cos^2 x)$

$=3-2\cos^2 x-\sin 2x$

$=-(2\cos^2 x-1)-\sin 2x+2$

$\boldsymbol{=-\cos 2x-\sin 2x+2}$

(2) $\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

より,

① $\Longleftrightarrow y=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$

$0\leqq x\leqq\pi$ より, $\frac{\pi}{4}\leqq 2x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{9\pi}{4}$ だから

$$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

∴ $-\sqrt{2}\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow -\sqrt{2}+2\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$

$\leqq\sqrt{2}+2$

よって, $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ すなわち

$\boldsymbol{x=\frac{5\pi}{8}}$ **のとき, 最大値** $\boldsymbol{\sqrt{2}+2}$

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{8}}$ **のとき, 最小値** $\boldsymbol{-\sqrt{2}+2}$

61

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=t$ とおくと

$t^2=\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2$

∴ $\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=t^2-2$

よって, $y=2t+t^2-2=(t+1)^2-3$

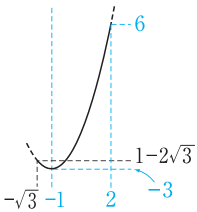
ここで, $t=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より, $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2\pi}{3}$ だから

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$$

∴ $-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2$

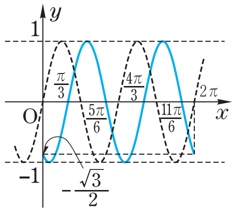


グラフより, **最大値 6, 最小値 −3**

62

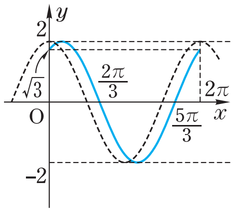
(1) $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは,

$y=\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので, 周期は $\frac{2\pi}{2}=\pi$. グラフは次ページ図.



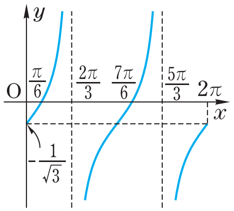
(2)　$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\cos x$ のグラフを，x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大し，それを x 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．



(3)　$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．

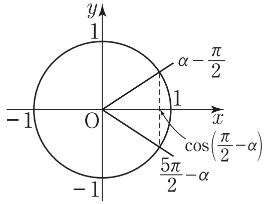


63

$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ より，

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\beta$

$\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ より，$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{\pi}{2}-\alpha\leqq0$



$0\leqq2\beta\leqq2\pi$ だから，

$2\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ または，$\frac{5\pi}{2}-\alpha$

$\therefore\quad \beta=\boldsymbol{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}$

64

(1)　$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=27-3\cdot3=\mathbf{18}$

(2)　(ア)　4^x+4^{-x}

$=(2^x-2^{-x})^2+2\cdot2^x\cdot2^{-x}=1+2=\mathbf{3}$

(イ)　$(2^x+2^{-x})^2$

$=4^x+4^{-x}+2\cdot2^x\cdot2^{-x}=3+2=5$

$2^x+2^{-x}>0$ だから　　$2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(ウ)　8^x-8^{-x}

$=(4^x+4^{-x})(2^x-2^{-x})+(2^x-2^{-x})$

$=3\cdot1+1=\mathbf{4}$

(3)　$x^2-1=\frac{1}{4}(a+a^{-1}+2)-1$

$=\frac{1}{4}(a+a^{-1}-2)=\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$\therefore\quad \sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}|a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}|$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) & (a>1)\\ \frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}) & (0<a<1)\end{cases}$

(i)　$a>1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=a^{\frac{1}{2}}$

(ii)　$0<a<1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})$

$=a^{-\frac{1}{2}}$

(i), (ii)より **$a>1$ のとき a,**
$0<a<1$ のとき a^{-1}

65

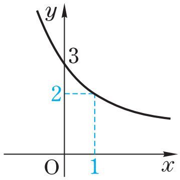
$y=2^{-x+1}+1$

$\Longleftrightarrow y-1=2^{-(x-1)}$

より，$y=2^{-x}$ のグラフを

x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの．

そのグラフは右図．



66

$2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$2^{2x+3}=2^3\cdot2^{2x}=8t^2$

より，与えられた方程式は，

$8t^2+7t-1=0 \Longleftrightarrow (8t-1)(t+1)=0$

$t>0$ だから，$t=2^x=\frac{1}{8}$

$\therefore\quad x=-3$

67

$2^x=X,\ 3^y=Y\quad(X>0,\ Y>0)$

とおくと，与えられた連立方程式は

$\begin{cases}X+Y=17\\XY=72\end{cases}$

よって，X，Y を解にもつ 2 次方程式は

(⇨21)

$t^2-17t+72=0$

すなわち，$(t-8)(t-9)=0$

$\therefore\quad t=8,\ 9$

$2^x<3^y$ より $\begin{cases}2^x=8\\3^y=9\end{cases}$ $\quad\therefore\quad \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

68

(1) $3^4<3^{x(x-3)}$，底$=3\quad(>1)$

だから

$4<x(x-3) \Longleftrightarrow x^2-3x-4>0$

$\Longleftrightarrow (x-4)(x+1)>0$

$\therefore\quad \boldsymbol{x<-1,\ 4<x}$

(2) $2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$4^x=(2^x)^2=t^2$，$2^{x+1}=2t$，$2^{x+3}=8t$ より，

与式 $\Longleftrightarrow t^2-2t+16<8t$

$\Longleftrightarrow t^2-10t+16<0$

$\Longleftrightarrow (t-2)(t-8)<0$

$t>0$ だから

$2<t<8 \Longleftrightarrow 2^1<2^x<2^3$

底$=2\quad(>1)$ より $\quad\boldsymbol{1<x<3}$

69

(1) $(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)(\log_{10}4)$
$\qquad+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2)^2+2(\log_{10}5)(\log_{10}2)+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^2$

$=\{\log_{10}(2\cdot5)\}^2=(\log_{10}10)^2=\boldsymbol{1}$

(2) $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

よって，与式$=\log_2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

70

(1) $\log_3 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\frac{1}{\log_2 3}+1$,

$\log_2 6=\log_2 3+1$，$\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$

より，

与式$=\left(\frac{1}{\log_2 3}+1-1\right)(\log_2 3+1)$

$\qquad-\log_2 3-\frac{1}{\log_2 3}$

$=1+\frac{1}{\log_2 3}-\log_2 3-\frac{1}{\log_2 3}$

$=\boldsymbol{1-\log_2 3}$

(2) $B=\frac{\log_2 6}{\log_2 72}=\frac{\log_2 3+\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 8}$

$=\frac{\log_2 3+1}{2\log_2 3+3}=\boldsymbol{\frac{A+1}{2A+3}}$

$$C=\frac{\log_2 12}{\log_2 144}=\frac{\log_2 3+\log_2 4}{\log_2 9+\log_2 16}$$
$$=\frac{\log_2 3+2}{2\log_2 3+4}=\frac{A+2}{2A+4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

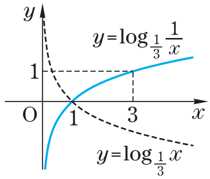
71

(1)　$y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}$

$=\log_{\frac{1}{3}}x^{-1}$

$=-\log_{\frac{1}{3}}x$

より　$y=\log_{\frac{1}{3}}x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したもの．上図．



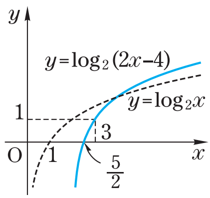
(2)　$y=\log_2(2x-4)$

$=\log_2 2(x-2)$

$=\log_2 2+\log_2(x-2)$

$=1+\log_2(x-2)$

より，$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの．右図．



72

(1)　真数条件，底条件より，

$5x^2-6>0$，$x>0$，$x\neq 1$

$\therefore\quad \frac{\sqrt{30}}{5}<x$　……①

与式 $\Longleftrightarrow \log_x(5x^2-6)=\log_x x^4$

$\therefore\quad 5x^2-6=x^4$

$\Longleftrightarrow (x^2-2)(x^2-3)=0$

$\Longleftrightarrow x^2=2,\ 3$

①より，$x=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2)　真数条件，底条件より，

$x>0$，$x\neq 1$　……①

与式 $\Longleftrightarrow \log_2 x+2\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 x}-3=0$

$\Longleftrightarrow \log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}-3=0$

より　$\log_2 x=t$ とおくと，

$t^2-3t+2=0 \Longleftrightarrow (t-1)(t-2)=0$

$\therefore\quad \log_2 x=1,\ 2 \Longleftrightarrow x=\mathbf{2,\ 4}$

（これは①をみたす）

73

$\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$，

$\log_4 y=\frac{\log_2 y}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 y$ だから

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと

与えられた連立方程式は $\begin{cases}X+Y=3\\XY=2\end{cases}$

よって，X，Y を解にもつ 2 次方程式は

$t^2-3t+2=0$

すなわち，$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\quad t=1,\ 2$

よって，$\begin{cases}X=1\\Y=2\end{cases}$ または $\begin{cases}X=2\\Y=1\end{cases}$

すなわち，

$\begin{cases}\log_2 x=1\\\log_2 y=2\end{cases}$ または $\begin{cases}\log_2 x=2\\\log_2 y=1\end{cases}$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x=2}\\\boldsymbol{y=4}\end{cases}$ **または** $\begin{cases}\boldsymbol{x=4}\\\boldsymbol{y=2}\end{cases}$

74

(1)　$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x$，

$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 x$

よって，与えられた不等式は

$12\times\frac{1}{4}(\log_2 x)^2-\frac{7}{2}\log_2 x-10>0$

$\therefore\quad 6(\log_2 x)^2-7\log_2 x-20>0$

$\log_2 x=t$ とおくと，

$6t^2-7t-20>0$，

$(3t+4)(2t-5)>0$

$\therefore\quad t<-\frac{4}{3},\ \frac{5}{2}<t$

ゆえに，$\log_2 x<-\frac{4}{3}$，$\frac{5}{2}<\log_2 x$

$\Longleftrightarrow \log_2 x<\log_2 2^{-\frac{4}{3}}$，$\log_2 2^{\frac{5}{2}}<\log_2 x$

底$=2$　(>1)　より

$x<2^{-\frac{4}{3}}$，$2^{\frac{5}{2}}<x$

x は自然数だから，$x \geqq 1$

$\therefore \quad x > \sqrt{32}$

$5 < \sqrt{32} < 6$ より，求める x は，**6**

(2) 真数条件より，$x>0$

与式 $\Longleftrightarrow 2^0 < 2^{-2\log_{\frac{1}{2}} x} < 2^4$，

底$=2$ (>1) より，$0 < -2\log_{\frac{1}{2}} x < 4$

$\therefore \quad -2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 0$

$\Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 1$

底$=\frac{1}{2}$ (<1) より　$1 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

$\therefore$ **$1<x<4$**（これは $x>0$ をみたす）

75

$\log_{10} 18^{20} = 20(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)$

$= 20 \times (0.3010 + 2 \times 0.4771) = 25.104$

$\therefore \quad 25 < \log_{10} 18^{20} < 26$

より，18^{20} は **26 桁の整数.**

$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{30} = -30(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$

$= -30 \times (0.3010 + 0.4771) = -23.343$

$\therefore \quad -24 < \log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{30} < -23$

より，$\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ は**小数第 24 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

76

(1) $2^{10}=1024$，$3^6=729$，$3^7=2187$

より，$3^6 < 2^{10} < 3^7$　　よって，**$l=6$**

(2) $10A = 10\log_3 2 = \log_3 2^{10}$

ここで，(1)より，$3^6 < 2^{10} < 3^7$ だから

$\log_3 3^6 < \log_3 2^{10} < \log_3 3^7$

$\Longleftrightarrow 6 < 10A < 7$

よって，$10A$ の一の位の数字は **6**

(3) (2)より，$0.6 < A < 0.7$

よって，Aの小数第 1 位の数字は **6**

77

(A) (1) $7^{8x} + 2401^{-2x}$

$= (49^x)^4 + (49^{-x})^4$

であり，

$49^{2x} + 49^{-2x} = (49^x + 49^{-x})^2 - 2 = a^2 - 2$

より

与式$=(49^{2x} + 49^{-2x})^2 - 2$

$= (a^2-2)^2 - 2 = \boldsymbol{a^4 - 4a^2 + 2}$

(2) $49^{2x} > 0$，$49^{-2x} > 0$ だから，

相加平均≧相乗平均 より

$a^2 = 49^{2x} + 49^{-2x} + 2$

$\geqq 2\sqrt{49^{2x} \cdot 49^{-2x}} + 2 = 2 + 2 = 4$

$\therefore \quad a^2 \geqq 4$（等号は，$x=0$ のとき成立）

そこで，$y = a^4 - 4a^2 + 2$ とおくと，

$y = (a^2-2)^2 - 2$

よって，$a^2=4$ のとき，すなわち

$x=0$ のとき**最小値 2**

(B) (1) $1 \leqq x \leqq 81$，底$=3$ (>1) より，

$\log_3 1 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 81$

$\Longleftrightarrow 0 \leqq \log_3 x \leqq 4$　　$\therefore$ **$0 \leqq t \leqq 4$**

(2) $f(x) = (\log_3 x)(\log_3 x - \log_3 9)$

$= (\log_3 x)(\log_3 x - 2)$

より，$y = t(t-2)$ とおくと，

$y = (t-1)^2 - 1$

(1)より，$t=4$ すなわち $x=81$ のとき

最大値 8

78

$a^{10} = (2^{\frac{4}{5}})^{10} = 2^8 = 256$，

$b^{10} = (3^{\frac{1}{2}})^{10} = 3^5 = 243$

$\therefore \quad b^{10} < a^{10}$　すなわち，$b < a$　……①

次に，$b^6 = (3^{\frac{1}{2}})^6 = 3^3 = 27$，

$c^6 = (4^{\frac{1}{3}})^6 = 4^2 = 16$

$\therefore \quad c^6 < b^6$　すなわち，$c < b$　……②

①，②より，a，b，c を小さい順に並べると，**c，b，a**

79

$\frac{3}{2}\log_3 2 = \frac{1}{2}\log_3 2^3 = \frac{1}{2} \times \log_3 8$

ここで，$\log_3 8 < \log_3 9 = 2$ だから，

$\frac{3}{2}\log_3 2 < 1$

また，

$2^{-0.3}\times 3^{0.2}=2^{-\frac{3}{10}}\times 3^{\frac{2}{10}}$

$=(2^{-3}\times 3^2)^{\frac{1}{10}}=\left(\dfrac{9}{8}\right)^{\frac{1}{10}}>1$

よって，小さい順に

$\dfrac{3}{2}\log_3 2$，1，$2^{-0.3}\times 3^{0.2}$

80

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\mathbf{1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-a+1)}{x(x-a)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{x-a+1}{x}=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$

81

$x\to 1$ のとき，分母 $\to 0$

だから，極限値が存在するためには，

$x\to 1$ のとき，分子 $\to 0$

よって $-a-b-1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

このとき，

$x^2-(a+b)x-2=x^2+x-2$

$=(x+2)(x-1)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+a)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+a}=\frac{3}{a+1}=-\frac{1}{3}$

よって，$a=\mathbf{-10}$，$b=\mathbf{9}$

逆に，このとき，

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-11x+10}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-10}=-\frac{1}{3}$

となり，確かに適する．

82

(1) $y'=(x^3)'-(2x^2)'+(4x)'-(2)'$

$=\boldsymbol{3x^2-4x+4}$

(2) $y'=4\cdot 3(3x+2)^3=\boldsymbol{12(3x+2)^3}$

83

$f'(x)=3x^2+2ax+b$　だから

$f'(1)=3+2a+b=2$

$\therefore\ 2a+b=-1$　……①

$f'(2)=12+4a+b=11$

$\therefore\ 4a+b=-1$　……②

①，②より，$a=\mathbf{0}$，$b=\mathbf{-1}$

84

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_3)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{a(x_2{}^2-x_1{}^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=2ax_3+b$

$\Longleftrightarrow a(x_2+x_1)+b=2ax_3+b$

$(\because\ x_1\neq x_2)$

$\therefore\ x_3=\boldsymbol{\dfrac{x_1+x_2}{2}}$

85

$f'(x)=2x-4$，$f(1)=2$，$f'(1)=-2$

より点 $(1,\ 2)$ における接線は

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x+4$　……①

$f(3)=2$，$f'(3)=2$ より点 $(3,\ 2)$ における接線は

$y-2=2(x-3)$

$\therefore\ y=2x-4$　……②

①，②を連立させて解くと，$x=2$，$y=0$

よって，求める交点は $(\mathbf{2},\ \mathbf{0})$

86

接点を $\mathrm{T}(t,\ t^2-4t+5)$ とおくと，

$f'(x)=2x-4$ より T における接線は

$y-(t^2-4t+5)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-4)x-t^2+5$

これが $(1,\ 0)$ を通るので，

$0=2t-4-t^2+5 \Longleftrightarrow t^2-2t-1=0$

$\therefore\ t=1\pm\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=2(\sqrt{2}-1)x-2\sqrt{2}+2}$，

$y=-2(\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}+2$

87

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと,
$f'(x)=2ax+b$ だから,与式に代入して
$(x-1)(2ax+b)=ax^2+bx+c+(x-1)^2$
$\Longleftrightarrow 2ax^2+(b-2a)x-b$
$=(a+1)x^2+(b-2)x+c+1$
これは,x についての恒等式だから,係数を比較して

$2a=a+1$ ……①
$b-2a=b-2$ ……②
$-b=c+1$ ……③

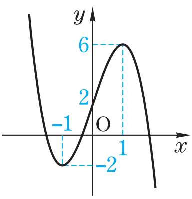
①より $a=1$.また,$f'(1)=-1$ より,
$f'(1)=2+b=-1$ $\quad\therefore\ b=-3$
③より $c=2$
$\therefore\ f(x)=\boldsymbol{x^2-3x+2}$

88

$f(x)=-2x^3+6x+2$ より
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	6	↘

よって,**極大値 6**
($x=1$ のとき)
極小値 -2
($x=-1$ のとき)
また,グラフは右図.



89

P の x 座標を t とおくと
$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$

$$\therefore\ \begin{cases} t^2+2=-t^2+at \\ 2t=-2t+a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2t^2-at+2=0 & \cdots\cdots① \\ 4t=a & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①,②より,$t^2=1$ $\quad\therefore\ t=\pm 1$
$t=1$ のとき,$a=4$,
$t=-1$ のとき,$a=-4$

よって,$a=4$ のとき,**P(1, 3)**
$a=-4$ のとき,**P(−1, 3)**

90

$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ より,
$f'(x)=3x^2+6ax+3b$
$x=2,\ 3$ で極値をとるので,
$f'(2)=0,\ f'(3)=0$

$$\therefore\ \begin{cases} 12+12a+3b=0 & \cdots\cdots① \\ 27+18a+3b=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①,②より,$a=\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$,$b=\boldsymbol{6}$
このとき,$f'(x)=3(x-2)(x-3)$ となり,確かに適する.

$f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+18x$ より,

$f(2)=14,\ f(3)=\dfrac{27}{2}$

よって,**極大値 14**,**極小値 $\dfrac{27}{2}$**

91

(1) $f(x)=x^3-3ax^2+3x-1$ より
$f'(x)=3x^2-6ax+3=3(x^2-2ax+1)$
よって,$f(x)$ が極値をもつとき,
$x^2-2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよい.判別式を D とすると
$\dfrac{D}{4}=a^2-1=(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ \boldsymbol{a<-1,\ 1<a}$

(2) $x=2$ で極小となるので,
$f'(2)=0 \Longleftrightarrow 4-4a+1=0$
$\therefore\ a=\dfrac{5}{4}$

このとき $f(x)=x^3-\dfrac{15}{4}x^2+3x-1$
より,
$f'(x)=\dfrac{3}{2}(2x-1)(x-2)$ となり
$x=2$ で極小,$x=\dfrac{1}{2}$ で極大.

$f(2)=-2,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{16}$ より，

$a=\dfrac{5}{4}$，**極小値 -2，極大値 $-\dfrac{5}{16}$**

92

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$$

より

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

よって，$-1\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$ の増減は表のようになる．

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	50

よって，$-1\leqq x\leqq 4$ において

最大値 50　($x=4$ のとき)，

最小値 -4 ($x=1$ のとき)

93

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h$$

$$=\frac{\pi}{3}r^2(a-r)$$

$$=\frac{\pi}{3}ar^2-\frac{\pi}{3}r^3$$

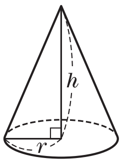
$$V'=\frac{2}{3}\pi ar-\pi r^2=\pi r\left(\frac{2}{3}a-r\right)$$

ここで，$h=a-r>0$ より

$$0<r<a$$

よって，増減は表のようになる．

r	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	a
V'	0	$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	最大	$\searrow$	



よって，$r=\dfrac{2}{3}a$ のとき

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\pi}{81}a^3}$

94

$$x^3-4x+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

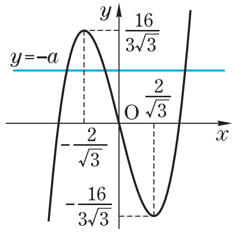
$$\Longleftrightarrow x^3-4x=-a$$

より $\begin{cases} y=x^3-4x & \cdots\cdots② \\ y=-a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

のグラフで考える．②の右辺を $f(x)$ とおく．

$f'(x)=3x^2-4=(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$

より②のグラフは次図のようになる．



①の解がすべて実数となるには，②と③のグラフが接するときも含めて 3 点で交わればよいので　$-\dfrac{16}{3\sqrt{3}}\leqq -a\leqq\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{-\frac{16\sqrt{3}}{9}\leqq a\leqq\frac{16\sqrt{3}}{9}}$$

95

(1)　$y'=3x^2-6$ より，$\mathrm{T}(t,\ t^3-6t)$ における接線は

$$y-(t^3-6t)=(3t^2-6)(x-t)$$

$\therefore$　$\boldsymbol{y=(3t^2-6)x-2t^3}$

(2)　(1)で求めた接線は $\mathrm{A}(2,\ p)$ を通るので　$p=6t^2-12-2t^3$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{p=-2t^3+6t^2-12} \quad \cdots\cdots①$$

(3)　点Aから 3 本の接線が引けるので，①は異なる 3 つの実数解をもつ．

①より，$2t^3-6t^2+12+p=0$ だから，

$f(t)=2t^3-6t^2+12+p$ とおくとき，

$f(t)$ は極大値，極小値をもち，

(極大値)×(極小値)<0

が成りたつ．

$$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$$

より $f(0)f(2)<0$ であればよいので，

$(12+p)(4+p)<0$

$\therefore\ \ \boldsymbol{-12<p<-4}$

96

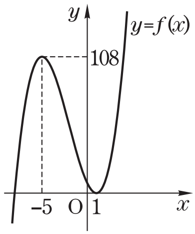
$f(x)=(x+2)^3-27x$ とおくと

$f'(x)=3(x+2)^2-27=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$ より，$x=-5,\ 1$

よって，増減は表のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗



よって，$x=1$ で

最小値 0

$\therefore\ \ f(x)\geqq 0$

すなわち，

$(x+2)^3\geqq 27x$

$(x>0$ のとき$)$

97

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6ax+a$$

とおくと

$f'(x)=3x^2-3(a+2)x+6a$

$\quad=3(x-2)(x-a)$

$0<a<2$ だから，$x\geqq 0$ において増減は表のようになる．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	a	↗		↘	$7a-4$	↗

最小値$\geqq 0$ であればよいので，$a>0$ より $7a-4\geqq 0$ $\qquad\therefore\ \ \boldsymbol{\frac{4}{7}\leqq a<2}$

98

(1) $\displaystyle\int(x^2-x+3)\,dx$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+C}$

(2) $\displaystyle\int(x+2)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x+2)^3+C}$

(3) $\displaystyle\int(3x-1)^2\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x-1)^3+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-1)^3+C}$

（Cはいずれも積分定数）

99

$f'(x)=3x^2-2x+1$ より，

$f(x)=x^3-x^2+x+C$ （C：積分定数）

$f(-1)=3$ より，$-1-1-1+C=3$

$\therefore\ \ C=6$

よって，$f(x)=\boldsymbol{x^3-x^2+x+6}$

100

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2-x+2)\,dx$

$\displaystyle=\left[2x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}$

$\displaystyle=\left(2-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-2-\frac{1}{2}-2\right)=\boldsymbol{8}$

注 実際には

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2-x+2)\,dx=2\int_{0}^{1}(6x^2+2)\,dx$

$\displaystyle=2\left[2x^3+2x\right]_0^1=2(2+2)=8$

を計算するのと同じ結果である．

(2) $\displaystyle\int_0^2(x-3)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^2$

$\displaystyle=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{27}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{3}}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x-1)(x+2)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}\{(x+2)-3\}(x+2)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}\{(x+2)^2-3(x+2)\}\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{(x+2)^3}{3}-\frac{3}{2}(x+2)^2\right]_{-2}^{3}$

$\displaystyle=\frac{125}{3}-\frac{75}{2}=\boldsymbol{\frac{25}{6}}$

(4) $\alpha=1-\sqrt{2}$，$\beta=1+\sqrt{2}$ とおくと，

α，β は $x^2-2x-1=0$ の解より

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
（∵　100(2)）
$$=-\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3$$
$$=-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

101

(1)　$|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$
$$=\begin{cases} x^2+x-2 & (1\leqq x\leqq 2) \\ -(x^2+x-2) & (-2\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$
∴　$\displaystyle\int_{-2}^{2}|x^2+x-2|\,dx$
$$=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}$$
$$=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}}$$

(2)　(i)　**$0<a\leqq 1$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|$
$$=\begin{cases} (x-a)(x-1) & (-1\leqq x\leqq a) \\ -(x-a)(x-1) & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$
∴　$\displaystyle\int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$
$$=\int_{-1}^{a}(x-a)(x-1)\,dx-\int_{a}^{1}(x-a)(x-1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{a}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx-\int_{a}^{1}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{-1}^{a}-\left[\frac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{1}$$
$$=\frac{(a+1)^3}{3}-\frac{(a-1)(a+1)^2}{2}-\left\{-\frac{(a-1)^3}{3}+\frac{(a-1)^3}{2}\right\}$$
$$=\frac{\mathbf{-a^3+3a^2+3a+3}}{\mathbf{3}}$$

(ii)　**$1<a$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|=(x-a)(x-1)$

$(-1\leqq x\leqq 1)$ より

∴　$\displaystyle\int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$
$$=\int_{-1}^{1}\{x^2-(a+1)x+a\}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+a)\,dx$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+a\right)$$
$$=\mathbf{2a+\frac{2}{3}}$$

102

(1)　$x=a$ を両辺に代入すると，

$0=a^2-2a-3\Longleftrightarrow(a-3)(a+1)=0$

$a>0$ より，$a=\mathbf{3}$

また，両辺を x で微分して，

$f(x)=\mathbf{2x-2}$

(2)　$f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}(t^2-3t-4)\,dt$　……①

①の両辺を x で微分すると，

$f'(x)=x^2-3x-4$

∴　$f(x)=\displaystyle\int(x^2-3x-4)\,dx$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+C$$
とおける．ここで，①の両辺に $x=1$ を代入すると，$f(1)=0$

∴　$f(1)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}-4+C$
$$=C-\frac{31}{6}=0$$
∴　$C=\dfrac{31}{6}$

よって，$f(x)=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{31}{6}}$

103

$\int_0^3 f(t)\,dt=a$　（a：定数）とおくと，

$f(x)=2x^2+ax-5$

∴　$a=\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3 (2t^2+at-5)\,dt$

$=3+\frac{9}{2}a$

よって，$a=-\frac{6}{7}$

∴　$f(x)=\boldsymbol{2x^2-\frac{6}{7}x-5}$

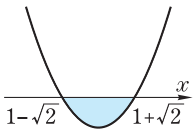
104

$y=0$ より，

$x^2-2x-1=0$

∴　$x=1\pm\sqrt{2}$

よって S は右図の色の部分．



∴　$S=-\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx$

$=\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$

105

(1)　$x^2=x+2 \iff x^2-x-2=0$

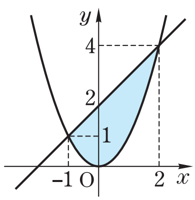
$\iff (x-2)(x+1)=0$

∴　$x=2,\ -1$

よって求める交点は，

$\boldsymbol{(2,\ 4),\ (-1,\ 1)}$

(2)　(1)より，求める面積 S は右図の色の部分．



∴　$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}\,dx$

$=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

106

(1)　$2x^2-3x-5=|x^2-x-2|$

とすると，右辺$\geqq 0$ だから

$2x^2-3x-5\geqq 0 \iff (2x-5)(x+1)\geqq 0$

∴　$x\leqq -1,\ \frac{5}{2}\leqq x$

∴　$x^2-x-2=\pm(2x^2-3x-5)$

$\iff \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ 3x^2-4x-7=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 \\ (3x-7)(x+1)=0 \end{cases}$

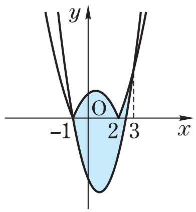
∴　$x=\boldsymbol{-1,\ 3}$

よって，交点は $(-1,\ 0)$，$(3,\ 4)$

(2)　$|x^2-x-2|$

$=\begin{cases} -(x^2-x-2) \\ \quad (-1\leqq x\leqq 2) \\ x^2-x-2 \\ \quad (2\leqq x\leqq 3) \end{cases}$

よって，求める面積 S は右図の色の部分．



∴　$S=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)-(2x^2-3x-5)\}\,dx$

$+\int_{2}^{3}\{(x^2-x-2)-(2x^2-3x-5)\}\,dx$

$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(3x-7)\,dx$

$-\int_{2}^{3}(x-3)(x+1)\,dx$

$=-\int_{-1}^{2}\{3(x+1)^2-10(x+1)\}\,dx$

$-\int_{2}^{3}\{(x-3)^2+4(x-3)\}\,dx$

$=-\Big[(x+1)^3-5(x+1)^2\Big]_{-1}^{2}$

$-\left[\frac{(x-3)^3}{3}+2(x-3)^2\right]_{2}^{3}$

$=-(27-45)-\left(\frac{1}{3}-2\right)=\boldsymbol{\frac{59}{3}}$

107

(1)　$4-x^2=a-x$

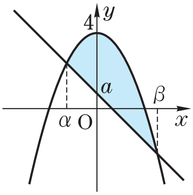
$\Longleftrightarrow x^2-x+a-4=0$ 　　……③

③の判別式を D とすると，

$D=1-4(a-4)=17-4a>0$

$\therefore\ \ \boldsymbol{a<\dfrac{17}{4}}$

(2)　右図の色の部分が面積 S を表すので，③の 2 解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると



$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\{(4-x^2)-(a-x)\}dx$

$=-\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ \ (\beta-\alpha)^3=8$

$\therefore\ \ (\beta-\alpha)^2=D=4$

$\Longleftrightarrow 17-4a=4$

$\therefore\ \ \boldsymbol{a=\dfrac{13}{4}}$

108

(1)　①上の点 $(t,\ t^2-6t+4)$ における接線は，$y'=2x-6$ より

$y-(t^2-6t+4)=(2t-6)(x-t)$

$\therefore\ \ y=2(t-3)x-t^2+4$

これが原点を通るので，

$0=-t^2+4$

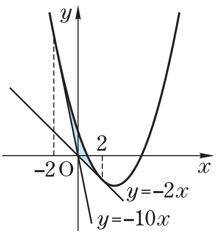
$\therefore\ \ t=\pm2$

求める接線は，

$\boldsymbol{y=-2x}$，

$\boldsymbol{y=-10x}$

(2)　右図の色の部分が求める面積 S で，



$S=\displaystyle\int_{-2}^{0}\{(x^2-6x+4)-(-10x)\}dx$

$+\displaystyle\int_{0}^{2}\{(x^2-6x+4)-(-2x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$

$=\left[\dfrac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\dfrac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}$

$=\dfrac{8}{3}+\dfrac{8}{3}=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}}$

109

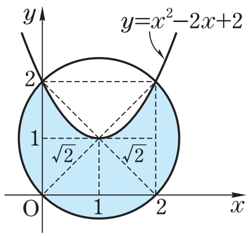
(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ より，

$f'(x)=2x+a$

$f(1)=1,\ f'(1)=0$ より，

$\begin{cases}1+a+b=1\\2+a=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=\boldsymbol{-2}\\b=\boldsymbol{2}\end{cases}$

(2)　円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$



$S=\displaystyle\int_{0}^{2}(x^2-2x+2)dx$

$+3\left\{\dfrac{\pi}{4}\times(\sqrt{2}\,)^2-\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1\right\}$

$=\left[\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^2+3\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{1}{3}}$

110

(1)　$a+7d=22$ 　　……①

$a+19d=-14$ 　　……②

①，②より，$d=\boldsymbol{-3}$，$a=\boldsymbol{43}$

(2)　$a_n=43-3(n-1)=\boldsymbol{46-3n}$

$a_n>0$ より，$n<\dfrac{46}{3}$

n は自然数だから，

$\boldsymbol{1\leqq n\leqq 15}$

111

(1) $a+4d=84$ ……①

$a+19d=-51$ ……②

①，②より，$\boldsymbol{d=-9}$，$\boldsymbol{a=120}$

(2) $a_n=120-9(n-1)=129-9n$

$$S_n=\frac{n}{2}(120+129-9n)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(249-9n)}{2}}$$

(3) $a_n>0 \Longleftrightarrow n<\dfrac{129}{9}$

よって，a_1～a_{14} までは正で，a_{15} 以後はすべて負だから，

$\boldsymbol{n=14}$ のとき，S_n が最大で，最大値は，

$$S_{14}=\frac{14(249-9\times14)}{2}=\boldsymbol{861}$$

112

(1) $a_3=125\div5=25$，

$a_5=504\div9=56$

であるから，初項を a，公差を d とすると

$a+2d=25$ ……①

$a+4d=56$ ……②

①，②より，$d=\boldsymbol{\dfrac{31}{2}}$，$a=\boldsymbol{-6}$

(2) $a_n=-6+\dfrac{31}{2}(n-1)=\dfrac{31}{2}n-\dfrac{43}{2}$

であるから $a_{10}=\dfrac{267}{2}$，$a_{20}=\dfrac{577}{2}$ より，

$$a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}=\frac{11}{2}(a_{10}+a_{20})=\boldsymbol{2321}$$

113

2 でわると 1 余り，3 でわると 2 余る自然数は，6 でわると 1 不足する自然数だから，小さい順に，5，11，17，… と並んでおり，これは等差数列を表すので，一般項は

$5+6(n-1)=6n-1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

$6n-1\leqq100$ より，$n\leqq16$

よって，**初項 5，公差 6，項数 16** である．

114

(1) $ar=4$ ……①

$ar^5=64$ ……②

となり，②÷① より $r^2=4$

$\therefore\ \ r=\pm2$，$a=\pm2$（**複号同順**）

(2) $\boldsymbol{r=2}$ **のとき，**

$$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$$

$\boldsymbol{r=-2}$ **のとき，**

$$S_n=\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{(-2)^{n+1}+2}{3}}$$

115

$a(1+r+r^2)=80$ ……①

$a(r^3+r^4+r^5)=640$ ……②

②÷① より $r^3=8$

$\therefore\ \ \boldsymbol{r=2}$

116

$\alpha<0$，$\beta>0$，$\alpha\beta<0$ より，3 数が等比数列をなすとき，β が等比中項であるから

$\beta^2=\alpha^2\beta$

$\therefore\ \ \beta=\alpha^2$ ……①（$\because\ \ \beta\neq0$）

また，等差数列をなすとき，等差中項は $\alpha\beta$ または α

$\therefore\ \ 2\alpha\beta=\alpha+\beta$ ……②

または $2\alpha=\alpha\beta+\beta$ ……③

①，②より $(\alpha,\ \beta)=\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}}\right)$

①，③より $(\alpha,\ \beta)=(\boldsymbol{-2,\ 4})$

117

与えられた数列の一般項は，

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\boldsymbol{n^2}$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

118

与えられた数列の一般項は，

$$1+(-3)+(-3)^2+\cdots+(-3)^{n-1}$$
$$=\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=\frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{1-(-3)^k\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}(-3)^k\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left[n-\frac{(-3)\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}\right]$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{16}\{4n+3+(-3)^{n+1}\}}$$

119

与えられた数列の一般項は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$

120

(1)　$S=1\cdot2^1+3\cdot2^2+5\cdot2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$

$2S=1\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(2n-3)\cdot2^n+(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$\therefore$　$S-2S$

$$=2+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^n-(2n-1)\cdot2^{n+1}$$
$$=2(2^{n+1}-1)-4-(2n-1)\cdot2^{n+1}$$
$$=-6-(2n-3)\cdot2^{n+1}$$

$\therefore$　$S=\boldsymbol{(2n-3)\cdot2^{n+1}+6}$

(2)　$T=1\cdot2^1+2\cdot2^3+3\cdot2^5+\cdots+n\cdot2^{2n-1}$

$2^2T=1\cdot2^3+2\cdot2^5+\cdots+(n-1)\cdot2^{2n-1}+n\cdot2^{2n+1}$

$\therefore$　$T-2^2T$

$$=2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}-n\cdot2^{2n+1}$$
$$=\frac{2(1-4^n)}{1-4}-n\cdot2^{2n+1}$$
$$=-\frac{2}{3}-\left(n-\frac{1}{3}\right)\cdot2^{2n+1}$$

$\therefore$　$T=\boldsymbol{\frac{2}{9}+\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot2^{2n+1}}$

121

(1)　与えられた数列の階差数列をとると，

1，4，7，10，…

となり，初項 1，公差 3 の等差数列である．

よって，求める数列の一般項は，$n\geqq2$ のとき

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+\frac{(n-1)(1+3n-5)}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3n^2-7n+6}{2}}$$

これは $n=1$ のときも成立．

次に初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2-7k+6}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{4}n(n+1)+3n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2-2n+3)}$$

(2)　与えられた数列の階差数列をとると，

1，3，9，27，…

となり，初項 1，公比 3 の等比数列である．

よって，求める数列の一般項は，$n\geqq2$ のとき

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1-3^{n-1}}{1-3}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}}{2}+\frac{1}{2}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．次に初

項から第 n 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^{k-1}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot 3^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-3^n)}{1-3}+\frac{1}{2}n=\boldsymbol{\frac{3^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n}$$

122

$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ より，$\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 2^{n-1}

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{n-1}}$

123

与えられた漸化式は，$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$ と変形できるので，

$$a_n+3=2^{n-1}(a_1+3)=2^{n+1}$$

よって，$a_n=\boldsymbol{2^{n+1}-3}$

124

(1)　$a_n=b_n-\alpha n-\beta$,

$a_{n+1}=b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta$

を代入すると

$b_{n+1}=3b_n-2(\alpha+3)n+\alpha-2\beta-5$

となり，これが等比数列の漸化式となるためには，

$\alpha+3=0$，$\alpha-2\beta-5=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{\alpha=-3,\ \beta=-4}$

(2)　$b_{n+1}=3b_n$ より，

$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}}$

(3)　$a_n=b_n+3n+4=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}+3n+4}$

125

(1)　与えられた漸化式の両辺を 3^{n+1} でわると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(2)　$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ より，

$\{b_n\}$ の階差数列の一般項は，$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\quad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{a_1}{3}+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=1+\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

(3)　$a_n=3^nb_n=3^n\left\{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}-2^n}$

126

(1)　与式 $\Longleftrightarrow a_{n+1}=1+\dfrac{1}{3-a_n}$　……①

また，$\dfrac{1}{a_n-2}=b_n$ より，$a_n=2+\dfrac{1}{b_n}$

よって，①に代入すると，

$$2+\frac{1}{b_{n+1}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{b_n}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n-1}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n-1}$

(2)　$b_{n+1}-b_n=-1$ より $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列である．

よって，$b_n=-1-(n-1)=\boldsymbol{-n}$

(3)　$\dfrac{1}{a_n-2}=-n$ より

$$a_n=2+\frac{1}{-n}=\boldsymbol{\frac{2n-1}{n}}$$

127

(1)　(i)　$T_n=S_n+\alpha n+\beta$ とおき，与式に代入すると

$T_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta-3\{T_n-\alpha n-\beta\}$
$=n+1$
$\Longleftrightarrow T_{n+1}-3T_n+(2\alpha-1)n-\alpha+2\beta-1$
$=0$
ここで $2\alpha-1=0$，$-\alpha+2\beta-1=0$ をみたす α，β を考えると，

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{3}{4}$$

そこで $T_n=S_n+\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$ と定めると

$$T_{n+1}=3T_n$$

$$\therefore\quad T_n=\left(S_1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{3}{4}\right)\cdot3^{n-1}$$

$$=\frac{9}{4}\cdot3^{n-1}$$

よって，

$$S_n=T_n-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$

(ii) $n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot3^n-\frac{1}{2}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

(2) (i) $n\geqq2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$$

であるから $na_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$
よって，$n\neq1$ だから

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}}\quad(n\geqq2)$$

(ii) $b_n=na_n$ とすると，(i)より

$$b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1=1\cdot a_1=1$$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

128

(1) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$
より $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$
与えられた漸化式と係数を比較して，

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$$

$\therefore$ $(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(1,\ 2),\ (2,\ 1)}$

(2) $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ として

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)2^{n-1}=2^{n-1}$$

$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=\boldsymbol{2^{n-1}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

129

(1) $a_{n+1}+pb_{n+1}$
$=(2a_n+3b_n)+p(a_n+4b_n)$
$=(2+p)a_n+(3+4p)b_n$ ……①
より，数列 $\{a_n+pb_n\}$ が等比数列になるためには，

$$1:p=(2+p):(3+4p)$$
$$p(2+p)=3+4p$$
$$p^2-2p-3=0$$
$$(p-3)(p+1)=0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{p=3,\ -1}$

(2) $p=3$ のとき，①は
$a_{n+1}+3b_{n+1}=5a_n+15b_n$
$\Longleftrightarrow a_{n+1}+3b_{n+1}=5(a_n+3b_n)$
ここで $c_n=a_n+3b_n$ とおくと，
$c_{n+1}=5c_n$
$c_1=a_1+3b_1=2+3\cdot1=5$ より
数列 $\{c_n\}$ は初項 5，公比 5 の等比数列である．
よって，$c_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$
$\Longleftrightarrow a_n+3b_n=5^n$ ……②
また，$p=-1$ のとき，①は
$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$
ここで，$d_n=a_n-b_n$ とおくと
$d_{n+1}=d_n$
$d_1=a_1-b_1=2-1=1$ より，数列 $\{d_n\}$ は初項 1，公比 1 の等比数列である．
よって，$d_n=1$
$\Longleftrightarrow a_n-b_n=1$ ……③

②－③ より　$b_n=\boldsymbol{\frac{5^n-1}{4}}$

③より　$a_n=1+b_n=\boldsymbol{\frac{5^n+3}{4}}$

130

(1)　第 $(n-1)$ 群の最後の数は，最初から数えて

$\{1+2+\cdots+(n-1)\}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 番目

よって，第 n 群の最初の数は，

$\dfrac{n(n-1)}{2}+1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)}$

(2)　第 n 群は，初項 $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$，公差 1，項数 n の等差数列だから，その和は，

$\dfrac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+(n-1)\cdot 1\}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n^2+1)}$

(3)　100 は第 n 群に含まれているとすると

$\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)\leqq 100$

$<\dfrac{1}{2}\{(n+1)^2-(n+1)+2\}$

これをみたす n は 14 であるから**第 14 群**にあり，最初の数は 92 であるから **9 番目**になる．

131

(1)　n が 2^{n-1} 個あるので，総和は

$n\times 2^{n-1}=\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}}$

(2)　100 項目が第 n 群にあるとすると，第 $(n-1)$ 群の最後の数は

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$

項目であるから

$2^{n-1}-1<100\leqq 2^n-1$ が成りたつ．

$n=7$ のとき

$2^{n-1}-1=2^6-1=63$

$2^n-1=2^7-1=127$

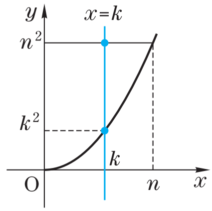
よって，求める n は 7 だから，第 100 項は第 7 群にあるので，**7** である．

(3)　(2)より第 100 項は，第 7 群の $100-63=37$ (番目) である．和は，

$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+5\cdot 2^4+6\cdot 2^5$
$+7\cdot 37=\mathbf{580}$

132

(1)　M 内の格子点のうち，直線 $x=k$ $(1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点は，



$(k,\ k^2)$，
$(k,\ k^2+1)$，
$\cdots$，$(k,\ n^2)$．

よって，$\boldsymbol{(n^2-k^2+1)}$ **個**ある．

(2)　求める格子点の個数は

$2\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)+(n^2+1)$　……①

ここで，$S=\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$ とおくと

$S=(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n(n^2+1)-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore$　①$=2n(n^2+1)$

$-\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+(n^2+1)$

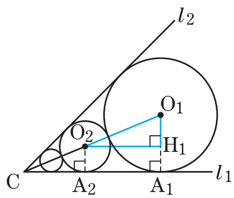
$=(2n+1)(n^2+1)-\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

$=\dfrac{1}{3}(2n+1)\{(3n^2+3)-(n^2+n)\}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(2n+1)(2n^2-n+3)}$

133

(1)



$O_1C=\sqrt{CA_1^2+O_1A_1^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

であり，図から，$\triangle CA_1O_1\backsim\triangle O_2H_1O_1$ より

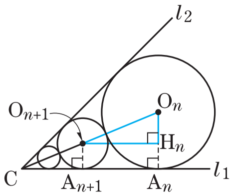
$\mathrm{CO_1 : O_1A_1 = O_2O_1 : O_1H_1}$

$\iff 13:5=(r_2+5):(5-r_2)$

$\iff 5(r_2+5)=13(5-r_2)$

$\therefore\ r_2=\mathbf{\dfrac{20}{9}}$

(2)



(1)と同様に，$\triangle \mathrm{CA_1O_1} \backsim \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{O}_n$

よって，$\mathrm{CO_1 : O_1A_1} = \mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_n : \mathrm{O}_n\mathrm{H}_n$

$\iff 13:5=(r_n+r_{n+1}):(r_n-r_{n+1})$

$\iff 5(r_n+r_{n+1})=13(r_n-r_{n+1})$

$\therefore\ \boldsymbol{r_{n+1}=\dfrac{4}{9}r_n}$

(3)　(2)より $\{r_n\}$ は，初項 5，公比 $\dfrac{4}{9}$ の等比数列．

$\therefore\ r_n=\mathbf{5\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}}$

134

(1)　(a_1 について)　カード 1 枚の色のぬり方は 3 通りなので　$a_1=\mathbf{3}$

(a_2 について)　カード 2 枚それぞれの色のぬり方は 3 通りなので，

$3^2=9$ (通り) のぬり方がある．

このうち，赤赤の 1 通りは条件に反する．

よって，$a_2=9-1=\mathbf{8}$

(2)　$(n+2)$ 枚のカードの色のぬり方を，1 枚目のカードの色で場合分けして考える．

① 　1 枚目が赤のとき，2 枚目のぬり方は青，黄の 2 通り．残り n 枚のぬり方は 3 色使えるので a_n 通り．

よって，ぬり方は $2a_n$ 通り．

② 　1 枚目が青のとき，残りの $(n+1)$ 枚のぬり方は，3 色使えるので a_{n+1} 通り．

③ 　1 枚目が黄のとき，②と同様に a_{n+1} 通り．

①，②，③は排反なので

$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n}$

(3)　$a_8=2a_7+2a_6=2(2a_6+2a_5)+2a_6$

$=6a_6+4a_5=6(2a_5+2a_4)+4a_5$

$=16a_5+12a_4=16(2a_4+2a_3)+12a_4$

$=44a_4+32a_3=44(2a_3+2a_2)+32a_3$

$=120a_3+88a_2=120(2a_2+2a_1)+88a_2$

$=328a_2+240a_1$

$=328\times8+240\times3=\mathbf{3344}$

135

(1)　(p_1 について)

1 回目に 4 以下の目が出ればよいので

$p_1=\dfrac{4}{6}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(p_2 について)

次の 2 つの場合が考えられる．

① 　1 回目が 4 以下の目で進み

2 回目が 5 以上の目でさらに 2 進む場合

② 　1 回目が 5 以上の目で 2 進み

2 回目が 4 以下の目でさらに 1 進む場合

①，②は排反だから

$p_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$

(2)　サイコロを $(n+1)$ 回投げたとき，点 P の座標が奇数になるのは，次の 2 つの場合が考えられる．

① 　サイコロを n 回投げたとき，点 P の座標が奇数で $(n+1)$ 回目に 5 以上の目が出る

② 　サイコロを n 回投げたとき，点 P の座標が偶数で $(n+1)$ 回目に 4 以下の目が出る

①，②は排反だから

$p_{n+1}=p_n\times\dfrac{1}{3}+(1-p_n)\times\dfrac{2}{3}$

$\therefore\quad \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}}$

(3) $p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}$ より

$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}}$

136

(1) $a_1=b$，$a_2=\frac{b^2}{b+1}$，$a_3=\frac{b^3}{b^2+b+1}$

より，$\boldsymbol{a_n=\frac{b^n(b-1)}{b^n-1}}$ と推定できる．

(2) $n=1$ のとき成立．

$n=k$ のとき，$a_k=\frac{b^k(b-1)}{b^k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{ba_k}{a_k+1}=\frac{b^{k+1}\cdot\frac{b-1}{b^k-1}}{\frac{b^k(b-1)}{b^k-1}+1}$$

$$=\frac{b^{k+1}(b-1)}{b^{k+1}-b^k+b^k-1}=\frac{b^{k+1}(b-1)}{b^{k+1}-1}$$

よって，$n=k+1$ でも成立．

$\therefore\quad a_n=\frac{b^n(b-1)}{b^n-1}$

137

(1) $n=1$ のとき，左辺$=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$，

右辺$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ となり成立．

$n=k$ のとき，与式が成立すると仮定すると，

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}\quad\cdots\cdots①$$

①の両辺に $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えて，

左辺$=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

右辺$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

となり，これは与式の n に $k+1$ を代入したものである．

よって，$n=k+1$ のときも成立するので，すべての自然数 n で成立．

(2) $n=1$ のとき，左辺$=\frac{1}{1^2}=1$，

右辺$=2-\frac{1}{1}=1$ となり成立．

$n=k$ のとき，与式が成立すると仮定すると，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq2-\frac{1}{k}\quad\cdots\cdots②$$

②の両辺に，$\frac{1}{(k+1)^2}$ を加えると，

左辺$=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

右辺$=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$

ここで，$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left(2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\right)$

$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$

$\therefore\quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}$

$\leqq2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

すなわち，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq2-\frac{1}{k+1}$$

となり $n=k+1$ のときも成立．

よって，すべての自然数 n に対して成立する．

138

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{2\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}$

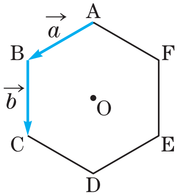
$=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(4) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

$=(\vec{b}-\vec{a})+\vec{b}$

$=\boldsymbol{2\vec{b}-\vec{a}}$



139

(1) AE＝3，DC＝AD＝2 だから，

DF：FE＝DC：AE＝**2：3**

（∵ △AFE∽△CFD）

(2) $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AD}}{3+2}$

$=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}}$

140

(1) BP：PE

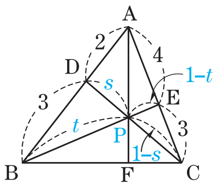
$=t:(1-t)$

とすると

$\overrightarrow{AP}$

$=(1-t)\overrightarrow{AB}$

$+t\overrightarrow{AE}$



$=(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}t\overrightarrow{AC}$ ……①

$\left(∵\ \overrightarrow{AE}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

DP：PC＝$s:(1-s)$ とすると，

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{2(1-s)}{5}\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ ……②

$\left(∵\ \overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$ だから，

①，②より

$1-t=\dfrac{2(1-s)}{5}$，$\dfrac{4}{7}t=s$

∴ $t=\dfrac{7}{9}$，$s=\dfrac{4}{9}$

よって，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}}$

(2) $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AP}$ とおけて，(1)より，

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$

F は BC 上より $\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$

∴ $k=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ となり，

BF：FC＝$\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{2:1}$

141

Bから辺 AC に下ろした垂線の足をHとすると，

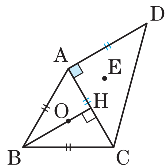
BH：AD

＝BH：AB

＝$\sqrt{3}:2$

であり，BH∥AD

より，



$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{BH}$

ここで，Oは △ABC の重心でもあるので，

BO：OH＝2：1

∴ $\overrightarrow{BH}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

∴ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\boldsymbol{\overrightarrow{OA}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}}$

∴ $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

$=\dfrac{1}{3}\{\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OA}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB})\}$

$(∵\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0})$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\dfrac{(1+\sqrt{3})}{3}\overrightarrow{OB}}$

142

(1) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

$=(5+4+9,\ 4-6-15)$

$=(\mathbf{18},\ \mathbf{-17})$

(2) $m\vec{a}+n\vec{b}$

$=(5m-2n,\ 4m+3n)=(3,\ -5)$

より，$\begin{cases} 5m-2n=3 \\ 4m+3n=-5 \end{cases}$

$\therefore\ m=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{23}},\ n=-\dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{23}}$

143

$\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ -\sqrt{5}+3)$,

$\vec{a}-\vec{b}=(2-x,\ -\sqrt{5}-3)$

$\therefore\ (2+x)(-\sqrt{5}-3)$

$-(-\sqrt{5}+3)(2-x)$

$=0$

$\Longleftrightarrow -12-2\sqrt{5}x=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{6}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\mathbf{6\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$

144

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(5,\ 3)$ ……①

$\vec{a}-3\vec{b}=(-7,\ 7)$ ……②

①×3＋② より，$4\vec{a}=(8,\ 16)$

$\therefore\ \vec{a}=(\mathbf{2},\ \mathbf{4})$

①より，

$\vec{b}=(5,\ 3)-\vec{a}=(\mathbf{3},\ \mathbf{-1})$

(2) $\vec{a}-2\vec{b}=(2-6,\ 4+2)=(-4,\ 6)$

より，

$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\mathbf{2\sqrt{13}}$

(3) $\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$=\left(-\dfrac{\mathbf{2\sqrt{13}}}{\mathbf{13}},\ \dfrac{\mathbf{3\sqrt{13}}}{\mathbf{13}}\right)$

145

$|\vec{u}|^2$

$=(2\cos\theta+3\sin\theta)^2+(\cos\theta+4\sin\theta)^2$

$=5\cos^2\theta+20\sin\theta\cos\theta+25\sin^2\theta$

$=10\sin 2\theta-20\cos^2\theta+25$

$=10\sin 2\theta-10\cos 2\theta+15$

$=10\sqrt{2}\sin(2\theta-45^\circ)+15$

$-45^\circ\leqq 2\theta-45^\circ\leqq 315^\circ$ だから

$2\theta-45^\circ=90^\circ$，すなわち，$\theta=\mathbf{67.5^\circ}$ のとき $|\vec{u}|$ の

最大値$=\sqrt{10\sqrt{2}+15}=\sqrt{5(\sqrt{2}+1)^2}$

$=\mathbf{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

146

$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=13$ だから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を 2 等分するベクトルの 1 つを $\vec{c}$ とすると，

$\vec{c}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$=\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)+\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{13}\right)=\left(\dfrac{64}{65},\ \dfrac{112}{65}\right)$

ここで，$|\vec{c}|=\dfrac{16\sqrt{65}}{65}$ より

$\vec{e}=\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{\sqrt{65}}},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{\sqrt{65}}}\right)$

147

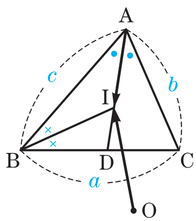
(1) BD：DC$=c:b$ より

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b+c}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b+c}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

(2) AI：ID

＝BA：BD

であり，ここで，



$\mathrm{BD}=\dfrac{c}{b+c}\mathrm{BC}$

$=\dfrac{ca}{b+c}$

$\therefore$ AI：ID$=c:\dfrac{ca}{b+c}=(\boldsymbol{b+c}):\boldsymbol{a}$

(3) (2)より

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{(b+c)}{(b+c)+a}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a+b+c}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a+b+c}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{a+b+c}\{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}}$

148

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow -\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

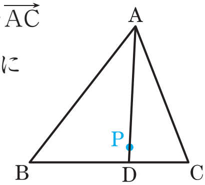
$\Longleftrightarrow -9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2) Dは直線 AP 上にあるので，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



また，Dは BC 上にあるので

$\dfrac{k}{3}+\dfrac{5}{9}k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{9}{8}$

$\therefore$ AP：PD=**8：1**

また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

BD：DC=**5：3**

(3) $\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{8}{9}\triangle\mathrm{DAB}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{5}{8}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{5}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{8}{9}\triangle\mathrm{DCA}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{3}{8}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

よって，

△PAB：△PBC：△PCA=**5：1：3**

149

(1) $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=52$

$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

より，$\theta=\boldsymbol{60^\circ}$

150

$|\vec{a}|=t\ (t>0)$ とおくと

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{t}{2}$

また，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=t^2-1$

次に，

$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2+t+1\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2-t+1\end{cases}$

より，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}}{2}$

$\therefore\ 2(t^2-1)=\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}$

ここで，右辺>0 だから，

$t>1\quad(\because\ t>0)$

両辺を 2 乗し，整理すると，

$t^4-3t^2+1=0\qquad\therefore\ t^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$t>1$ より，

$t=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}$

$\therefore\ |\vec{a}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

151

(1) $|x\vec{a}+\vec{b}|^2=x^2|\vec{a}|^2+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$

$=\boldsymbol{2x^2+12x+20}$

(2) (1)より $|x\vec{a}+\vec{b}|^2=2(x+3)^2+2$

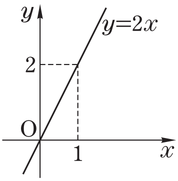
よって，$\boldsymbol{x=-3}$ のとき，$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は**最小値 $\sqrt{2}$** をとる．

152

$\vec{a}+t\vec{b}=(3t+1,\ -t+2)$,
$\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 3)$ より
$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$
$\iff -2(3t+1)+3(-t+2)=0$
∴ $t=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$

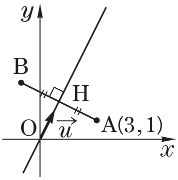
153

(1) $y=2x$ 上に
点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ があるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{5}$ だから



$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$



$$=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$
$$=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{u}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{5}\,\vec{u}}$$

(3) H は線分 AB の中点だから
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$
∴ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$$=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)-(3,\ 1)$$
$$=(2,\ 4)-(3,\ 1)=(-1,\ 3)$$
よって，$\mathbf{B(-1,\ 3)}$

154

直線上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると
$(x,\ y)=(2,\ 1)+t(1,\ 2)$
$\qquad=(t+2,\ 2t+1)$

∴ $\begin{cases} \boldsymbol{x=t+2} \\ \boldsymbol{y=2t+1} \end{cases}$

∴ $\boldsymbol{y=2x-3}$

155

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}}+3\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\vec{0}$ より，
$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$
∴ $\vec{a}+2\vec{b}-6\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}}$

(3) (1)，(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{6}\vec{a}$，
ここで $|\vec{a}|=12$ より
$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{1}{6}|\vec{a}| \iff |\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=2$
よって，C は点 D を中心とする半径 2 の円周上を動く．

156

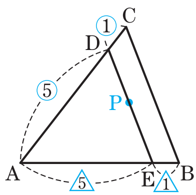
$\alpha=1-2\beta$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-2\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$\qquad=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$
∴ $(x,\ y)=(2-6\beta,\ 4-4\beta)$
∴ $\begin{cases} x=2-6\beta \\ y=4-4\beta \end{cases}$ ∴ $\boldsymbol{2x-3y+8=0}$

(別解) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$
$(\alpha+2\beta=1)$ だから P は，$(2,\ 4)$，$(-1,\ 2)$ を通る直線上を動く．
∴ $2x-3y+8=0$

157

(1) ① $\iff (\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}})-3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=k\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
$\iff 6\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(2-k)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
∴ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{(2-k)}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}}$

(2) AC，AB を 5：1 に内分する点をそれぞれ，D，E とすると，(1)より P は直線 DE 上にあるので，



△ABC の周，および内部にあるためには，線分 DE 上になければいけない．

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より　$0\leqq\dfrac{2-k}{6}\leqq\dfrac{5}{6}$

∴　$\boldsymbol{-3\leqq k\leqq 2}$

158

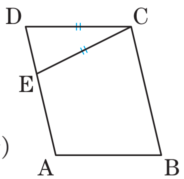
(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(2,\ a)-(1,\ 2)+(6,\ 3)$$
$$=(7,\ a+1)$$

∴　$\mathbf{D(7,\ \boldsymbol{a}+1)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(2-2t,\ a-at)+(7t,\ at+t)$$
$$=(2+5t,\ t+a)$$

∴　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
$$=(5t-4,\ t+a-3)$$

よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=(5t-4)^2+(t+a-3)^2$$
$$=26t^2+2(a-23)t+(a-3)^2+16$$
$$=26t^2+2(a-23)t+a^2-6a+25$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1+(a-2)^2$$
$$=a^2-4a+5$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2$ だから，

$$26t^2+2(a-23)t-2a+20=0$$

∴　$13t^2+(a-23)t-(a-10)=0$

$$(t-1)(13t+a-10)=0$$

$\mathrm{E}\neq\mathrm{D}$ より，$t\neq 1$ だから $t=\dfrac{10-a}{13}$

このとき，$3<a<10$ より，

$0<10-a<7$ だから

$$0<t<\frac{7}{13}$$

よって，E は AD の内分点で，

$\mathbf{E}\left(\dfrac{\mathbf{76-5\boldsymbol{a}}}{\mathbf{13}},\ \dfrac{\mathbf{10+12\boldsymbol{a}}}{\mathbf{13}}\right)$

(3)　$\triangle\mathrm{CDE}=\dfrac{1}{4}$(四角形 ABCD)

$\Longleftrightarrow$ E は AD の中点

∴　$t=\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow\dfrac{10-a}{13}=\dfrac{1}{2}$

$$\Longleftrightarrow a=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

159

P$(x,\ y,\ z)$ とおくと

$\mathrm{AP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Longleftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y-16z+31=0 \quad \cdots\cdots①$$

$\mathrm{BP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Longleftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-24x-8y-16z+51=0 \quad \cdots\cdots②$$

$\mathrm{CP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Longleftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-16x-8y-8z+19=0 \quad \cdots\cdots③$$

①−② より，$4x-2y=5$　……④

③−② より，$x+z=4$　……⑤

④，⑤より，$y=2x-\dfrac{5}{2}$，$z=4-x$

②に代入して，

$$x^2-4x+4=0\Longleftrightarrow(x-2)^2=0$$

∴　$x=2,\ y=\dfrac{3}{2},\ z=2$

∴　$(x,\ y,\ z)=\left(\mathbf{2},\ \boldsymbol{\frac{3}{2}},\ \mathbf{2}\right)$

160

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=1+2+3+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ$

$\quad+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90^\circ+2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos 120^\circ$

$=6+\sqrt{2}+0-\sqrt{3}=6+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\boldsymbol{\sqrt{6+\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$

161

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 4,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 1,\ -2)$

より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-2)^2+4^2+2^2=24$,

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(-2)^2+1^2+(-2)^2=9$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\cdot(-2)+4\cdot1+2\cdot(-2)=4$

$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{24\cdot9-4^2}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

162

(1) $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}} & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}} & \cdots\cdots② \\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \cdots\cdots③\end{cases}$

①，②より，

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathbf{(2,\ 4,\ -5)}$

①，③より，

$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(2,\ 4,\ 4)$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{(1,\ 2,\ 2)}$

②より，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{(2,\ -1,\ 0)}$

(2) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$(\because\quad \angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BAE}=90^\circ)$

よって，$\angle\mathrm{BAH}=90^\circ$

(イ) (ア)より，△ABP が二等辺三角形となるのは AB＝AP のときだから，

$\mathrm{AB}=\sqrt{1+4+4}=3$

$\mathrm{AP}=|t|\mathrm{AH}$

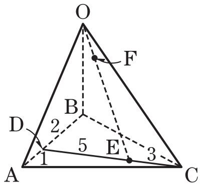
$=|t|\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2}$

$=|t|\sqrt{5+45}=\sqrt{50}\,|t|$

$\therefore\quad \sqrt{50}\,|t|=3$

よって，$t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\boldsymbol{\pm\dfrac{3}{5\sqrt{2}}}$

163



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

$=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

に，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

を代入すると，

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{32}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{k}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$+\dfrac{k}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{32}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

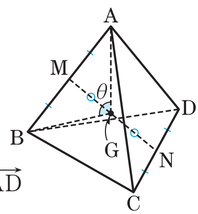
$=\left(1-\dfrac{15}{16}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{k}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{32}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は平面 OBC 上のベクトルだから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数＝0

ゆえに，$1-\dfrac{15}{16}k=0$ より，$k=\dfrac{16}{15}$

$\therefore\quad \mathrm{AG}:\mathrm{FG}=\mathbf{16:1}$

164



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$

に，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

を代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$$

(2)　AB=AC=AD=2,
∠BAC=∠CAD=∠DAB=60° より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\cdot2\cos60^\circ=2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2$$

$$=\frac{1}{16}\{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$

$$+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\}$$

$$=\frac{1}{16}\times24=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2$$

$$=\frac{1}{16}\{9|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$

$$-6\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-6\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\}$$

$$=\frac{1}{16}\times24=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ より，両辺を 2 乗すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2$$

$$\Longleftrightarrow 4=\frac{3}{2}-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GA}}||\overrightarrow{\mathrm{GB}}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

165

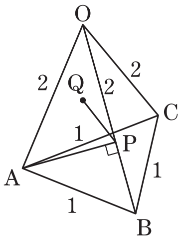
(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

$$\therefore\quad 4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=1$$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}$
とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=k\vec{b}-\vec{a}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{b}=0$ だから，

$$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$$

$$\therefore\quad k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

よって，$k=\dfrac{7}{8}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{7}{8}\vec{b}}$$

(3)　4 点 O，A，C，Q は同一平面上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{c}$ とおける．

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{c}-\frac{7}{8}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{c}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} s|\vec{a}|^2+t\vec{c}\cdot\vec{a}-\dfrac{7}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \\ s\vec{c}\cdot\vec{a}+t|\vec{c}|^2-\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$$

$$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=4,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{7}{2}$$

だから

$$\begin{cases} 4s+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{49}{16}=0 \\ \dfrac{7}{2}s+4t-\dfrac{49}{16}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow s=t=\frac{49}{120}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\dfrac{49}{120}(\vec{a}+\vec{c})}$

166

(1)　OA$=2$,

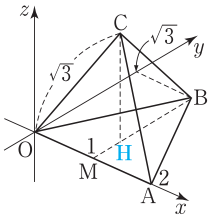
OB$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

AB$=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

よって，OA$=$OB$=$AB なので

△OAB は正三角形である．

(2)　C から△OAB に下ろした垂線の足を H とすると



△CHO

≡△CHA

≡△CHB

だから，

HO$=$HA$=$HB

である．よって，H は△OAB の外心であり，正三角形の外心と重心は一致するので重心でもある．

$$\therefore\quad \mathrm{H}\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$$

$$\therefore\quad c_1=\mathbf{1},\ c_2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

また，△CHO において三平方の定理より，M$(1,\ 0,\ 0)$ として

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2=3-(\mathrm{OM}^2+\mathrm{HM}^2)$$

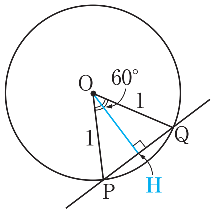
$$=3-\left\{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\quad c_3=\mathrm{CH}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{3}}$$

167

(1)　$\angle$POQ$=60°$ から，

$\angle$POH$=30°$



よって，

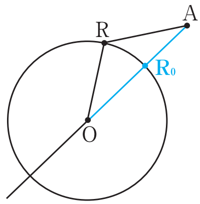
$$\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OP}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{6}}{3}(a-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad a=\mathbf{1}+\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

(2)　線分 PQ の長さが最大になるのは，これが球の直径のときだから O と H が一致するとき．



$\therefore\quad a=1$

次に，A$(1,\ 1,\ 1)$ より，OA$=\sqrt{3}>1$

よって，A は球面 C の外部にある．

ゆえに，AR が最小になるとき，R は，線分 OA と球面 C の交点．

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR_0}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore\quad \mathbf{R_0}\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}},\ \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}},\ \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$