数学Ⅱ・B＋ベクトル基礎問題精講［六訂版］

上園信武・齋藤正樹共著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1

(1)　$(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot(3y)$
　　$+3\cdot(2x)\cdot(3y)^2-(3y)^3$
　$=\boldsymbol{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$

(2)　$(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
　$=(x-3y)\{x^2+x\cdot3y+(3y)^2\}$
　$=x^3-(3y)^3$
　$=\boldsymbol{x^3-27y^3}$

2

　$a^6-9a^3b^3+8b^6=(a^3-b^3)(a^3-8b^3)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-2b)$
　$\times(a^2+2ab+4b^2)$
$=\boldsymbol{(a-b)(a-2b)(a^2+ab+b^2)}$
　$\boldsymbol{\times(a^2+2ab+4b^2)}$

3

$(2a-b)^5$ を展開したときの一般項は
${}_5\mathrm{C}_k(2a)^{5-k}(-b)^k$
すなわち，$(-1)^k{}_5\mathrm{C}_k\cdot2^{5-k}a^{5-k}b^k$
よって，a^3b^2 の係数は $k=2$ のときで
　$(-1)^2{}_5\mathrm{C}_2\cdot2^3=\mathbf{80}$
また，ab^4 の係数は $k=4$ のときで
　$(-1)^4{}_5\mathrm{C}_4\cdot2^1=\mathbf{10}$

4

(1)　$(3x-2y)^6$ を展開したときの一般項は
　　${}_6\mathrm{C}_r(3x)^r(-2y)^{6-r}$
　$={}_6\mathrm{C}_r\cdot3^r\cdot(-2)^{6-r}\cdot x^ry^{6-r}$
　$r=3$ のときが求める係数だから

$${}_6\mathrm{C}_3\cdot3^3\cdot(-2)^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2}\cdot27\cdot(-8)$$

　$=\mathbf{-4320}$

(2)　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b$
　　　　　$+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$
　両辺に $a=1$，$b=-1$ を代入すると
　$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

　$\therefore$　${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

5

$$\begin{array}{r}
4x^2-4x+a+4 \\
x+1\,\big)\overline{\,4x^3\qquad\quad+ax+b} \\
\underline{4x^3+4x^2\qquad\qquad} \\
-4x^2+ax\quad \\
\underline{-4x^2-4x\quad} \\
(a+4)x+b \\
\underline{(a+4)x+a+4} \\
b-a-4
\end{array}$$

わりきれるとき，余りは 0 だから
　$b-a-4=0$　　　　　……①

$$\begin{array}{r}
2x^2+x+\dfrac{a+1}{2} \\
2x-1\,\big)\overline{\,4x^3\qquad\quad+ax+b} \\
\underline{4x^3-2x^2\qquad\qquad} \\
2x^2+ax\quad \\
\underline{2x^2-\ \ x\quad} \\
(a+1)x+b \\
\underline{(a+1)x-\dfrac{a+1}{2}} \\
\dfrac{a+1}{2}+b
\end{array}$$

余りは 6 だから $\dfrac{a+1}{2}+b=6$

　$\therefore$　$a+2b=11$　　　　　……②

①，②より，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{5}$

6

(1)　$(与式)=\left(3+\dfrac{1}{x-5}\right)-\left(5-\dfrac{1}{x-2}\right)$
　　　　$+\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$$=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$

$$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}$$

$$=2\left\{\frac{1}{(x-5)(x-3)}-\frac{1}{(x-2)(x-4)}\right\}$$

$$=\frac{2(2x-7)}{(x-5)(x-3)(x-2)(x-4)}$$

(2) $(\text{与式})=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}$

$$-\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$

$$+\frac{ab}{(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-ca(a-c)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\mathbf{1}$$

7

$$2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\frac{803}{371}$$

より $\quad\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{61}{371}$

両辺の逆数をとると

$$k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=\frac{371}{61}$$

$$\therefore\quad k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\frac{5}{61}$$

$$\therefore\quad k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}$$

よって，$k=\mathbf{6}$，$m=\mathbf{12}$

8

(1) $x+\dfrac{1}{y}=1$ より

$$x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$$

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より $z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$xyz=\left(\dfrac{y-1}{y}\right)\cdot y\cdot\left(\dfrac{1}{1-y}\right)=\mathbf{-1}$

(2) $\dfrac{1}{bc+b+1}=\dfrac{a}{a(bc+b+1)}$

$=\dfrac{a}{1+ab+a}\quad(\because\quad abc=1)$

$\dfrac{1}{ca+c+1}=\dfrac{ab}{ab(ca+c+1)}$

$=\dfrac{ab}{a+1+ab}\quad(\because\quad abc=1)$

よって，

$$(\text{与式})=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}$$

$$+\frac{ab}{ab+a+1}$$

$$=\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=\mathbf{1}$$

9

(1) $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{2y+z}{7}=\dfrac{z+3x}{6}=k$

とおくと

$$\begin{cases} x+\ \ y=3k & \cdots\cdots① \\ 2y+\ \ z=7k & \cdots\cdots② \\ \ \ z+3x=6k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①×2−② より，$2x-z=-k$ ……④

③＋④ より，$5x=5k\quad\therefore\quad x=k$

よって，①より，$y=2k$，

③より，$z=3k$

$xyz\neq0$ より，$k\neq0$ だから

$x:y:z=k:2k:3k=\mathbf{1:2:3}$

(2) $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2+4k^2-9k^2}{k^2+4k^2+9k^2}$

$=\dfrac{-4k^2}{14k^2}=-\mathbf{\dfrac{2}{7}}\quad(\because\quad k\neq0)$

10

$$\begin{cases} 2a+b=3kc & \cdots\cdots① \\ 2b+c=3ka & \cdots\cdots② \\ 2c+a=3kb & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①＋②＋③ より，

$3(a+b+c)=3k(a+b+c)$

（i）$a+b+c\neq 0$ のとき，$k=\mathbf{1}$

（ii）$a+b+c=0$ のとき，

$c=-a-b$ だから②より，$b-a=3ka$

$\therefore\ \ b=(3k+1)a$

このとき，$c=-(3k+2)a$

①に代入して，$(3k+3)a=-3k(3k+2)a$

$a\neq 0$ だから，$k+1=-3k^2-2k$

$\therefore\ \ 3k^2+3k+1=0$

これをみたす実数 k は存在しない．

したがって，$a+b+c=0$ の場合は不適．

11

左辺の x^3 の係数が 1 より，$a=\mathbf{1}$

よって，

$$x^3-9x^2+9x-4$$
$$=x(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に $x=0$，$x=1$，$x=2$ を代入して

$$\begin{cases}-4=d\\-3=c+d\\-14=2b+2c+d\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}b=\mathbf{-6}\\c=\mathbf{1}\\d=\mathbf{-4}\end{cases}$$

逆に，このとき，

$$(\text{右辺})=x(x-1)(x-2)-6x(x-1)+x-4$$
$$=x^3-3x^2+2x-6x^2+6x+x-4$$
$$=x^3-9x^2+9x-4=(\text{左辺})$$

となり適する．

12

(1) $a:b=b:c$ より $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$

とおくと，$a=bk$，$c=\dfrac{b}{k}$

$$(\text{左辺})=\frac{1}{b^3k^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{k^3}{b^3}=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

$$(\text{右辺})=\frac{b^3k^3+b^3+\dfrac{b^3}{k^3}}{b^2k^2\cdot b^2\cdot\dfrac{b^2}{k^2}}=\frac{k^3+1+\dfrac{1}{k^3}}{b^3}$$

$$=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

よって，$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}$

(2) $x+\dfrac{1}{y}=1$ より $x=\dfrac{y-1}{y}$，

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より $z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{y}{y-1}=1$

13

$a>0$，$b>0$ より

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)-9=ab+\frac{4}{ab}-4$$
$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0$$

よって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

また，等号成立は，$\sqrt{ab}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$，

つまり，$ab=2$ のとき．

14

(1) 与えられた方程式は

$(3x-2)(x-1)=0$

よって，$x=\mathbf{1}$，$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) 与えられた方程式は

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=24$

$\therefore\ \ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$

$x^2+5x=t$ とおくと，

$(t+4)(t+6)=24 \quad \therefore\ \ t(t+10)=0$

$\therefore\ \ t=0$ または -10

（i）$t=0$，すなわち，$x^2+5x=0$ のとき，$x=\mathbf{0}$，$\mathbf{-5}$

（ii）$t=-10$，すなわち，

$x^2+5x+10=0$ のとき，

$$x=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{15}\,i}{2}}$$

15

(1) $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$

$=\boldsymbol{-2+2i}$

(2) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^2\}^3}{8}$

$=\dfrac{(-2i)^3}{8}=\boldsymbol{i}$

注 $\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^3\}^2}{8}$ としてもよい.

(3) $\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{1-i}{2}$

$\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$

より，(与式)$=\dfrac{1-i}{2}\times(1-i)=\boldsymbol{-i}$

16

(1) $x+y=2$, $xy=2$ より

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2=\boldsymbol{-8}$

(2) $x=1-\sqrt{2}\,i$ より $x-1=-\sqrt{2}\,i$

両辺を平方して整理すると,

$x^2-2x+3=0$

ここで,

x^3+2x^2+3x-7 を x^2-2x+3 でわると,

商が $x+4$ で，余りが $8x-19$

となることから,

x^3+2x^2+3x-7

$=(x+4)(x^2-2x+3)+8x-19$

と表せ，$x=1-\sqrt{2}\,i$ のとき

$x^2-2x+3=0$ であることより，求める式の値は

$8(1-\sqrt{2}\,i)-19=\boldsymbol{-11-8\sqrt{2}\,i}$

17

(1) $x^2-(k+1)x+k^2=0$ の判別式を D とすると

$D=(k+1)^2-4k^2=-3k^2+2k+1$

$=-(3k+1)(k-1)$

より

(i) $D>0$，すなわち，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<k<1}$ **のとき，異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii) $D=0$，すなわち，$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{3}}$, **1 のとき，重解をもつ**

(iii) $D<0$，すなわち，$\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{3}}$, $\boldsymbol{1<k}$ **のとき，虚数解を 2 個もつ**

(2) 与えられた方程式は，2 次方程式より，$k\neq0$

$kx^2-2kx+2k+1=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-k(2k+1)=-k^2-k$

$=-k(k+1)$

より

(i) $\dfrac{D}{4}>0$，すなわち，$\boldsymbol{-1<k<0}$ **のとき，異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii) $\dfrac{D}{4}=0$，すなわち，$\boldsymbol{k=-1}$ **のとき，重解をもつ**

(iii) $\dfrac{D}{4}<0$，すなわち，$\boldsymbol{k<-1}$, $\boldsymbol{0<k}$ **のとき，虚数解を 2 個もつ**

18

①，②，③の判別式をそれぞれ，D_1, D_2, D_3 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-1=(a-1)(a+1)$,

$\dfrac{D_2}{4}=4-a^2=-(a-2)(a+2)$,

$D_3=(a+1)^2-4a^2=-3a^2+2a+1$

$=-(3a+1)(a-1)$

よって，D_1, D_2, D_3 の符号は下表のようになる.

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
D_1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D_2	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
D_3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$

ここで，題意をみたすためには，D_1, D_2, D_3 のうち，1 つが正または 0 で，残り 2

つが負であればよいので

$$a<-2,\ -1<a<-\frac{1}{3},\ 2<a$$

19

(1)　与式を i について整理して

$$(x^2+2x+1)+(x^2+3x+2)i=0$$

x^2+2x+1，x^2+3x+2 は実数だから

$$\begin{cases} x^2+2x+1=0 & \cdots\cdots① \\ x^2+3x+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①は　$(x+1)^2=0$　　∴　$x=-1$

②は　$(x+1)(x+2)=0$

　∴　$x=-1,\ -2$

①，②が同時に成りたつ x が求めるものだから　$x=-1$

(2)　与えられた式より

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+i}$$

$$(\text{右辺})=\frac{i}{2(2+i)}=\frac{i^2}{2i(2+i)}$$

$$=\frac{-1}{-2+4i}=\frac{1}{2-4i}$$

∴　$x+yi=2-4i$

x，y は実数だから　$x=2,\ y=-4$

20

与えられた式は

$$(x^2-3ax+a)+(x-2a)i=0$$

x，a は実数だから

$$\begin{cases} x^2-3ax+a=0 & \cdots\cdots① \\ x-2a=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より　$x=2a$．これを①に代入すると，

$2a^2-a=0$ となり　$a=0,\ \frac{1}{2}$

$a>0$ より　$a=\frac{1}{2}$

21

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=5$$

$$\therefore\ \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6 \\ \alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=25 \end{cases}$$

よって，α^2，β^2 を解にもつ2次方程式は

$$x^2-6x+25=0$$

22

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$，

$\alpha\beta\gamma=-3$，

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

だから

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$
$$=-\{1-3\cdot(-2)\}+3\cdot(-3)$$
$$=-7-9=-16$$

23

$x=1+i$ を与えられた式に代入すると

$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$

∴　$(-2+2i)+(a+ai)+b=0$

∴　$a+b-2+(a+2)i=0$

a，b は実数だから

$$\begin{cases} a+b-2=0 & \cdots\cdots① \\ a+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より　$a=-2,\ b=4$

24

(1)　$f(x)+g(x)$ を $x-a$ でわった余りは b だから，剰余の定理より

$$f(a)+g(a)=b$$

$f(x)g(x)$ を $x-a$ でわった余りは c だから，同様にして

$$f(a)g(a)=c$$

(2)　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ を $x-a$ でわった余りは $\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$

より(1)を用いると，

$$\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$$
$$=\{f(a)+g(a)\}^2-2f(a)g(a)$$
$$=b^2-2c$$

25

求める余りは，$ax+b$ とおけるので，

$f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$

と表せる．$f(2)=3$，$f(-1)=6$ だから

$$\begin{cases} 2a+b=3 & \cdots\cdots ① \\ -a+b=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②より，$a=-1$，$b=5$ となり，
求める余りは，$\boldsymbol{-x+5}$

26

(1) $P(x)$ は $x+1$，$x-1$，$x+2$ でわると，それぞれ 3，7，4 余るので

$P(-1)=3$，$P(1)=7$，$P(-2)=4$

ここで，

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおくと

$$\begin{cases} a-b+c=3 \\ a+b+c=7 \\ 4a-2b+c=4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$$

よって，求める余りは $\boldsymbol{x^2+2x+4}$

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ でわった余りを $R(x)$ (2 次以下の整式) とおくと

$P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+R(x)$

と表せる．
$P(x)$ は $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余るので，$R(x)$ も $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余る．
よって，$R(x)=a(x+1)^2+2x+1$ とおける．

$$\therefore \quad P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+a(x+1)^2+2x+1$$

$P(1)=-1$ より

$4a+3=-1 \qquad \therefore \quad a=-1$

よって，求める余りは

$-(x+1)^2+2x+1$

すなわち，$\boldsymbol{-x^2}$

27

(1) $P(2)=0$ より

$8a+8b-4ab-16=0 \qquad \cdots\cdots ①$

$\therefore \quad -4(a-2)(b-2)=0$

$\therefore \quad a=\mathbf{2}$ または $b=\mathbf{2}$

(2) $P(-2)=0$ より

$24a-8b-8ab+24=0 \qquad \cdots\cdots ②$

$\therefore \quad -8(a+1)(b-3)=0$

$\therefore \quad a=\mathbf{-1}$ または $b=\mathbf{3}$

(3) ①，②が同時に成りたてばよいので
$(a,\ b)=(\mathbf{-1,\ 2})$ **または** $(\mathbf{2,\ 3})$

(i) $(a,\ b)=(-1,\ 2)$ のとき

$P(x)=-x^4+3x^3+5x^2-12x-4$
$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(-x^2+3x+1)}$

(ii) $(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき

$P(x)=2x^4+x^3-11x^2-4x+12$
$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(2x+3)(x-1)}$

28

$x^3=1$ より
$(x-1)(x^2+x+1)=0$ だから
$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

(i) $\boldsymbol{n=3m}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1$
$=(\omega^3)^{2m}+(\omega^3)^m+1=1+1+1=\mathbf{3}$

(ii) $\boldsymbol{n=3m+1}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+2}+\omega^{3m+1}+1$
$=(\omega^3)^{2m}\cdot\omega^2+(\omega^3)^m\cdot\omega+1$
$=\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$

(iii) $\boldsymbol{n=3m+2}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+4}+\omega^{3m+2}+1$
$=(\omega^3)^{2m+1}\cdot\omega+(\omega^3)^m\cdot\omega^2+1$
$=\omega+\omega^2+1=\mathbf{0}$

29

共通解を α とおくと，

$$\begin{cases} \alpha^2-2a\alpha+6a=0 & \cdots\cdots ①' \\ \alpha^2-2(a-1)\alpha+3a=0 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

①′−②′ より，

$$-2\alpha+3a=0 \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{3}{2}a$$

これを①′に代入すると　$a^2-8a=0$

$\therefore \quad a=0,\ 8$

ここで $a=0$ とすると $\alpha=0$ となり題意に反するので，$a=8$．このとき

①から　$x^2-16x+48=0$

∴　$(x-4)(x-12)=0$

∴　$x=4,\ 12$

②から　$x^2-14x+24=0$

∴　$(x-2)(x-12)=0$

∴　$x=2,\ 12$

よって，**共通解は 12** であり，**①の他の解は 4**，**②の他の解は 2** である．

30

(1)　①に $x=1+i$ を代入して

$(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$　……①′

①′ より　$2i-2+2ai+b+bi+c=0$

∴　$(b+c-2)+(2a+b+2)i=0$

$a,\ b,\ c$ は実数だから，

$$\begin{cases} b+c-2=0 \\ 2a+b+2=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{b=-2a-2} \\ \boldsymbol{c=2a+4} \end{cases}$$

(2)　(1)より，①は

$x^3+ax^2-2(a+1)x+2a+4=0$

ここで，$x=1+i$ を解にもつから，

$x-1=i$　両辺を 2 乗して整理すると

$x^2-2x+2=0$

よって，$(x^2-2x+2)(x+a+2)=0$

ゆえに，①の実数解は $\boldsymbol{x=-a-2}$

(3)　①と②がただ 1 つの実数解を共有するとき，それは，$x=-a-2$ だから，②に代入して

$(a+2)^2+b(a+2)+3=0$

$(a+2)^2-2(a+1)(a+2)+3=0$

$-a^2-2a+3=0$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

∴　$a=-3,\ 1$

$a=-3$ のとき，$b=4,\ c=-2$

$a=1$ のとき，$b=-4,\ c=6$

よって，

$(a,\ b,\ c)=\boldsymbol{(-3,\ 4,\ -2),\ (1,\ -4,\ 6)}$

31

(1)　内分する点は，

$$\left(\frac{2\times3+3\times(-1)}{3+2},\ \frac{2\times1+3\times2}{3+2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{3}{5},\ \frac{8}{5}\right)}$$

外分する点は，

$$\left(\frac{(-2)\times3+3\times(-1)}{3+(-2)},\ \frac{(-2)\times1+3\times2}{3+(-2)}\right)$$

$=\boldsymbol{(-9,\ 4)}$

(2)　三角形の頂点は，それぞれの直線の交点であるから，その座標は，

$(0,\ 6),\ (-2,\ 0),\ (5,\ 0)$

よって，重心の座標は，

$$\left(\frac{0+(-2)+5}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)=\boldsymbol{(1,\ 2)}$$

32

$2x+3y-6=0$ より

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

平行な直線は，傾きが $-\dfrac{2}{3}$ で，

点 $(3,\ 2)$ を通るので

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$$

すなわち，$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{3}x+4}$

33

△ABC は鋭角三角形なので，

A$(0,\ a)$，B$(-b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$，

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

とおける．

このとき，

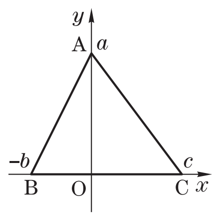
AB$^2=a^2+b^2$，

AC$^2=a^2+c^2$，

BC$^2=(b+c)^2$

$$\cos B=\frac{b}{\mathrm{AB}}$$

∴　AB^2+BC^2



$-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$=a^2+b^2+(b+c)^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\dfrac{b}{\mathrm{AB}}$

$=a^2+b^2+(b+c)^2-2b(b+c)$

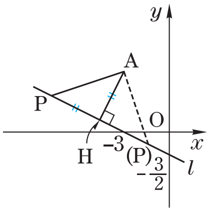
$=a^2+c^2=\mathrm{AC}^2$

よって,

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

が成りたつ.

34



Aと l の距離は,

$\dfrac{|-3+8+3|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

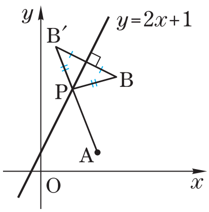
より

$\mathrm{AH}=\mathrm{HP}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

∴　$\triangle\mathrm{AHP}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{32}{5}}$

35



点Bの $y=2x+1$ に関する対称点を $\mathrm{B}'(a,\ b)$ とおくと, 直線 BB' の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ だから

$\dfrac{b-5}{a-4}=-\dfrac{1}{2}$

∴　$a+2b=14$　……①

また, 線分 BB' の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b+5}{2}\right)$ は $y=2x+1$ 上にあるので

$\dfrac{b+5}{2}=a+4+1$

∴　$2a-b=-5$　……②

①, ②より, $a=\dfrac{4}{5}$, $b=\dfrac{33}{5}$

よって, $\mathrm{B}'\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{33}{5}\right)$

ここで, $\mathrm{PB}=\mathrm{PB}'$ だから

$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'\geqq\mathrm{AB}'$ (一定)

(等号は, 点Pが直線 AB' と $y=2x+1$ の交点と一致するとき成立.)

直線 AB' は $y-1=\dfrac{1-\dfrac{33}{5}}{3-\dfrac{4}{5}}(x-3)$

より　$y=-\dfrac{28}{11}x+\dfrac{95}{11}$

この直線と $y=2x+1$ の交点は

$\left(\dfrac{42}{25},\ \dfrac{109}{25}\right)$ だから $\mathbf{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{42}{25},\ \dfrac{109}{25}\right)}$ のとき,

$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ は最小.

36

(1)　(i)　垂直のとき

$1\cdot1+a\{-(2a-1)\}=0$

$2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

∴　$a=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ 1}$

(ii)　平行のとき

$1\cdot\{-(2a-1)\}-1\cdot a=0$

$3a-1=0$

∴　$a=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2)　$x+y=3$　……①

$y-x=1$　……②

$x+3y=3$　……③

(ア)　①+② より　$2y=4$

∴　$(x,\ y)=(1,\ 2)$

②+③ より　$4y=4$

∴　$(x,\ y)=(0,\ 1)$

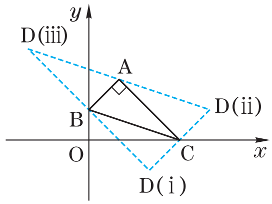
③−① より　$2y=0$

∴　$(x,\ y)=(3,\ 0)$

よって, 3つの頂点の座標は,

$\mathbf{(1,\ 2),\ (0,\ 1),\ (3,\ 0)}$

(イ)　(ア)の答えの頂点の座標を順に A, B, C とし, つけ加える点を $\mathrm{D}(a,\ b)$ とすると, 平行四辺形ができるのは次の3つの場合のみである.



(i)　BC が対角線のとき

平行四辺形の性質から，BC と AD の中点は一致するので，

$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore\ (a,\ b)=(2,\ -1)$

(ii)　AC が対角線のとき，(i)と同様で

$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)=\left(\dfrac{4}{2},\ \dfrac{2}{2}\right)$

$\therefore\ (a,\ b)=(4,\ 1)$

(iii)　AB が対角線のとき，(i)と同様で

$\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore\ (a,\ b)=(-2,\ 3)$

(i)，(ii)，(iii)より，求める点の座標は

(2，−1)，(4，1)，(−2，3)

37

(1)　$y=ax+9-3a$

より　$(x-3)a+9-y=0$

これが任意の a について成りたつので

$\begin{cases} x-3=0 \\ 9-y=0 \end{cases}\quad \therefore\ \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$

よって，定点 **(3，9)** を通る．

(2)　a がすべての実数値をとっても，y 軸に平行で，点 (3，9) を通る直線 $x=3$ は表せないので，これと x 軸との交点 (3，0) は通ることができない．

よって，$\boldsymbol{p=3}$ はとることができない．

38

$2x+y-1=0$ は，$x+y+1=0$ と垂直ではないので求める直線は，

$k(2x+y-1)+(x-2y-3)=0$

すなわち

$(2k+1)x+(k-2)y-k-3=0$

と表せる．

これが，$x+y+1=0$ と垂直だから，

$1\cdot(2k+1)+1\cdot(k-2)=0$

$\therefore\ 3k-1=0$

よって，$k=\dfrac{1}{3}$ より，

$\dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{3}y-\dfrac{10}{3}=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x-y-2=0}$

39

(1)　求める円の方程式を

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと

A を通るので，

$5a+5b+c+50=0$　……①

B を通るので，

$2a-4b+c+20=0$　……②

C を通るので，

$-2a+2b+c+8=0$　……③

①−②　より　$a+3b+10=0$　……④

②−③　より　$2a-3b+6=0$　……⑤

④+⑤　より　$a=-\dfrac{16}{3}$，

④より　$b=-\dfrac{14}{9}$，

①より　$c=-\dfrac{140}{9}$

よって，求める円の方程式は

$\boldsymbol{x^2+y^2-\dfrac{16}{3}x-\dfrac{14}{9}y-\dfrac{140}{9}=0}$

(2)　3 点 A，B，D を通る円がかけないのは，D が直線 AB 上にあり，A とも B とも異なるときである．

AB：$y-5=\dfrac{5-(-4)}{5-2}(x-5)$

すなわち，$y=3x-10$

より，求める a，b の関係式は

$\boldsymbol{b=3a-10}$

$(\boldsymbol{(a,\ b)\neq(5,\ 5),\ (2,\ -4)})$

40

円の中心 $(-2,\ -1)$ と直線との距離を d とおくと

$$d=\frac{|-2a+1+9-3a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$$

(i) $d<5$ のとき，

すなわち $\dfrac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}<5$ のとき

両辺を平方して，

$a^2-4a+4<a^2+1$

$\therefore\quad -4a<-3$

よって，

$\boldsymbol{a>\frac{3}{4}}$ **のとき，異なる 2 点で交わる．**

(ii) $d=5$ すなわち，

$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}}$ **のとき，接する．**

(iii) $d>5$ すなわち，

$\boldsymbol{a<\frac{3}{4}}$ **のとき，共有点をもたない．**

41

求める接線は y 軸と平行ではないので，

$y+2=m(x-4)$

すなわち，$mx-y-4m-2=0$

とおける．これが円 $x^2+y^2=10$ に接するので，$\dfrac{|-4m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

両辺を平方すると

$16m^2+16m+4=10m^2+10$

$3m^2+8m-3=0$

$(3m-1)(m+3)=0$

$\therefore\quad m=\frac{1}{3},\ -3$

よって，求める接線の方程式は，

$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}}$ と $\boldsymbol{y=-3x+10}$

42

$x^2+y^2=2$ ……①

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ ……②

①と②の中心間の距離$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

①の半径は $\sqrt{2}$，②の半径は 2 より

$2-\sqrt{2}<\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$

だから，2 円は異なる 2 点で交わる．

よって，①−② より，$-2x-2y=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x}$

43

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$\mathrm{AP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2$,

$\mathrm{BP}^2=(x-5)^2+(y-5)^2$

$\mathrm{AP}^2:\mathrm{BP}^2=1:9$ だから

$9\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ より

$9(x-1)^2+9(y-1)^2=(x-5)^2+(y-5)^2$

$x^2-x+y^2-y-4=0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$

よって，求める軌跡は，

円 $\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}}$

44

円は x 軸の下側から x 軸に接しているので，中心の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，$Y<0$ であり，半径は $-Y$．

よって，円の方程式は

$(x-X)^2+(y-Y)^2=Y^2$

となり，点 $(1,\ -2)$ を通るので，

$(1-X)^2+(-2-Y)^2=Y^2$

$\therefore\quad X^2-2X+4Y+5=0$

よって，求める軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}}$

これは $y<0$ をみたす．

45

(1) $\begin{cases} x=-t+2 & \cdots\cdots① \\ y=2t+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①を t について解くと $t=-x+2$

これを②に代入して $y=2(-x+2)+1$

$\therefore$　**直線　$y=-2x+5$**

(2)　$\begin{cases} x=1-|t| & \cdots\cdots① \\ y=t^2-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より，$|t|=1-x$　$\cdots\cdots①'$

②より，$y=|t|^2-1$

①′を代入して　$y=(1-x)^2-1$

①′でさらに $|t|\geqq 0$ より，$x\leqq 1$

$\therefore$　**放物線の一部　$y=x^2-2x\ (x\leqq 1)$**

(3)　$\begin{cases} x=1-\sin t \\ y=1+\cos t \end{cases}$

より　$\begin{cases} 1-x=\sin t & \cdots\cdots① \\ y-1=\cos t & \cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ より　$(1-x)^2+(y-1)^2=1$

また，$30^\circ\leqq t\leqq 120^\circ$ より，

$\dfrac{1}{2}\leqq\sin t\leqq 1$，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

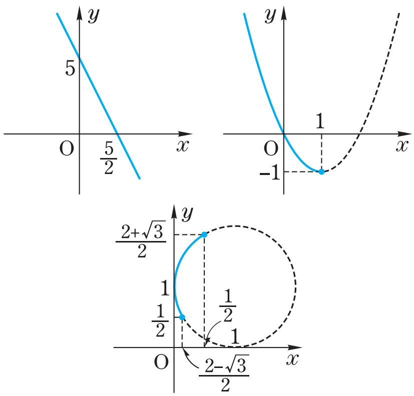
だから，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

となり，求める軌跡は

円弧　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$

(1)，(2)，(3)のグラフは順に下の図のようになる．



46

(1)　①と $y=-x^2+3x-2$ より，y を消去すると

$4x^2-2(2t+3)x+t^2+8t-4=0\cdots\cdots②$

②は実数解をもつので，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}\geqq 0$ であるから

$(2t+3)^2-4(t^2+8t-4)\geqq 0$

$\therefore$　$-4t+5\geqq 0$　　$\therefore$　$\boldsymbol{t\leqq\dfrac{5}{4}}$

(2)　①より　$y=(x-t)^2-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$

したがって，頂点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=t$　$\cdots\cdots③$

$Y=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$　$\cdots\cdots④$

③，④より t を消去すると，

$Y=-\dfrac{1}{2}X^2+4X-4$

ここで，(1)より，$t\leqq\dfrac{5}{4}$ だから③より

$X\leqq\dfrac{5}{4}$

よって，求める軌跡は

放物線の一部

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x-4\quad\left(x\leqq\dfrac{5}{4}\right)}$

47

(1)　l の式から　$(x-1)t-y=0$

よって，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 0)$ を通る．

m の式から　$x-1+(y-2)t=0$

よって，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 2)$ を通る．

$\therefore$　**A(1，0)，B(1，2)**

(2)　$t\cdot 1+(-1)\cdot t=0$ より，l と m は直交するので，P は線分 AB を直径とする円を描く．また，AB の中点は M(1，1) であり，

AM$=1$

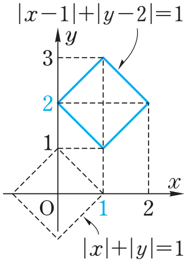
よって，P は円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上を動く．

ここで，l は $x=1$，m は $y=2$ と一致

することはないので点 $(1,\ 2)$ は含まれない．
よって，求める軌跡は
円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ から，
点 $(1,\ 2)$ を除いたもの．

48

$|x-1|+|y-2|=1$ は曲線 $|x|+|y|=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$|x|+|y|=1$ は，x に $-x$ を代入しても y に $-y$ を代入しても式は変わらないので，x 軸，y 軸，原点に関して対称．
よって，$|x|+|y|=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$，すなわち，$x+y=1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ と，それを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した図形をあわせたものが
$|x|+|y|=1$
よって，求める図形は右図のような正方形．

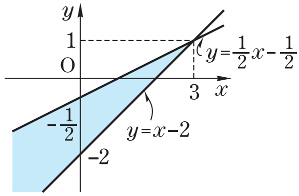


49

(1) $x-y<2 \iff y>x-2$
よって，$y=x-2$ より上側を表す．
$$x-2y>1 \iff y<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$
よって，$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ より下側を表す．
よって，求める領域は次図の色の部分(境界は含まない)．

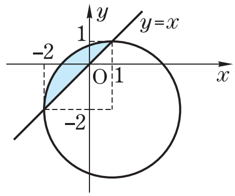
(2) $x^2+y^2-2x+4y \leqq 4$
$\iff (x-1)^2+(y+2)^2 \leqq 9$
よって，$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ の周および内部を表す．
また，$y \geqq x$ は $y=x$ より上側とその図形上を表す．
よって，求める領域は次図の色の部分(境界を含む)．

(1)



ただし，境界は含まない

(2)



ただし，境界は含む

50

(1) $|x^2-2x|$
$$=\begin{cases} x^2-2x & (x^2-2x \geqq 0) \\ -(x^2-2x) & (x^2-2x<0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x^2-2x & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x) \\ -x^2+2x & (0<x<2) \end{cases}$$
よって，求める領域は $y=|x^2-2x|$ の下側で，境界を含む．

(2) $|x^2-2|+1$
$$=\begin{cases} x^2-2+1 & (x^2-2 \geqq 0) \\ -(x^2-2)+1 & (x^2-2<0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} \leqq x) \\ -x^2+3 & (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}) \end{cases}$$
よって，求める領域は $y=|x^2-2|+1$ の上側で，境界を含む．

(3) (i) $x-1 \geqq 0,\ y-2 \geqq 0$
すなわち $x \geqq 1,\ y \geqq 2$ のとき
$|x-1|+|y-2| \leqq 1$
$\iff x-1+y-2 \leqq 1$
$\iff y \leqq -x+4$
(ii) $x<1,\ y \geqq 2$ のとき
$|x-1|+|y-2| \leqq 1$
$\iff -(x-1)+y-2 \leqq 1$
$\iff y \leqq x+2$
(iii) $x \geqq 1,\ y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

$\Longleftrightarrow x-1-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq x$

(iv)　$x<1$，$y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

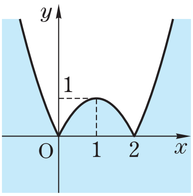
$\Longleftrightarrow -(x-1)-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq -x+2$

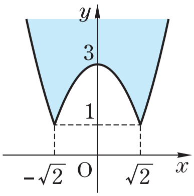
注　$|x|+|y|\leqq 1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動（⇨**48**）したものは，

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

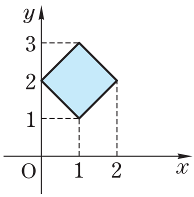
領域を図示すると順に下図の色の部分となる．



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む

51

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 12$，$2x+y\leqq 8$ の表す領域は，図Ⅰの色の部分である．ただし，境界は含む．

(1)　$x+3y=k$ とおくと，

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$ となり，図Ⅱより

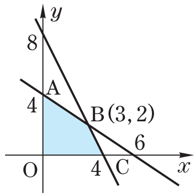
A(0，4) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最大で，k の**最大値は 12**

O(0，0) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最小で，k の**最小値は 0**

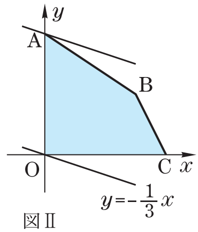
(2)　$x^2-y=k'$ とおくと，$y=x^2-k'$ となり，図Ⅲより

A(0，4) を通るとき，$-k'$ は最大で，k' **の最小値は -4**

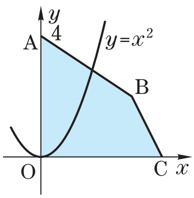
C(4，0) を通るとき，$-k'$ は最小で，k' **の最大値は 16**



図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ

52

(1)　(ア)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと，

$\theta=60°$，$120°$

よって，$\boldsymbol{\theta=60°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{120°+360°\times n}$　**（n：整数）**

(イ)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと，

$\theta=120°$，$240°$

よって，$\boldsymbol{\theta=120°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{240°+360°\times n}$　**（n：整数）**

(ウ)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を解くと，$\theta=30°$，$210°$

よって，$\boldsymbol{\theta=30°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{210°+360°\times n}$　**（n：整数）**

(2) 60° の動径を表す角は，nを整数として，$60°+360°\times n$ と表せる．

∴ $500°<60°+360°\times n<5000°$

∴ $440°<360°\times n<4940°$

これをみたす整数nは，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13 だから求める個数は，**12 個**.

53

(1) (ア) $S=\dfrac{1}{2}rl$ より

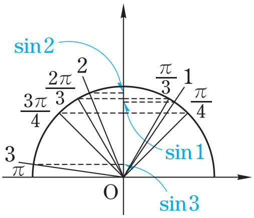
$$l=\frac{2S}{r}=\frac{2\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(イ) $l=r\theta$ より

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

(2) $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{3}<2<\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{4}<3<\pi$

より 8 個の角 $\dfrac{\pi}{4}$，1，$\dfrac{\pi}{3}$，2，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}$，3，π は下図のような位置関係にある．



∴ $\mathbf{\sin 3<\sin 1<\sin 2}$

54

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{9}{25}$,

$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=\dfrac{16}{25}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

よって，

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$

$\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\mathbf{-1}$

$\cos(\alpha-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\mathbf{0}$

55

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\cos\theta<0$

∴ $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

∴ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

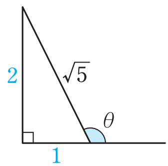
$=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}}$

∴ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

56

$\tan\theta=-2$ のとき，

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ だから



右図より，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

∴ $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=\dfrac{6}{\sqrt{5}}-\dfrac{32}{5\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{5\sqrt{5}}}$

∴ $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=-\dfrac{4}{5\sqrt{5}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{11}{5\sqrt{5}}}$

57

(解 I) （和積の公式を使って）

$\sin 3\theta+\sin 2\theta=2\sin\dfrac{5\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=0$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ だから，

$\cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$

よって，$\sin\dfrac{5\theta}{2}=0$

$0\leqq\dfrac{5\theta}{2}\leqq\dfrac{5\pi}{4}$ だから，$\dfrac{5\theta}{2}=0,\ \pi$

$\therefore\quad \boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{5}}$

参考

（2倍角，3倍角の公式を使うと…）

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$,

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

より

$\sin 2\theta+\sin 3\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=\sin\theta(2\cos\theta+3-4\sin^2\theta)$

$=\sin\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)$

したがって，$\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$ より

$\sin\theta=0,\ \cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$(\because\quad 0\leqq\cos\theta\leqq 1)$

このあと，$\theta=0$ は求められますが，

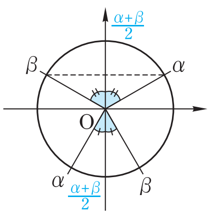
$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ から，$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ を求めることは厳しくなります．

（解Ⅱ）（$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ を使って）

$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

$\sin 3\theta=-\sin 2\theta$

$\sin 3\theta=\sin(\pi+2\theta)$



$\therefore\quad \dfrac{3\theta+(\pi+2\theta)}{2}$

$=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$

（n：整数）

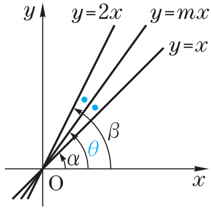
$\therefore\quad \theta=\dfrac{2n\pi}{5}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$n=0,\ 1$

よって，$\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{5}$

58

（解Ⅰ）（加法定理を使って）



$y=x,\ y=2x$,
$y=mx$ が x 軸の正方向となす角をそれぞれ
$\alpha,\ \beta,\ \theta$
$(0<\alpha<\theta<\beta<90^\circ)$
とおくと，

$\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=2,\ \tan\theta=m$

$\therefore\quad \tan 2\theta=\tan(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=-3$

次に，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ だから，

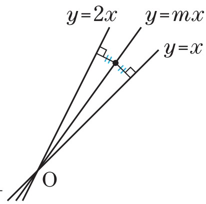
$3\tan^2\theta-2\tan\theta-3=0$

$\therefore\quad m=\tan\theta=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\quad (\because\quad m>0)$

よって，求める直線は

$\boldsymbol{y=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}x}$

（解Ⅱ）（点と直線の距離の公式を使って）



$y=mx$ 上の点
$(x,\ y)$ と2つの直線 $y=x$,
$y=2x$ との距離は等しいので

$\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}$

$\sqrt{5}\,|x-y|=\sqrt{2}\,|2x-y|$

$\sqrt{5}\,(x-y)=\pm\sqrt{2}\,(2x-y)$

$(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})y=(\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2})x$

$y=\dfrac{\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}\pm\sqrt{2}}x$ （複号同順）

$m>0$ より，$y=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}x$

$\therefore\quad y=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}x$

59

(1) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\mathbf{2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) $0\leqq x<2\pi$ より，

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$ ……①

(1)より $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq 1$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$ ……②

①，②より $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore$ $\mathbf{0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi}$

60

(1) $y=\cos^2 x-2\sin x\cos x+3\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin 2x+3(1-\cos^2 x)$

$=3-2\cos^2 x-\sin 2x$

$=-(2\cos^2 x-1)-\sin 2x+2$

$=\mathbf{-\cos 2x-\sin 2x+2}$

(2) $\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

より，

①は $y=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$ となる．

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9\pi}{4}$ だから

$-1\leqq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$\therefore$ $-\sqrt{2}\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$\therefore$ $-\sqrt{2}+2\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$\leqq\sqrt{2}+2$

よって，$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$ すなわち

$\mathbf{x=\dfrac{5\pi}{8}}$ **のとき，最大値** $\mathbf{\sqrt{2}+2}$

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち

$\mathbf{x=\dfrac{\pi}{8}}$ **のとき，最小値** $\mathbf{-\sqrt{2}+2}$

61

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=t$ とおくと

$t^2=\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2$

$\therefore$ $\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=t^2-2$

よって，$y=2t+t^2-2=(t+1)^2-3$

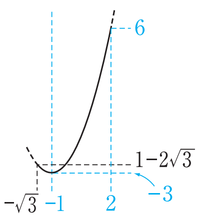
ここで，$t=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}-\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ だから

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

$\therefore$ $-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2$

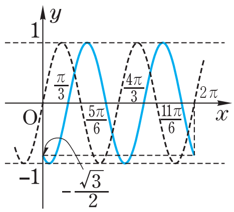


グラフより，**最大値 6，最小値 -3**

62

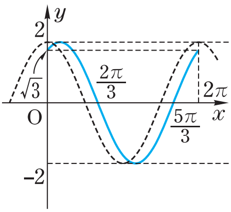
(1)　$y=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，

$y=\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．グラフは下図．



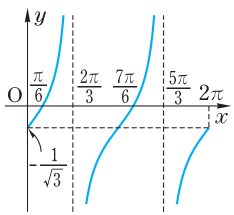
(2)　$y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\cos x$ のグラフを，x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大し，それを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．



(3)　$y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．

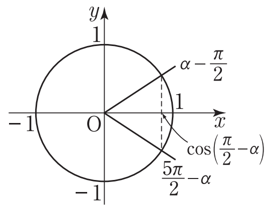


63

$\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ より，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\beta$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq 0$



$0\leqq 2\beta\leqq 2\pi$ だから，

$2\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ または，$\dfrac{5\pi}{2}-\alpha$

$\therefore\ \ \beta=\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}}$

64

(1)　$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=27-3\cdot 3=\mathbf{18}$

(2)　(ア)　4^x+4^{-x}

$=(2^x-2^{-x})^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=1+2=\mathbf{3}$

(イ)　$(2^x+2^{-x})^2$

$=4^x+4^{-x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=3+2=5$

$2^x+2^{-x}>0$ だから　$2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(ウ)　8^x-8^{-x}

$=(4^x+4^{-x})(2^x-2^{-x})+(2^x-2^{-x})$

$=3\cdot 1+1=\mathbf{4}$

(3)　$x^2-1=\dfrac{1}{4}(a+a^{-1}+2)-1$

$=\dfrac{1}{4}(a+a^{-1}-2)=\dfrac{1}{4}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$\therefore\ \ \sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}|a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}|$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) & (a>1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}) & (0<a<1)\end{cases}$$

(i) $a>1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=a^{\frac{1}{2}}$

(ii) $0<a<1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})$

$=a^{-\frac{1}{2}}$

(i), (ii)より $\boldsymbol{a>1}$ **のとき** $\boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{0<a<1}$ **のとき** $\boldsymbol{a^{-1}}$

65

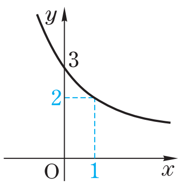
$y=2^{-x+1}+1$

$\Longleftrightarrow y-1=2^{-(x-1)}$

より，$y=2^{-x}$ のグラフを

$\boldsymbol{x}$ **軸方向に 1，** $\boldsymbol{y}$ **軸方向に 1 だけ平行移動したもの．**

そのグラフは右図．



66

$2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$2^{2x+3}=2^3\cdot2^{2x}=8t^2$

より，与えられた方程式は，

$8t^2+7t-1=0$

$\therefore\quad(8t-1)(t+1)=0$

$t>0$ だから，$t=2^x=\frac{1}{8}$

$\therefore\quad \boldsymbol{x=-3}$

67

$2^x=X,\ 3^y=Y\quad(X>0,\ Y>0)$

とおくと，与えられた連立方程式は

$\begin{cases}X+Y=17\\XY=72\end{cases}$

よって，X, Y を解にもつ 2 次方程式は

(⇨**21**)

$t^2-17t+72=0$

すなわち，$(t-8)(t-9)=0$

$\therefore\quad t=8,\ 9$

$2^x<3^y$ より $\begin{cases}2^x=8\\3^y=9\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}\boldsymbol{x=3}\\\boldsymbol{y=2}\end{cases}$

68

(1) $3^4<3^{x(x-3)}$，底$=3\ (>1)$ だから

$4<x(x-3)\qquad\therefore\quad x^2-3x-4>0$

$\therefore\quad(x-4)(x+1)>0$

$\therefore\quad \boldsymbol{x<-1,\ 4<x}$

(2) $2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$4^x=(2^x)^2=t^2$, $2^{x+1}=2t$, $2^{x+3}=8t$ より，

与えられた不等式は $t^2-2t+16<8t$

となる．

$t^2-10t+16<0$

$(t-2)(t-8)<0$

$t>0$ だから

$2<t<8\qquad$ よって，$2^1<2^x<2^3$

底$=2\quad(>1)$ より $\quad\boldsymbol{1<x<3}$

69

(1) $(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)(\log_{10}4)$

$\qquad+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2)^2+2(\log_{10}5)(\log_{10}2)+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^2$

$=\{\log_{10}(2\cdot5)\}^2=(\log_{10}10)^2=\boldsymbol{1}$

(2) $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}\pm1}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

よって，(与式)$=\log_2\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

70

(1) $\log_3 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\frac{1}{\log_2 3}+1$,

$\log_2 6=\log_2 3+1$, $\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$

より，

(与式)$=\left(\frac{1}{\log_2 3}+1-1\right)(\log_2 3+1)$

$\qquad-\log_2 3-\frac{1}{\log_2 3}$

$=1+\dfrac{1}{\log_2 3}-\log_2 3-\dfrac{1}{\log_2 3}$

$=\mathbf{1-\log_2 3}$

(2)　$B=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 72}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 8}$

$=\dfrac{\log_2 3+1}{2\log_2 3+3}=\dfrac{\boldsymbol{A+1}}{\boldsymbol{2A+3}}$

$C=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 144}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 4}{\log_2 9+\log_2 16}$

$=\dfrac{\log_2 3+2}{2\log_2 3+4}=\dfrac{A+2}{2A+4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

71

(1)　$y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}$

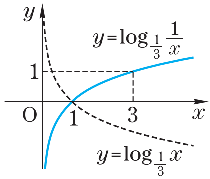
$=\log_{\frac{1}{3}}x^{-1}$

$=-\log_{\frac{1}{3}}x$

より　$y=\log_{\frac{1}{3}}x$

のグラフを x 軸

に関して対称移動したもの．上図．



(2)　$y=\log_2(2x-4)$

$=\log_2 2(x-2)$

$=\log_2 2+\log_2(x-2)$

$=1+\log_2(x-2)$

より，$y=\log_2 x$

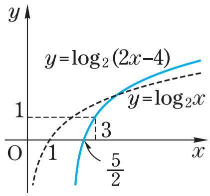
のグラフを x 軸

方向に 2，y 軸

方向に 1 だけ平

行移動したもの．

右図．



72

(1)　真数条件，底条件より，

$5x^2-6>0,\ x>0,\ x\neq1$

$\therefore\quad \dfrac{\sqrt{30}}{5}<x$　……①

このとき，与えられた不等式は

$\log_x(5x^2-6)=\log_x x^4$

$\therefore\quad 5x^2-6=x^4$

$(x^2-2)(x^2-3)=0$

$x^2=2,\ 3$

①より，$x=\sqrt{\mathbf{2}},\ \sqrt{\mathbf{3}}$

(2)　真数条件，底条件より，

$x>0,\ x\neq1$　……①

このとき，与えられた不等式は

$\log_2 x+2\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}-3=0$

$\log_2 x+\dfrac{2}{\log_2 x}-3=0$

$\log_2 x=t$ とおくと，

$t^2-3t+2=0$　$\therefore$　$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore$　$\log_2 x=1,\ 2$　よって，$x=\mathbf{2},\ \mathbf{4}$

（これは①をみたす）

73

$\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$,

$\log_4 y=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 y$ だから

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと

与えられた連立方程式は $\begin{cases}X+Y=3\\XY=2\end{cases}$

よって，X，Y を解にもつ 2 次方程式は

$t^2-3t+2=0$

すなわち，$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\quad t=1,\ 2$

よって，$\begin{cases}X=1\\Y=2\end{cases}$　または　$\begin{cases}X=2\\Y=1\end{cases}$

すなわち，

$\begin{cases}\log_2 x=1\\\log_2 y=2\end{cases}$　または　$\begin{cases}\log_2 x=2\\\log_2 y=1\end{cases}$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x=2}\\\boldsymbol{y=4}\end{cases}$　**または**　$\begin{cases}\boldsymbol{x=4}\\\boldsymbol{y=2}\end{cases}$

74

(1)　$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$,

$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$

よって，与えられた不等式は

$12\times\dfrac{1}{4}(\log_2 x)^2-\dfrac{7}{2}\log_2 x-10>0$

$\therefore\quad 6(\log_2 x)^2-7\log_2 x-20>0$

$\log_2 x=t$ とおくと，

$6t^2-7t-20>0$,
$(3t+4)(2t-5)>0$

$\therefore \quad t<-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2}<t$

ゆえに，$\log_2 x<-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2}<\log_2 x$

$\therefore \quad \log_2 x<\log_2 2^{-\frac{4}{3}},\ \log_2 2^{\frac{5}{2}}<\log_2 x$

底$=2$ (>1) より

$x<2^{-\frac{4}{3}},\ 2^{\frac{5}{2}}<x$

xは自然数だから，$x\geqq 1$

$\therefore \quad x>\sqrt{32}$

$5<\sqrt{32}<6$ より，求めるxは，**6**

(2) 真数条件より，$x>0$

このとき，与えられた不等式は

$2^0<2^{-2\log_{\frac{1}{2}}x}<2^4$,

底$=2$ (>1) より，$0<-2\log_{\frac{1}{2}}x<4$

$\therefore \quad -2<\log_{\frac{1}{2}}x<0$

$\therefore \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}1$

底$=\dfrac{1}{2}$ (<1) より $\quad 1<x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$\therefore \quad \boldsymbol{1<x<4}$ （これは $x>0$ をみたす）

75

$\log_{10}18^{20}=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)$
$=20\times(0.3010+2\times0.4771)=25.104$

$\therefore \quad 25<\log_{10}18^{20}<26$

よって，18^{20} は **26 桁**の整数.

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}=-30(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=-30\times(0.3010+0.4771)=-23.343$

$\therefore \quad -24<\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}<-23$

よって，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}$ は**小数第 24 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

76

(1) $2^{10}=1024,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$

$\therefore \quad 3^6<2^{10}<3^7 \qquad$ よって，$l=\boldsymbol{6}$

(2) $10A=10\log_3 2=\log_3 2^{10}$

ここで，(1)より，$3^6<2^{10}<3^7$ だから

$\log_3 3^6<\log_3 2^{10}<\log_3 3^7$

$\therefore \quad 6<10A<7$

よって，$10A$ の一の位の数字は **6**

(3) (2)より，$0.6<A<0.7$

よって，Aの小数第 1 位の数字は **6**

77

(A) (1) $7^{8x}+2401^{-2x}$

$=(49^x)^4+(49^{-x})^4$

であり，

$49^{2x}+49^{-2x}=(49^x+49^{-x})^2-2=a^2-2$

より

与式$=(49^{2x}+49^{-2x})^2-2$

$=(a^2-2)^2-2=\boldsymbol{a^4-4a^2+2}$

(2) $49^{2x}>0,\ 49^{-2x}>0$ だから，

相加平均≧相乗平均 より

$a^2=49^{2x}+49^{-2x}+2$

$\geqq 2\sqrt{49^{2x}\cdot 49^{-2x}}+2=2+2=4$

$\therefore \quad a^2\geqq 4$ （等号は，$x=0$ のとき成立）

そこで，$y=a^4-4a^2+2$ とおくと，

$y=(a^2-2)^2-2$

よって，$a^2=4$ のとき，すなわち

$x=0$ のとき**最小値 2**

(B) (1) $1\leqq x\leqq 81$，底$=3$ (>1) より，

$\log_3 1\leqq \log_3 x\leqq \log_3 81$

$\therefore \quad 0\leqq \log_3 x\leqq 4 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{0\leqq t\leqq 4}$

(2) $f(x)=(\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 9)$

$=(\log_3 x)(\log_3 x-2)$

より，$y=t(t-2)$ とおくと，

$y=(t-1)^2-1$

(1)より，$t=4$ すなわち $x=81$ のとき

最大値 8

78

$a^{10}=(2^{\frac{4}{5}})^{10}=2^8=256$,

$b^{10}=(3^{\frac{1}{2}})^{10}=3^5=243$

$\therefore \quad b^{10}<a^{10}$ すなわち，$b<a$ ……①

次に，$b^6=(3^{\frac{1}{2}})^6=3^3=27$,

$c^6=(4^{\frac{1}{3}})^6=4^2=16$

$\therefore\quad c^6 < b^6$　すなわち，$c < b$　……②

①，②より，a，b，c を小さい順に並べると，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$

79

$$\frac{3}{2}\log_3 2 = \frac{1}{2}\log_3 2^3 = \frac{1}{2}\times\log_3 8$$

ここで，$\log_3 8 < \log_3 9 = 2$ だから，

$$\frac{3}{2}\log_3 2 < 1$$

また，

$$2^{-0.3}\times 3^{0.2} = 2^{-\frac{3}{10}}\times 3^{\frac{2}{10}}$$

$$= (2^{-3}\times 3^2)^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{10}} > 1$$

よって，小さい順に

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}\log_3 2,\ 1,\ 2^{-0.3}\times 3^{0.2}}$$

80

①，㋑より

$$3\log_{10}2 < 4\log_{10}3 - 1 < 4\times\frac{12}{25} - 1 = \frac{23}{25}$$

$$\therefore\quad \log_{10}2 < \frac{23}{75}$$

(1)の結果と合わせると，

$$\frac{3}{10} < \log_{10}2 < \frac{23}{75}$$

81

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = \boldsymbol{1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-a+1)}{x(x-a)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to a}\frac{x-a+1}{x} = \boldsymbol{\frac{1}{a}}$

82

$x\to 1$ のとき，分母 $\to 0$

だから，極限値が存在するためには，

$x\to 1$ のとき，分子 $\to 0$

よって $-a-b-1=0$

$\therefore\quad a+b=-1$

このとき，

$$x^2-(a+b)x-2 = x^2+x-2$$
$$= (x+2)(x-1)$$

$\therefore\quad \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+a)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+a} = \frac{3}{a+1}$

$\therefore\quad \dfrac{3}{a+1} = -\dfrac{1}{3}$

よって，$\boldsymbol{a=-10}$，$\boldsymbol{b=9}$

逆に，このとき，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-11x+10} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-10} = -\frac{1}{3}$$

となり，確かに適する．

83

(1)　$y' = (x^3)' - (2x^2)' + (4x)' - (2)'$

$= \boldsymbol{3x^2-4x+4}$

(2)　$y' = 4\cdot 3(3x+2)^3 = \boldsymbol{12(3x+2)^3}$

84

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$　だから

$f'(1) = 3+2a+b = 2$

$\therefore\quad 2a+b=-1$　……①

$f'(2) = 12+4a+b = 11$

$\therefore\quad 4a+b=-1$　……②

①，②より，$\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=-1}$

85

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3)\ \text{より}$$

$$\frac{a(x_2{}^2-x_1{}^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = 2ax_3+b$$

$\therefore\quad a(x_2+x_1)+b = 2ax_3+b$

$(\because\quad x_1 \neq x_2)$

$$\therefore\quad x_3 = \boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

86

$f'(x) = 2x-4$，$f(1)=2$，$f'(1)=-2$

より点 $(1,\ 2)$ における接線は

$$y-2=-2(x-1)$$
$\therefore\ \ y=-2x+4$ ……①

$f(3)=2$, $f'(3)=2$ より点 $(3,\ 2)$ における接線は

$$y-2=2(x-3)$$
$\therefore\ \ y=2x-4$ ……②

①，②を連立させて解くと，$x=2$，$y=0$

よって，求める交点は $(\mathbf{2},\ \mathbf{0})$

87

接点を $\mathrm{T}(t,\ t^2-4t+5)$ とおくと，

$f'(x)=2x-4$ より T における接線は

$$y-(t^2-4t+5)=(2t-4)(x-t)$$
$$\therefore\ \ y=(2t-4)x-t^2+5$$

これが $(1,\ 0)$ を通るので，

$0=2t-4-t^2+5$　$\therefore\ \ t^2-2t-1=0$

$\therefore\ \ t=1\pm\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(\sqrt{2}-1)x-2\sqrt{2}+2,}$$
$$\boldsymbol{y=-2(\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}+2}$$

88

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ とおくと，

$f'(x)=2ax+b$ だから，与式に代入して

$(x-1)(2ax+b)=ax^2+bx+c+(x-1)^2$

$\therefore\ \ 2ax^2+(b-2a)x-b$

$=(a+1)x^2+(b-2)x+c+1$

これは，x についての恒等式だから，係数を比較して

$2a=a+1$ ……①

$b-2a=b-2$ ……②

$-b=c+1$ ……③

①より $a=1$．また，$f'(1)=-1$ より，

$f'(1)=2+b=-1$　$\therefore\ \ b=-3$

③より $c=2$

$\therefore\ \ f(x)=\boldsymbol{x^2-3x+2}$

89

$f(x)=-2x^3+6x+2$ より

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	6	↘

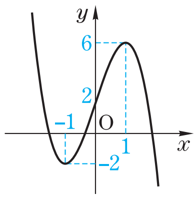
よって，**極大値　6**

$(x=1$ のとき$)$

極小値 -2

$(x=-1$ のとき$)$

また，グラフは右図．



90

P の x 座標を t とおくと

$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$ より

$$\begin{cases} t^2+2=-t^2+at \\ 2t=-2t+a \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 2t^2-at+2=0 & \cdots\cdots① \\ 4t=a & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より，$t^2=1$　$\therefore\ \ t=\pm1$

$t=1$ のとき，$a=4$，

$t=-1$ のとき，$a=-4$

よって，$\boldsymbol{a=4}$ のとき，$\mathbf{P(1,\ 3)}$

$\boldsymbol{a=-4}$ のとき，$\mathbf{P(-1,\ 3)}$

91

$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ より，

$f'(x)=3x^2+6ax+3b$

$x=2,\ 3$ で極値をとるので，

$f'(2)=0$，$f'(3)=0$

$$\therefore\ \begin{cases} 12+12a+3b=0 & \cdots\cdots① \\ 27+18a+3b=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より，$\boldsymbol{a=-\dfrac{5}{2}}$，$\boldsymbol{b=6}$

このとき，$f'(x)=3(x-2)(x-3)$ となり，確かに適する．

$f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+18x$ より，

$$f(2)=14,\ \ f(3)=\frac{27}{2}$$

よって，**極大値 14，極小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{2}}$**

92

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+3x-1$ より

$f'(x)=3x^2-6ax+3=3(x^2-2ax+1)$

よって，$f(x)$ が極値をもつためには，$x^2-2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことで，これは判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}>0$ となることであるから

$a^2-1>0$　　$\therefore$　$(a-1)(a+1)>0$

$\therefore$　$\boldsymbol{a<-1,\ 1<a}$

(2)　$x=2$ で極小となるので，

$f'(2)=0$　　$\therefore$　$4-4a+1=0$

$\therefore$　$a=\dfrac{5}{4}$

このとき $f(x)=x^3-\dfrac{15}{4}x^2+3x-1$

より，

$f'(x)=\dfrac{3}{2}(2x-1)(x-2)$ となり

$x=2$ で極小，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大．

$f(2)=-2,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{16}$ より，

$a=\dfrac{5}{4}$，**極小値** -2，**極大値** $-\dfrac{5}{16}$

93

$f(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$

より

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

よって，$-1\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$ の増減は表のようになる．

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	50

したがって，$-1\leqq x\leqq 4$ において

最大値 50　($x=4$ のとき)，

最小値 -4 ($x=1$ のとき)

94

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h$

$=\dfrac{\pi}{3}r^2(a-r)$

$=\dfrac{\pi}{3}ar^2-\dfrac{\pi}{3}r^3$

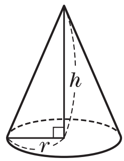
$V'=\dfrac{2}{3}\pi ar-\pi r^2=\pi r\left(\dfrac{2}{3}a-r\right)$

ここで，$h=a-r>0$ より

$0<r<a$

よって，V の増減は表のようになる．

r	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$	a
V'	0	$+$	0	$-$	
V		↗	最大	↘	



したがって，$r=\dfrac{2}{3}a$ のとき

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\pi}{81}a^3}$

95

$x^3-4x+a=0$　　……①

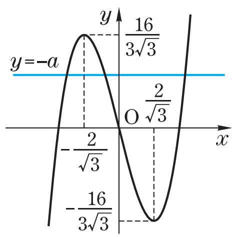
$\Longleftrightarrow x^3-4x=-a$

より $\begin{cases} y=x^3-4x & \cdots\cdots② \\ y=-a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

のグラフで考える．②の右辺を $f(x)$ とおく．

$f'(x)=3x^2-4=(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$

より②のグラフは次図のようになる．



①の解がすべて実数となるには，②と③のグラフが接するときも含めて 3 点で交

わればよいので　$-\dfrac{16}{3\sqrt{3}} \leqq -a \leqq \dfrac{16}{3\sqrt{3}}$

$\therefore\ \ \boldsymbol{-\dfrac{16\sqrt{3}}{9} \leqq a \leqq \dfrac{16\sqrt{3}}{9}}$

96

(1)　$y'=3x^2-6$ より，$\mathrm{T}(t,\ t^3-6t)$ における接線は

$y-(t^3-6t)=(3t^2-6)(x-t)$

$\therefore\ \ \boldsymbol{y=(3t^2-6)x-2t^3}$

(2)　(1)で求めた接線は $\mathrm{A}(2,\ p)$ を通るので　$p=6t^2-12-2t^3$

$\therefore\ \ \boldsymbol{p=-2t^3+6t^2-12}$　　……①

(3)　点Aから3本の接線が引けるので，①は異なる3つの実数解をもつ．
①より，$2t^3-6t^2+12+p=0$ だから，$f(t)=2t^3-6t^2+12+p$ とおくとき，$f(t)$ は極大値，極小値をもち，

(極大値)×(極小値)<0

が成りたつ．

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

より　$f(0)f(2)<0$ であればよいので，

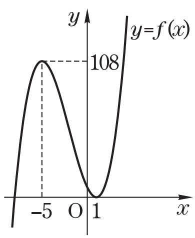
$(12+p)(4+p)<0$

$\therefore\ \ \boldsymbol{-12<p<-4}$

97

$f(x)=(x+2)^3-27x$ とおくと
$f'(x)=3(x+2)^2-27=3(x+5)(x-1)$
$f'(x)=0$ を解くと，$x=-5,\ 1$
よって，$f(x)$ の増減は表のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗



ゆえに，$x=1$ で最小値 0

$\therefore\ \ f(x) \geqq 0$

すなわち，

$(x+2)^3 \geqq 27x$

($x>0$ のとき)

98

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(a+2)x^2+6ax+a$

とおくと

$f'(x)=3x^2-3(a+2)x+6a$

$=3(x-2)(x-a)$

$0<a<2$ だから，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ の増減は表のようになる．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	a	↗		↘	$7a-4$	↗

最小値$\geqq 0$ であればよいので，$a>0$ より $7a-4 \geqq 0$　　$\therefore\ \ \boldsymbol{\dfrac{4}{7} \leqq a < 2}$

99

(1)　$\displaystyle\int (x^2-x+3)\,dx$

$\boldsymbol{=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x+C}$

(2)　$\displaystyle\int (x+2)^2\,dx=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(x+2)^3+C}$

(3)　$\displaystyle\int (3x-1)^2\,dx=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}(3x-1)^3+C$

$\boldsymbol{=\dfrac{1}{9}(3x-1)^3+C}$

(Cはいずれも積分定数)

100

$f'(x)=3x^2-2x+1$ より，
$f(x)=x^3-x^2+x+C$　(C：積分定数)
$f(-1)=3$ より，$-1-1-1+C=3$

$\therefore\ \ C=6$

よって，$f(x)=\boldsymbol{x^3-x^2+x+6}$

101

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} (6x^2-x+2)\,dx$

$=\left[2x^3-\dfrac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}$

$=\left(2-\dfrac{1}{2}+2\right)-\left(-2-\dfrac{1}{2}-2\right)=8$

注 実際には

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2-x+2)\,dx=2\int_{0}^{1}(6x^2+2)\,dx$

$=2\Big[2x^3+2x\Big]_0^1=2(2+2)=8$

を計算するのと同じ結果である.

(2) $\displaystyle\int_0^2(x-3)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^2$

$=-\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{27}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{26}{3}}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x-1)(x+2)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}\{(x+2)-3\}(x+2)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{3}\{(x+2)^2-3(x+2)\}\,dx$

$=\left[\dfrac{(x+2)^3}{3}-\dfrac{3}{2}(x+2)^2\right]_{-2}^{3}$

$=\dfrac{125}{3}-\dfrac{75}{2}=\mathbf{\dfrac{25}{6}}$

(4) $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$ とおくと, α, β は $x^2-2x-1=0$ の解より

$\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx$

$\displaystyle=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

（∵ 101(2)）

$=-\dfrac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3$

$=\mathbf{-\dfrac{8}{3}\sqrt{2}}$

102

(1) $|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$

$=\begin{cases} x^2+x-2 & (1\leqq x\leqq 2)\\ -(x^2+x-2) & (-2\leqq x\leqq 1)\end{cases}$

$\displaystyle\therefore\ \int_{-2}^{2}|x^2+x-2|\,dx$

$\displaystyle=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$

$\displaystyle\qquad+\int_1^2(x^2+x-2)\,dx$

$=-\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}$

$\quad+\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}$

$=-2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-2\right)+\left(-\dfrac{8}{3}+2+4\right)$

$\quad+\left(\dfrac{8}{3}+2-4\right)=\mathbf{\dfrac{19}{3}}$

(2) (i) **$0<a\leqq 1$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|$

$=\begin{cases} (x-a)(x-1) & (-1\leqq x\leqq a)\\ -(x-a)(x-1) & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$

$\displaystyle\therefore\ \int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{a}(x-a)(x-1)\,dx$

$\displaystyle\qquad-\int_{a}^{1}(x-a)(x-1)\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{a}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx$

$\displaystyle\quad-\int_{a}^{1}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx$

$=\left[\dfrac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]_{-1}^{a}$

$\quad-\left[\dfrac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\dfrac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{1}$

$=\dfrac{(a+1)^3}{3}-\dfrac{(a-1)(a+1)^2}{2}$

$\quad-\left\{-\dfrac{(a-1)^3}{3}+\dfrac{(a-1)^3}{2}\right\}$

$=\mathbf{\dfrac{-a^3+3a^2+3a+3}{3}}$

(ii) **$1<a$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|=(x-a)(x-1)$

$(-1\leqq x\leqq 1)$ より

$\displaystyle\therefore\ \int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{1}\{x^2-(a+1)x+a\}\,dx$

$\displaystyle=2\int_0^1(x^2+a)\,dx$

$=2\left(\dfrac{1}{3}+a\right)$

$=\mathbf{2a+\dfrac{2}{3}}$

103

(1)　$x=a$ を両辺に代入すると，

$0=a^2-2a-3$

$\therefore\ (a-3)(a+1)=0$

$a>0$ より，$a=\mathbf{3}$

また，両辺を x で微分して，

$f(x)=\mathbf{2x-2}$

(2)　$f(x)=\int_1^x (t^2-3t-4)\,dt$　……①

①の両辺を x で微分すると，

$f'(x)=x^2-3x-4$

$\therefore\ f(x)=\int (x^2-3x-4)\,dx$

$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+C$

とおける．ここで，①の両辺に $x=1$ を代入すると，$f(1)=0$

であり，$f(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-4+C$ であるから

$C-\frac{31}{6}=0$　　$\therefore\ C=\frac{31}{6}$

よって，$f(x)=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{31}{6}}$

104

$\int_0^3 f(t)\,dt=a$　(a：定数) とおくと，

$f(x)=2x^2+ax-5$

$\therefore\ a=\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3 (2t^2+at-5)\,dt$

$=3+\frac{9}{2}a$

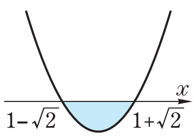
よって，$a=-\frac{6}{7}$

$\therefore\ f(x)=\boldsymbol{2x^2-\frac{6}{7}x-5}$

105

$x^2-2x-1=0$ を解くと

$x=1\pm\sqrt{2}$



よって S は図の色の部分の面積．

$\therefore\ S=-\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (x^2-2x-1)\,dx$

$=\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$

106

(1)　$x^2=x+2$ を解くと　$x^2-x-2=0$

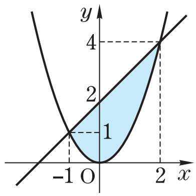
$\therefore\ (x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=2,\ -1$

よって求める交点は，

$\mathbf{(2,\ 4),\ (-1,\ 1)}$

(2)　(1)より，求める面積 S は右図の色の部分．



$\therefore\ S=\int_{-1}^2 \{(x+2)-x^2\}\,dx$

$=-\int_{-1}^2 (x^2-x-2)\,dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2$

$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

107

(1)　$2x^2-3x-5=|x^2-x-2|$　……①

を解く．①の右辺は 0 以上であることより

$2x^2-3x-5\geqq 0$

$(2x-5)(x+1)\geqq 0$

$\therefore\ x\leqq -1,\ \frac{5}{2}\leqq x$　……②

②のとき，①は

$2x^2-3x-5=x^2-x-2$　……③

または

$2x^2-3x-5=-(x^2-x-2)$　……④

となる．

③より　$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

これらは②をみたす．

④より　$3x^2-4x-7=0$

$(3x-7)(x+1)=0$

$x=-1,\ \dfrac{7}{3}$

②をみたすのは　$x=-1$

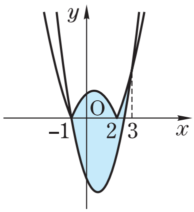
以上より①の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$

注　①は絶対値の中身の符号で場合分けをして解いてもよい．

(2)　(1)より２つの曲線の交点は

$(-1,\ 0),\ (3,\ 4)$

$$|x^2-x-2| = \begin{cases} -(x^2-x-2) & (-1 \leqq x \leqq 2) \\ x^2-x-2 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$



よって，求める面積 S は右図の色の部分．

$$\therefore\ S=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)-(2x^2-3x-5)\}dx+\int_{2}^{3}\{(x^2-x-2)-(2x^2-3x-5)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(3x-7)\,dx-\int_{2}^{3}(x-3)(x+1)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}\{3(x+1)^2-10(x+1)\}dx-\int_{2}^{3}\{(x-3)^2+4(x-3)\}dx$$

$$=-\Big[(x+1)^3-5(x+1)^2\Big]_{-1}^{2}-\left[\frac{(x-3)^3}{3}+2(x-3)^2\right]_{2}^{3}$$

$$=-(27-45)-\left(\frac{1}{3}-2\right)=\boldsymbol{\frac{59}{3}}$$

108

(1)　$4-x^2=a-x$

を整理して，$x^2-x+a-4=0$ ……③

③の判別式を D とすると，

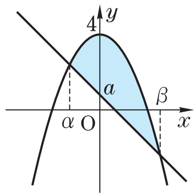
$D=1-4(a-4)=17-4a$

①，②が異なる２点で交わる条件は

$17-4a>0$

$\therefore\ \boldsymbol{a<\dfrac{17}{4}}$

(2)　右図の色の部分が面積 S を表すので，③の２解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(4-x^2)-(a-x)\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ (\beta-\alpha)^3=8$

$(\beta-\alpha)^2=D=4$ より

$17-4a=4$　　$\therefore\ \boldsymbol{a=\dfrac{13}{4}}$

109

(1)　①上の点 $(t,\ t^2-6t+4)$ における接線は，$y'=2x-6$ より

$y-(t^2-6t+4)=(2t-6)(x-t)$

$\therefore\ y=2(t-3)x-t^2+4$

これが原点を通るので，

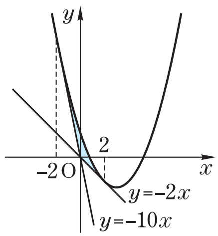
$0=-t^2+4$

$\therefore\ t=\pm 2$

求める接線は，

$\boldsymbol{y=-2x}$，

$\boldsymbol{y=-10x}$



(2)　右図の色の部分が求める面積 S で，

$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^2-6x+4)-(-10x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(x^2-6x+4)-(-2x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$=\dfrac{8}{3}+\dfrac{8}{3}=\mathbf{\dfrac{16}{3}}$

110

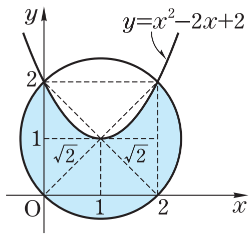
(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ より，

$f'(x)=2x+a$

$f(1)=1$，$f'(1)=0$ より，

$\begin{cases}1+a+b=1\\2+a=0\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}\mathbf{a=-2}\\\mathbf{b=2}\end{cases}$

(2)　円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$



$$S=\int_0^2(x^2-2x+2)dx$$
$$+3\left\{\frac{\pi}{4}\times(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right\}$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^2+3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}}$$

111

(1)　$a+7d=22$　　……①

$a+19d=-14$　　……②

①，②より，$\mathbf{d=-3}$，$\mathbf{a=43}$

(2)　$a_n=43-3(n-1)=\mathbf{46-3n}$

$a_n>0$ より，$n<\dfrac{46}{3}$

n は自然数だから，

$\mathbf{1\leqq n\leqq15}$

112

(1)　$a+4d=84$　　……①

$a+19d=-51$　　……②

①，②より，$\mathbf{d=-9}$，$\mathbf{a=120}$

(2)　$a_n=120-9(n-1)=129-9n$

$S_n=\dfrac{n}{2}(120+129-9n)$

$=\mathbf{\dfrac{n(249-9n)}{2}}$

(3)　$a_n>0\Longleftrightarrow n<\dfrac{129}{9}$

よって，a_1～a_{14} までは正で，a_{15} 以後はすべて負だから，

$\mathbf{n=14}$ のとき，S_n が最大で，最大値は，

$S_{14}=\dfrac{14(249-9\times14)}{2}=\mathbf{861}$

113

(1)　$a_3=125\div5=25$,

$a_5=504\div9=56$

であるから，初項を a，公差を d とすると

$\begin{cases}a+2d=25\\a+4d=56\end{cases}$　　……①　……②

①，②より，$d=\mathbf{\dfrac{31}{2}}$，$\mathbf{a=-6}$

(2)　$a_n=-6+\dfrac{31}{2}(n-1)=\dfrac{31}{2}n-\dfrac{43}{2}$

であるから $a_{10}=\dfrac{267}{2}$，$a_{20}=\dfrac{577}{2}$ より，

$a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}=\dfrac{11}{2}(a_{10}+a_{20})=\mathbf{2321}$

114

2 でわると 1 余り，3 でわると 2 余る自然数は，6 でわると 1 不足する自然数だから，小さい順に，5，11，17，… と並んでおり，これは初項 5，公差 6 の等差数列を表すので，一般項は

$5+6(n-1)=6n-1$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

$6n-1\leqq100$ より，$n\leqq16$

よって，**初項 5**，**公差 6**，**項数 16** である．

115

(1)　$ar=4$　　……①

$ar^5=64$　　……②

となり，②÷①　より　$r^2=4$

$\therefore\quad r=\pm 2,\ a=\pm 2$ **（複号同順）**

(2)　$\boldsymbol{r=2}$ **のとき，**

$$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$$

$\boldsymbol{r=-2}$ **のとき，**

$$S_n=\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=-\boldsymbol{\frac{(-2)^{n+1}+2}{3}}$$

116

$$a(1+r+r^2)=80 \qquad \cdots\cdots①$$

$$a(r^3+r^4+r^5)=640 \qquad \cdots\cdots②$$

②÷①　より　$r^3=8$

$\therefore\quad \boldsymbol{r=2}$

117

$\alpha<0,\ \beta>0,\ \alpha\beta<0$　より，3 数が等比数列をなすとき，β が等比中項であるから

$$\beta^2=\alpha^2\beta$$

$\therefore\quad \beta=\alpha^2 \qquad \cdots\cdots①\quad (\because\ \beta\neq 0)$

また，等差数列をなすとき，等差中項は $\alpha\beta$ または α

$\therefore\quad 2\alpha\beta=\alpha+\beta \qquad \cdots\cdots②$

または　$2\alpha=\alpha\beta+\beta \qquad \cdots\cdots③$

①，②より　$(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)}$

①，③より　$(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(-2,\ 4)}$

118

与えられた数列の一般項は，

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\boldsymbol{n^2}$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

119

与えられた数列の一般項は，

$$1+(-3)+(-3)^2+\cdots+(-3)^{n-1}$$

$$=\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}}$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{1-(-3)^k\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}(-3)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[n-\frac{(-3)\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}\right]$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{16}\{4n+3+(-3)^{n+1}\}}$$

120

与えられた数列の一般項は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$

121

(1)　$S=1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$

$2S=1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$\therefore\quad S-2S$

$=2+2\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$=2(2^{n+1}-1)-4-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$=-6-(2n-3)\cdot 2^{n+1}$

$\therefore\quad S=\boldsymbol{(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6}$

(2)　$T=1\cdot 2^1+2\cdot 2^3+3\cdot 2^5+\cdots+n\cdot 2^{2n-1}$

$2^2T=1\cdot 2^3+2\cdot 2^5+\cdots+(n-1)\cdot 2^{2n-1}+n\cdot 2^{2n+1}$

$\therefore\quad T-2^2T$

$=2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}-n\cdot 2^{2n+1}$

$$=\frac{2(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 2^{2n+1}$$

$$=-\frac{2}{3}-\left(n-\frac{1}{3}\right)\cdot 2^{2n+1}$$

$$\therefore\quad T=\boldsymbol{\frac{2}{9}+\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot 2^{2n+1}}$$

122

(1)　与えられた数列の階差数列をとると，

　$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots$

となり，初項 1，公差 3 の等差数列．

よって，求める数列の一般項は，

$n\geqq 2$ のとき

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+\frac{(n-1)(1+3n-5)}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3n^2-7n+6}{2}}$$

これは $n=1$ のときも成立．

次に初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2-7k+6}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{4}n(n+1)+3n$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2-2n+3)}$$

(2)　与えられた数列の階差数列をとると，

　$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$

となり，初項 1，公比 3 の等比数列．

よって，求める数列の一般項は，

$n\geqq 2$ のとき

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1-3^{n-1}}{1-3}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}}{2}+\frac{1}{2}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

次に初項から第 n 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^{k-1}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot 3^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-3^n)}{1-3}+\frac{1}{2}n=\boldsymbol{\frac{3^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n}$$

123

$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ より，$\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 2^{n-1}

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{2^{n-1}}$$

124

与えられた漸化式は，$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$ と変形できるので，

$$a_n+3=2^{n-1}(a_1+3)=2^{n+1}$$

よって，$a_n=\boldsymbol{2^{n+1}-3}$

125

(1)　$a_n=b_n-\alpha n-\beta$,

　$a_{n+1}=b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta$

を代入すると

$b_{n+1}=3b_n-2(\alpha+3)n+\alpha-2\beta-5$

となり，これが等比数列を表す漸化式となるためには，

　$\alpha+3=0,\ \alpha-2\beta-5=0$

$\therefore\quad \alpha=\boldsymbol{-3},\ \beta=\boldsymbol{-4}$

(2)　(1)より　$b_{n+1}=3b_n$

$\therefore\quad b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}}$

(3)　$a_n=b_n+3n+4=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}+3n+4}$

126

(1)　与えられた漸化式の両辺を 3^{n+1} でわると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(2)　$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ より，

$\{b_n\}$ の階差数列の一般項は，$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$=\frac{a_1}{3}+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=1+\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

(3)　$a_n=3^n b_n=3^n\left\{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$$=\boldsymbol{5\cdot 3^{n-1}-2^n}$$

127

(1)　与式より　$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{3-a_n}$　……①

また，$\dfrac{1}{a_n-2}=b_n$ より，$a_n=2+\dfrac{1}{b_n}$

よって，①に代入すると，

$$2+\frac{1}{b_{n+1}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{b_n}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n-1}$$

(2)　$b_{n+1}-b_n=-1$ より数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列．

よって，$b_n=-1-(n-1)=\boldsymbol{-n}$

(3)　$\dfrac{1}{a_n-2}=-n$ より

$$a_n=2+\frac{1}{-n}=\boldsymbol{\frac{2n-1}{n}}$$

128

(1)　(i)　$T_n=S_n+\alpha n+\beta$ とおき，与式に代入すると

$T_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta-3(T_n-\alpha n-\beta)=n+1$

$\therefore$　$T_{n+1}-3T_n+(2\alpha-1)n-\alpha+2\beta-1=0$

ここで $2\alpha-1=0$，$-\alpha+2\beta-1=0$ をみたす α，β を考えると，

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{3}{4}$$

そこで $T_n=S_n+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{4}$ と定めると

$$T_{n+1}=3T_n$$

$$\therefore\quad T_n=\left(S_1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{4}\right)\cdot 3^{n-1}$$

$$=\frac{9}{4}\cdot 3^{n-1}$$

よって，

$$S_n=T_n-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$

(ii)　$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

(2)　(i)　$n\geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k-\sum_{k=1}^{n-1} ka_k=na_n$$

であるから　$na_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

よって，$n\neq 1$ だから

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}}\quad (n\geqq 2)$$

(ii)　$b_n=na_n$ とすると，(i)より

$b_n=b_{n-1}$　$(n\geqq 2)$

$\therefore$　$b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1=1\cdot a_1=1$

$\therefore$　$b_n=na_n=1$　　$\therefore$　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{n}}$

これは，$n=1$ のときも成立．

129

(1)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

より　$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

与えられた漸化式と係数を比較して，

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$$

$\therefore$　$(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(1,\ 2),\ (2,\ 1)}$

(2)　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ として

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

$\therefore$　$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)2^{n-1}=2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 1 + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = \mathbf{2^{n-1}}$$

これは，$n=1$ のときも成立.

130

(1) $a_{n+1} + pb_{n+1}$

$= (2a_n + 3b_n) + p(a_n + 4b_n)$

$= (2+p)a_n + (3+4p)b_n$ ……①

より，数列 $\{a_n + pb_n\}$ が等比数列になるためには，

$1 : p = (2+p) : (3+4p)$

$p(2+p) = 3 + 4p$

$p^2 - 2p - 3 = 0$

$(p-3)(p+1) = 0$

$\therefore \quad \mathbf{p = 3,\ -1}$

(2) $p=3$ のとき，①は

$a_{n+1} + 3b_{n+1} = 5a_n + 15b_n$

$\therefore \quad a_{n+1} + 3b_{n+1} = 5(a_n + 3b_n)$

ここで $c_n = a_n + 3b_n$ とおくと，

$c_{n+1} = 5c_n$

$c_1 = a_1 + 3b_1 = 2 + 3\cdot1 = 5$ より

数列 $\{c_n\}$ は初項 5，公比 5 の等比数列である.

よって，$c_n = 5\cdot5^{n-1} = 5^n$

$\therefore \quad a_n + 3b_n = 5^n$ ……②

また，$p=-1$ のとき，①は

$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$

ここで，$d_n = a_n - b_n$ とおくと

$d_{n+1} = d_n$

$d_1 = a_1 - b_1 = 2 - 1 = 1$ より，数列 $\{d_n\}$ は初項 1，公比 1 の等比数列である.

よって，$d_n = 1$

$\therefore \quad a_n - b_n = 1$ ……③

②−③ より　$b_n = \mathbf{\dfrac{5^n - 1}{4}}$

③より　$a_n = 1 + b_n = \mathbf{\dfrac{5^n + 3}{4}}$

131

(1) 第 $(n-1)$ 群の最後の数は，最初から数えて

$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (番目)

よって，第 n 群の最初の数は，

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 = \mathbf{\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)}$$

(2) 第 n 群は，初項 $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$，公差 1，項数 n の等差数列だから，その和は，

$\dfrac{1}{2}n\{(n^2-n+2) + (n-1)\cdot1\}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{2}n(n^2+1)}$

(3) 100 は第 n 群に含まれているとすると

$$\frac{1}{2}(n^2-n+2) \leqq 100 < \frac{1}{2}\{(n+1)^2 - (n+1) + 2\}$$

これをみたす n は 14 であるから**第 14 群**にあり，この群の最初の数は 92 であるから **9 番目**になる.

132

(1) n が 2^{n-1} 個あるので，総和は

$n \times 2^{n-1} = \mathbf{n\cdot2^{n-1}}$

(2) 100 項目が第 n 群にあるとすると，第 $(n-1)$ 群の最後の数は

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} = \dfrac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} - 1$

(項目) であるから

$2^{n-1} - 1 < 100 \leqq 2^n - 1$ が成りたつ.

$n=7$ のとき

$2^{n-1} - 1 = 2^6 - 1 = 63$

$2^n - 1 = 2^7 - 1 = 127$

よって，求める n は 7 だから，第 100 項は第 7 群にあるので，**7** である.

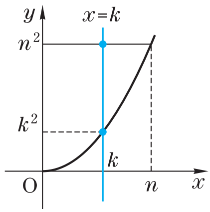
(3) (2)より第 100 項は，第 7 群の $100 - 63 = 37$ (番目) である．和は，

$1 + 2\cdot2 + 3\cdot2^2 + 4\cdot2^3 + 5\cdot2^4 + 6\cdot2^5$

$+ 7\cdot37 = \mathbf{580}$

133

(1) M 内の格子点のうち，直線 $x=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点は，
$(k,\ k^2)$,
$(k,\ k^2+1)$,
$\cdots$, $(k,\ n^2)$.



よって，$(\boldsymbol{n^2-k^2+1})$ **個**ある.

(2) 求める格子点の個数は

$$2\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)+(n^2+1) \quad \cdots\cdots ①$$

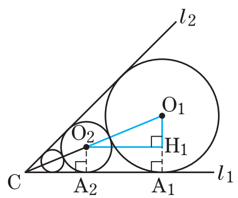
ここで，$S=\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$ とおくと

$$S=(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n(n^2+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

∴ $①=2n(n^2+1)$
$$-\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+(n^2+1)$$
$$=(2n+1)(n^2+1)-\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{3}(2n+1)\{(3n^2+3)-(n^2+n)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2-n+3)}$$

134

(1)



$O_1C=\sqrt{CA_1^2+O_1A_1^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$
であり，図から，$\triangle CA_1O_1 \backsim \triangle O_2H_1O_1$
より

$CO_1 : O_1A_1 = O_2O_1 : O_1H_1$

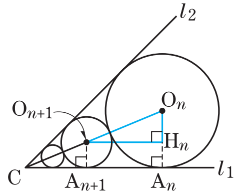
よって，

$13 : 5=(r_2+5):(5-r_2)$

∴ $5(r_2+5)=13(5-r_2)$

∴ $r_2=\boldsymbol{\dfrac{20}{9}}$

(2)



(1)と同様に，$\triangle CA_1O_1 \backsim O_{n+1}H_nO_n$
より，$CO_1 : O_1A_1 = O_{n+1}O_n : O_nH_n$
よって，

$13 : 5=(r_n+r_{n+1}):(r_n-r_{n+1})$

∴ $5(r_n+r_{n+1})=13(r_n-r_{n+1})$

∴ $\boldsymbol{r_{n+1}=\dfrac{4}{9}r_n}$

(3) (2)より $\{r_n\}$ は，初項 5，公比 $\dfrac{4}{9}$ の等比数列.

∴ $r_n=\boldsymbol{5\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}}$

135

(1) (a_1 について) カード 1 枚の色のぬり方は 3 通りなので $a_1=\boldsymbol{3}$
(a_2 について) カード 2 枚それぞれの色のぬり方は 3 通りなので，
$3^2=9$ (通り) のぬり方がある.
このうち，赤赤の 1 通りは条件に反する.
よって，$a_2=9-1=\boldsymbol{8}$

(2) $(n+2)$ 枚のカードの色のぬり方を，1 枚目のカードの色で場合分けして考える.

① 1 枚目が赤のとき，2 枚目のぬり方は青，黄の 2 通り．残り n 枚のぬり方は 3 色使えるので a_n 通り.
よって，ぬり方は $2a_n$ 通り.

② 1 枚目が青のとき，残りの $(n+1)$ 枚のぬり方は，3 色使えるので a_{n+1} 通り.

③　1枚目が黄のとき，②と同様に a_{n+1} 通り．

①，②，③は排反なので

$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n}$$

(3)　$a_8=2a_7+2a_6=2(2a_6+2a_5)+2a_6$
$=6a_6+4a_5=6(2a_5+2a_4)+4a_5$
$=16a_5+12a_4=16(2a_4+2a_3)+12a_4$
$=44a_4+32a_3=44(2a_3+2a_2)+32a_3$
$=120a_3+88a_2=120(2a_2+2a_1)+88a_2$
$=328a_2+240a_1$
$=328\times8+240\times3=\mathbf{3344}$

136

(1)　(p_1 について)

1回目に4以下の目が出ればよいので

$$p_1=\frac{4}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(p_2 について)

次の2つの場合が考えられる．

①　1回目が4以下の目で1進み
　2回目が5以上の目でさらに2進む場合

②　1回目が5以上の目で2進み
　2回目が4以下の目でさらに1進む場合

①，②は排反だから

$$p_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

(2)　サイコロを $(n+1)$ 回投げたとき，点Pの座標が奇数になるのは，次の2つの場合が考えられる．

①　サイコロを n 回投げたとき，点Pの座標が奇数で $(n+1)$ 回目に5以上の目が出る

②　サイコロを n 回投げたとき，点Pの座標が偶数で $(n+1)$ 回目に4以下の目が出る

①，②は排反だから

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+(1-p_n)\times\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}}$$

(3)　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}$ より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

137

(1)　$a_2=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$，$a_3=\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$，

$$a_4=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

よって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1}{n}}$　……(＊) と推定できる．

(2)　ｉ)　$n=1$ のとき，(＊)の右辺は0であり，与えられた条件より，$a_1=0$ であるから，$n=1$ のとき，(＊)は成りたつ．

ii)　$n=k\,(k\geqq1)$ のとき

$a_k=\dfrac{k-1}{k}$ が成りたつと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k-1}{k}}$$

$$=\frac{k}{2k-(k-1)}=\frac{k}{k+1}$$

これは，(＊)が $n=k+1$ でも成りたつことを示している．

ｉ)，ii)より，すべての自然数 n について，$a_n=\dfrac{n-1}{n}$ が成りたつ．

138

(1)　$n=1$ のとき，左辺$=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$，

右辺$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ となり成立.

$n=k$ のとき，与式が成立すると仮定すると，

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えて，

$$左辺=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$右辺=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

となり，これは与式の n に $k+1$ を代入したものである.

よって，$n=k+1$ のときも成立するので，すべての自然数 n で成立.

(2)　$n=1$ のとき，左辺$=\dfrac{1}{1^2}=1$，

右辺$=2-\dfrac{1}{1}=1$ となり成立.

$n=k$ のとき，与式が成立すると仮定すると，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots②$$

②の両辺に，$\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えると，

$$左辺=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$右辺=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$$

ここで，$\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left(2-\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\right)$

$$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

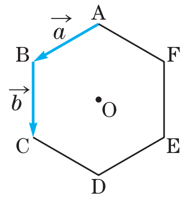
すなわち，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$$

となり $n=k+1$ のときも成立.

よって，すべての自然数 n に対して成立する.

139



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{2\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(\vec{b}-\vec{a})+\vec{b}=\boldsymbol{2\vec{b}-\vec{a}}$

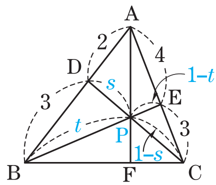
140

(1) AE＝3，DC＝2 だから，DF：FE＝DC：AE＝**2：3**

(∵ △AFE∽△CFD)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$

141



(1) BP：PE＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{7}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……①

$\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

DP：PC＝s：$(1-s)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{2(1-s)}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……②

$\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから，①，②より $1-t=\dfrac{2(1-s)}{5}$，$\dfrac{4}{7}t=s$

$\therefore\ t=\dfrac{7}{9}$，$s=\dfrac{4}{9}$

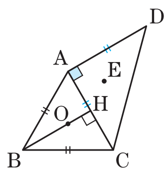
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおけて，(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

F は BC 上より $\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$ $\therefore\ k=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，BF：FC＝$\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{2:1}$

142



B から辺 AC に下ろした垂線の足を H とすると，

BH：AD＝BH：AB＝$\sqrt{3}$：2

であり，BH∥AD より，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

ここで，Oは △ABC の重心でもあるので，BO：OH=2：1

$\therefore\ \ \overrightarrow{BH}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\boldsymbol{\overrightarrow{OA}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}}$

$\therefore\ \ \overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\dfrac{1}{3}\{\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OA}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB})\}$

$(\because\ \ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0})$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}}$

143

(1)　$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=(5+4+9,\ 4-6-15)=\boldsymbol{(18,\ -17)}$

(2)　$m\vec{a}+n\vec{b}=(5m-2n,\ 4m+3n)=(3,\ -5)$

より，$\begin{cases}5m-2n=3\\4m+3n=-5\end{cases}$　$\therefore\ \ m=\boldsymbol{-\dfrac{1}{23}},\ n=\boldsymbol{-\dfrac{37}{23}}$

144

$\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ -\sqrt{5}+3),\ \vec{a}-\vec{b}=(2-x,\ -\sqrt{5}-3)$

$\therefore\ \ (2+x)(-\sqrt{5}-3)-(-\sqrt{5}+3)(2-x)=0$

$\therefore\ \ -12-2\sqrt{5}\,x=0$

よって，$x=-\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$

145

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(5,\ 3)$　……①

$\vec{a}-3\vec{b}=(-7,\ 7)$　……②

①×3+② より，$4\vec{a}=(8,\ 16)$　$\therefore\ \ \vec{a}=\boldsymbol{(2,\ 4)}$

①より，$\vec{b}=(5,\ 3)-\vec{a}=\boldsymbol{(3,\ -1)}$

(2)　$\vec{a}-2\vec{b}=(2-6,\ 4+2)=(-4,\ 6)$ より，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\boldsymbol{2\sqrt{13}}$

(3)　$\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)=\boldsymbol{\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13},\ \dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right)}$

146

$|\vec{u}|^2=(2\cos\theta+3\sin\theta)^2+(\cos\theta+4\sin\theta)^2$

$=5\cos^2\theta+20\sin\theta\cos\theta+25\sin^2\theta$

$=10\sin2\theta-20\cos^2\theta+25=10\sin2\theta-10\cos2\theta+15$

$=10\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+15$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7\pi}{4}$ だから　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

すなわち，$\theta=\dfrac{3\pi}{8}$ のとき，$|\vec{u}|$ の**最大値**$=\sqrt{10\sqrt{2}+15}=\sqrt{5(\sqrt{2}+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

147

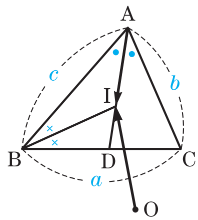
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を二等分するベクトルの 1 つは $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

これを $\vec{c}$ とおくと，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=13$ であるから，

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{13},\ \frac{12}{13}\right)=\left(\frac{64}{65},\ \frac{112}{65}\right)$$

ここで，$|\vec{c}|=\dfrac{16\sqrt{65}}{65}$ より　$\vec{e}=\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{\sqrt{65}},\ \dfrac{7}{\sqrt{65}}}\right)$

148



(1)　BD：DC$=c:b$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2)　AI：ID$=$BA：BD

であり，ここで，

$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}\mathrm{BC}=\frac{ca}{b+c}$$

$\therefore$　AI：ID$=c:\dfrac{ca}{b+c}=\boldsymbol{(b+c):a}$

(3)　(2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{a+b+c}\{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\}$

$$=\boldsymbol{\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}}$$

149

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$\therefore$　$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

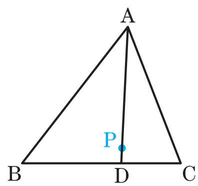
(2)　D は直線 AP 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，D は BC 上にあるので

$$\frac{k}{3}+\frac{5}{9}k=1$$

$\therefore$　$k=\dfrac{9}{8}$　　$\therefore$　AP：PD$=\boldsymbol{8:1}$



また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　BD：DC＝**5：3**

(3)　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{8}{9}\triangle\mathrm{DAB}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{5}{8}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{5}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

$\triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{8}{9}\triangle\mathrm{DCA}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{3}{8}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{9}\triangle\mathrm{ABC}$

よって，△PAB：△PBC：△PCA＝**5：1：3**

150

(1)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=52$　　∴　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\cdot2}=\dfrac{1}{2}$ より，$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

151

$|\vec{a}|=t\ (t>0)$ とおくと　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{t}{2}$

また，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=t^2-1$

次に，$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2+t+1\\|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2-t+1\end{cases}$ より，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}}{2}$

∴　$2(t^2-1)=\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}$

ここで，右辺＞0 だから，$t>1$　（∵　$t>0$）

両辺を 2 乗し，整理すると，$t^4-3t^2+1=0$　　∴　$t^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$t>1$ より，$t=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}$　　∴　$|\vec{a}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

152

(1)　$|x\vec{a}+\vec{b}|^2=x^2|\vec{a}|^2+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=\boldsymbol{2x^2+12x+20}$

注　(1)では **153** で扱う内積の公式を用いているが，$x\vec{a}+\vec{b}=(x+2,\ x+4)$ から

$|x\vec{a}+\vec{b}|^2=(x+2)^2+(x+4)^2$

$=2x^2+12x+20$ としてもよい．

(2)　(1)より　$|x\vec{a}+\vec{b}|^2=2(x+3)^2+2$

よって，$x=\boldsymbol{-3}$ のとき，$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は**最小値 $\sqrt{2}$** をとる．

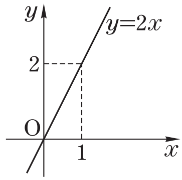
153

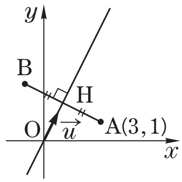
$\vec{a}+t\vec{b}=(3t+1,\ -t+2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 3)$ であるから

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ より

$-2(3t+1)+3(-t+2)=0$　　∴　$t=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

154





(1)　$y=2x$ 上に点 P(1，2) があるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{5}$ だから

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{u}=\boldsymbol{\sqrt{5}\,\vec{u}}$

(3)　H は線分 AB の中点だから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)-(3,\ 1)$$

$$=(2,\ 4)-(3,\ 1)=(-1,\ 3)$$

よって，**B(−1，3)**

155

直線上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると

$$(x,\ y)=(2,\ 1)+t(1,\ 2)=(t+2,\ 2t+1)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \boldsymbol{x=t+2} \\ \boldsymbol{y=2t+1} \end{cases}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=2x-3}$$

156

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}}+3\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\vec{0}$ より，$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

$\therefore\quad \vec{a}+2\vec{b}-6\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(3)　(1)，(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}$，

ここで $|\vec{a}|=12$ であることと，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{1}{6}|\vec{a}|$ であることより　$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=2$

よって，**C は点 D を中心とする半径 2 の円周上を動く．**

157

$\alpha=1-2\beta$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-2\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\therefore\quad (x,\ y)=(2-6\beta,\ 4-4\beta)\qquad \therefore\quad \begin{cases} x=2-6\beta \\ y=4-4\beta \end{cases}\qquad \therefore\quad \boldsymbol{2x-3y+8=0}$$

(別解)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\beta\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$(\alpha+2\beta=1)$ だから P は，(2，4)，(−1，2) を通る直線上を動く．

∴　$2x-3y+8=0$

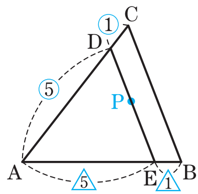
158

(1)　①より　$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP})+2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP})-3\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CB}$

∴　$6\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CB}$

∴　$\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}+\frac{2-k}{6}\overrightarrow{CB}}$

(2)　AC, AB を 5：1 に内分する点をそれぞれ，D, E とすると，(1)より P は直線 DE 上にあるので，△ABC の周，および内部にあるためには，線分 DE 上になければいけない．



$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$ より　$0\leqq\frac{2-k}{6}\leqq\frac{5}{6}$　　∴　$\boldsymbol{-3\leqq k\leqq 2}$

159

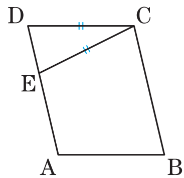
(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるとき　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

∴　$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

∴　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(2,\ a)-(1,\ 2)+(6,\ 3)=(7,\ a+1)$

よって，$\mathbf{D}(\boldsymbol{7,\ a+1})$

(2)　$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AD}$ とおくと，



$\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}=(2-2t,\ a-at)+(7t,\ at+t)$

$=(2+5t,\ t+a)$

∴　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=(5t-4,\ t+a-3)$

よって，$|\overrightarrow{CE}|^2=(5t-4)^2+(t+a-3)^2$

$=26t^2+2(a-23)t+(a-3)^2+16$

$=26t^2+2(a-23)t+a^2-6a+25$

また，$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=1+(a-2)^2$

$=a^2-4a+5$

$|\overrightarrow{CE}|^2=|\overrightarrow{CD}|^2$ だから，$26t^2+2(a-23)t-2a+20=0$

∴　$13t^2+(a-23)t-(a-10)=0$

$(t-1)(13t+a-10)=0$

E≠D より，$t\neq 1$ だから $t=\frac{10-a}{13}$

このとき，$3<a<10$ より，$0<10-a<7$ だから　$0<t<\frac{7}{13}$

よって，E は AD の内分点で，$\mathbf{E}\boldsymbol{\left(\frac{76-5a}{13},\ \frac{10+12a}{13}\right)}$

(3)　$\triangle CDE=\frac{1}{4}$(四角形 ABCD) であることより E は AD の中点である．

したがって，$t=\frac{1}{2}$　　∴　$\frac{10-a}{13}=\frac{1}{2}$　　∴　$a=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

160

P$(x,\ y,\ z)$とおくと $\mathrm{AP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$

$$\therefore\quad 4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y-16z+31=0 \quad \cdots\cdots①$$

$\mathrm{BP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$

$$\therefore\quad 4x^2+4y^2+4z^2-24x-8y-16z+51=0 \quad \cdots\cdots②$$

$\mathrm{CP}^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{5}{4}$$

$$\therefore\quad 4x^2+4y^2+4z^2-16x-8y-8z+19=0 \quad \cdots\cdots③$$

①−② より，$4x-2y=5$ ……④

③−② より，$x+z=4$ ……⑤

④，⑤より，$y=2x-\dfrac{5}{2}$，$z=4-x$

②に代入して，$x^2-4x+4=0$ $\quad\therefore\quad (x-2)^2=0$

$$\therefore\quad x=2,\ y=\frac{3}{2},\ z=2 \qquad \therefore\quad (x,\ y,\ z)=\left(\mathbf{2},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{2}\right)$$

161

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=1+2+3+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{2}+2|\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{2\pi}{3}\\&=6+\sqrt{2}+0-\sqrt{3}\\&=6+\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\boldsymbol{\sqrt{6+\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$$

162

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 4,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 1,\ -2)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-2)^2+4^2+2^2=24$,

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(-2)^2+1^2+(-2)^2=9$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\cdot(-2)+4\cdot1+2\cdot(-2)=4$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{24\cdot9-4^2}=\mathbf{5\sqrt{2}}$$

163

(1) $\begin{cases} \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} & \cdots\cdots② \\ \overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB} & \cdots\cdots③ \end{cases}$

①，②より，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\mathbf{(2,\ 4,\ -5)}$

①，③より，

$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}=(2,\ 4,\ 4)$ 　 $\therefore$ 　$\overrightarrow{AB}=\mathbf{(1,\ 2,\ 2)}$

②より，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{(2,\ -1,\ 0)}$

(2) (ア) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ だから

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\left(\because \quad \angle BAD=\angle BAE=\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，$\angle BAH=\dfrac{\pi}{2}$

(イ) (ア)より，△ABP が二等辺三角形となるのは AB＝AP のときだから，

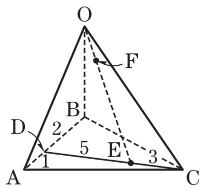
$AB=\sqrt{1+4+4}=3$

$AP=|t|AH=|t|\sqrt{AD^2+AE^2}=|t|\sqrt{5+45}=\sqrt{50}\,|t|$

$\therefore \quad \sqrt{50}\,|t|=3$

よって，$t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\pm\mathbf{\dfrac{3}{5\sqrt{2}}}$

164



(1) $\overrightarrow{OE}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OD}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OC}$ に，

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ を代入して，

$\overrightarrow{OE}=\mathbf{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OC}}$

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OE}=\mathbf{\dfrac{1}{16}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{32}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{32}\overrightarrow{OC}}$

(2) $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AF}$ とすると，$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$

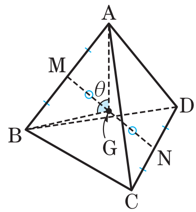
$\therefore \quad \overrightarrow{OG}=(1-k)\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{16}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{32}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{32}k\overrightarrow{OC}$

$=\left(1-\dfrac{15}{16}k\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{k}{32}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{32}k\overrightarrow{OC}$

ここで，$\overrightarrow{OG}$ は平面 OBC 上のベクトルだから，$\overrightarrow{OA}$ の係数＝0

ゆえに，$1-\dfrac{15}{16}k=0$ より，$k=\dfrac{16}{15}$ 　 $\therefore$ 　AG：FG＝**16：1**

165



(1) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ に，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ を代入して，

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$\therefore\ \ \overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$

(2) $AB=AC=AD=2$, $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot2\cos\dfrac{\pi}{3}=2$

$\therefore\ \ |\overrightarrow{GA}|^2=\dfrac{1}{16}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{1}{16}\times24=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \ |\overrightarrow{GA}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

$|\overrightarrow{GB}|^2=\dfrac{1}{16}\{9|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2-6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-6\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\}$

$=\dfrac{1}{16}\times24=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \ |\overrightarrow{GB}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}$ より，両辺を 2 乗すると，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{GB}|^2-2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GA}+|\overrightarrow{GA}|^2$

$\therefore\ \ 4=\dfrac{3}{2}-2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\dfrac{3}{2}$　　$\therefore\ \ \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

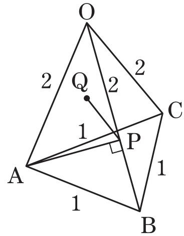
(3) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{GB}|}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

166

(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$\therefore\ \ 4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=1$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$



(2) $\overrightarrow{OP}=k\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{b}=0$ だから，$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

∴ $k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって，$k=\dfrac{7}{8}$

∴ $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\dfrac{7}{8}\vec{b}}$

(3) 4点O，A，C，Qは同一平面上にあるので $\overrightarrow{OQ}=s\vec{a}+t\vec{c}$ とおける．

∴ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{c}-\dfrac{7}{8}\vec{b}$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{c}$ だから　$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{c}=0$

$$\therefore\ \begin{cases} s|\vec{a}|^2+t\vec{c}\cdot\vec{a}-\dfrac{7}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \\ s\vec{c}\cdot\vec{a}+t|\vec{c}|^2-\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{7}{2}$

だから，これらを上式に代入して $\begin{cases} 4s+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{49}{16}=0 \\ \dfrac{7}{2}s+4t-\dfrac{49}{16}=0 \end{cases}$

∴ $s=t=\dfrac{49}{120}$

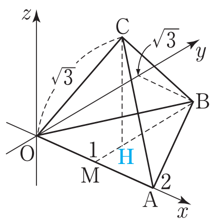
よって，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{\dfrac{49}{120}(\vec{a}+\vec{c})}$

167

(1) $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

よって，OA＝OB＝AB なので △OAB は正三角形である．



(2) Cから△OABに下ろした垂線の足をHとすると

△CHO≡△CHA≡△CHB

だから，HO＝HA＝HB

である．よって，Hは△OABの外心であり，正三角形の外心と重心は一致するので重心でもある．

∴ $\mathrm{H}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$　　∴ $c_1=\boldsymbol{1}$，$c_2=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

また，△CHOにおいて三平方の定理より，M(1，0，0)として

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2=3-(\mathrm{OM}^2+\mathrm{HM}^2)=3-\left\{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}=\dfrac{5}{3}$$

∴ $c_3=\mathrm{CH}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}$

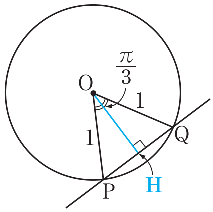
168

(1)　$\angle \mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle \mathrm{POH}=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\quad \dfrac{\sqrt{6}}{3}(a-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\quad a=\mathbf{1+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$



(2)　線分 PQ の長さが最大になるのは，これが球の直径のときだから O と H が一致するとき．

$\therefore\quad a=1$

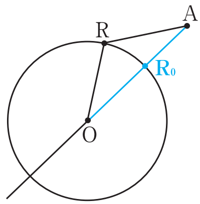
次に，A(1，1，1) より，$\mathrm{OA}=\sqrt{3}>1$

よって，A は球面 C の外部にある．

ゆえに，AR が最小になるとき，R は，線分 OA と球面 C の交点．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore\quad \mathbf{R_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$



169

X のとり得る値は　$X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

それぞれの値をとる確率は

◀確率変数 X の値を取りこぼしなく調べあげる

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

◀ $X=1$ となるのは，2 個のサイコロがともに 1 が出るときに限られる

$$P(X=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{3}{36}$$

◀ $X=2$ となるのは，2 個のサイコロがともに 1 または 2 が出るときと間違えないように注意！　この場合には，2 個のサイコロがともに 1 が出る，すなわち，最大数 $X=1$ となるときも含んでしまうので，この場合を除かなければならない

$$P(X=3)=\left(\frac{3}{6}\right)^2-\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{4}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{7}{36}$$

$$P(X=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{9}{36}$$

◀ $X=3$ となるのは，2 個のサイコロがともに 1 または 2 または 3 が出るときと間違えないように注意！　この場合には，最大数 $X=1$ または $X=2$ となるときも含んでしまうので，この場合を除かなければならない

$$P(X=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

◀ $P(X=6)$ を求める際に，全事象の起こる確率が 1 を用いても構わない

よって，求める確率分布は次の表のようになる．

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

◀約分しない方が全事象の起こる確率が1になっているかがすぐに確認できる
1にならなければ，どこかで間違えている

170

表の出た枚数をXとする．

◀まず，確率変数を設定しておく

Xのとり得る値は，$X=0$，1，2，3，4
それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0)={}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16}$$

◀表が1枚（奇数枚）出たので，コイン1枚を獲得

$$P(X=2)={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

$$P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}$$

◀表が3枚（奇数枚）出たので，コイン3枚を獲得

$$P(X=4)={}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

よって，求める期待値は

$$0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{4}{16}+0\cdot\frac{6}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+0\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{16}(4+12)=\mathbf{1}$$

171

(1)　期待値$E(X)$は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}$$

◀**170**

$$=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

よって，求める期待値$E(Z)$は

$$E(Z)=E(2X+3)=2E(X)+3=\mathbf{10}$$

◀$E(aX+b)=aE(X)+b$

(2)　期待値$E(Z)$は

$$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2E(X)=\mathbf{7}$$

◀「和の期待値」は「期待値の和」

172

(1)　Xのとり得る値は　$X=2$，3，4，5，6
それぞれの値をとる確率は

$$P(X=2)=\frac{1}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

◀$X=2$ となるのは，(1，2) のカードを引くときに限られる

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

◀$X=3$ となるのは，(1，3)，(2，3) のカードを引くとき

$$P(X=4)=\frac{3}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$$

◀ $X=4$ となるのは，(1, 4)，(2, 4)，(3, 4) のカードを引くとき

$$P(X=5)=\frac{4}{{}_6C_2}=\frac{4}{15}$$

$$P(X=6)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{5}{15}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる.

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

(2) $E(X)=2\cdot\frac{1}{15}+3\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{3}{15}+5\cdot\frac{4}{15}+6\cdot\frac{5}{15}$ ◀ 170

$$=\frac{1}{15}(2+6+12+20+30)$$

$$=\frac{70}{15}=\boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

◀ 先に $\frac{1}{15}$ でくくると，計算がしやすくなる

(3) X の分散 $V(X)$ は，

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

◀ 分散は，X^2 の期待値と (X の期待値)^2 の差

$$=4\cdot\frac{1}{15}+9\cdot\frac{2}{15}+16\cdot\frac{3}{15}+25\cdot\frac{4}{15}+36\cdot\frac{5}{15}-\left(\frac{14}{3}\right)^2$$

$$=\frac{350}{15}-\frac{196}{9}$$

$$=\frac{70}{3}-\frac{196}{9}=\frac{14}{9}$$

◀ 分散 $V(X)$ は，負になることはない

よって，

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{3}}$$

◀ 標準偏差 $\sigma(X)$ は分散 $V(X)$ の正の平方根

173

X のとり得る値は　　$X=1$，2，3，4

◀ 確率変数 X の値を取りこぼしなく調べること

それぞれの値をとる確率は

$$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$$

◀ $X=1$ となるのは，2 枚のカードが (1, 2)，(2, 3)，(3, 4)，(4, 5) のとき

$$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

◀ $X=2$ となるのは，2 枚のカードが (1, 3)，(2, 4)，(3, 5) のとき

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}$$

◀ $X=3$ となるのは，2 枚のカードが (1, 4)，(2, 5) のとき

$$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

◀ $X=4$ となるのは，2 枚のカードが (1, 5) のとき

X の確率分布は次の表のようになる.

X	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=\frac{20}{10}=2$$ ◀ 170

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{50}{10}$$ ◀ 170

$$=5$$

よって，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$　◀分散は，X^2 の期待値と $(X$ の期待値$)^2$ の差

これより，

$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2\cdot2+3=\mathbf{7}$　◀$E(aX+b)=aE(X)+b$

$V(Y)=V(2X+3)=2^2V(X)=4\cdot1=\mathbf{4}$　◀$V(aX+b)=a^2V(X)$

$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$　◀標準偏差 $\sigma(Y)$ は分散 $V(Y)$ の正の平方根

(別解)　$\sigma(Y)$ を求める際に，

$\sigma(Y)=\sigma(2X+3)=|2|\sigma(X)=2\sqrt{V(X)}=2\cdot1=2$　◀$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

としてもよい．

174

(1)　2 枚のカードの抜き出し方は　${}_6C_2=15$（通り）

X のとり得る値は　　$X=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

Y のとり得る値は　　$Y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$X>Y$ に注意すると，X，Y を組み合わせた同時確率分布は右の表のようになる．

X＼Y	1	2	3	4	5	計
2	$\frac{1}{15}$	0	0	0	0	$\frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	0	$\frac{2}{15}$
4	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{3}{15}$
5	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{4}{15}$
6	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$
計	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$P(X=2)=\frac{1}{15}$$

$$P(Y=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

◀$P(X=2)$ は，$P(X=2,\ Y$ は任意$)$
$P(Y=1)$ は，$P(X$ は任意，$Y=1)$

であるから

$$P(X=2)P(Y=1)=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{45}$$

また，$P(X=2,\ Y=1)=\dfrac{1}{15}$ より

$P(X=2,\ Y=1)\neq P(X=2)P(Y=1)$ であるから，

X と Y は**互いに独立でない．**

◀$P(X=x_i,\ Y=y_j)\neq P(X=x_i)P(Y=y_j)$ となる x_i，y_j が一組でも存在すれば，X，Y は互いに独立でない

(2)　(1)の表より

$$E(XY)=2\cdot1\cdot\frac{1}{15}+3\cdot1\cdot\frac{1}{15}+3\cdot2\cdot\frac{1}{15}$$

$$+4\cdot1\cdot\frac{1}{15}+4\cdot2\cdot\frac{1}{15}+4\cdot3\cdot\frac{1}{15}+5\cdot1\cdot\frac{1}{15}+5\cdot2\cdot\frac{1}{15}+5\cdot3\cdot\frac{1}{15}+5\cdot4\cdot\frac{1}{15}$$

$$+6\cdot1\cdot\frac{1}{15}+6\cdot2\cdot\frac{1}{15}+6\cdot3\cdot\frac{1}{15}+6\cdot4\cdot\frac{1}{15}+6\cdot5\cdot\frac{1}{15}$$

$$=\frac{175}{15}=\mathbf{\frac{35}{3}}$$

◀ X と Y が互いに独立でないので，$E(XY)=E(X)E(Y)$ は不成立

175

(1)　$E(X)=E(Y)$ より，

$$E(T)=E(2X-Y)$$
$$=2E(X)-E(Y)$$
$$=2\cdot\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=\mathbf{\frac{7}{2}}$$

◀ X，Y が独立，従属に関わらず，$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ が成立

(2)　$V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$

X，Y は互いに独立であるから，

$$V(T)=V(2X-Y)$$
$$=2^2V(X)+(-1)^2V(Y)$$
$$=4\cdot\frac{35}{12}+1\cdot\frac{35}{12}=\mathbf{\frac{175}{12}}$$

◀ X，Y が独立のときに限り，$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ が成立

176

(1)　X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=3\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}},\quad V(X)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

(2)　Y は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(Y)=4\cdot\frac{1}{2}=2,\quad V(Y)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$$

よって，

$$E(Z)=E(X+Y)$$
$$=E(X)+E(Y)$$

◀ 171

$$=\frac{3}{2}+2=\mathbf{\frac{7}{2}}$$

また，X と Y は互いに独立であるから

$$V(Z)=V(X+Y)$$
$$=V(X)+V(Y)$$

◀ 175

$$=\frac{3}{4}+1=\mathbf{\frac{7}{4}}$$

177

(1)　$\displaystyle\int_{20}^{50}\left(kx+\frac{17}{10}\right)dx=\left[\frac{k}{2}x^2+\frac{17}{10}x\right]_{20}^{50}$

$$=\frac{k}{2}(2500-400)+\frac{17}{10}(50-20)$$

$=1050k+51$

$\int_{20}^{50} f(x)\,dx=1$ であるから　　◀全確率は 1

$1050k+51=1$　　∴　$k=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}$

(2)　$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b \left(-\dfrac{1}{21}x+\dfrac{17}{10}\right)dx$　　◀$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{42}x^2+\dfrac{17}{10}x\right]_a^b$

$=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{42}}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)+\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{10}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

(3)　$20 \leqq t < t+10 \leqq 50$ より　　$20 \leqq t \leqq 40$　……①

(2)において，$a=t$，$b=t+10$ とすると，

$$P(t \leqq X \leqq t+10)=-\frac{1}{42}\{(t+10)^2-t^2\}+\frac{17}{10}\{(t+10)-t\}$$

$$=-\frac{1}{42}(20t+100)+17$$

$P(t \leqq X \leqq t+10)=\dfrac{1}{3}$ であるから

$-\dfrac{1}{21}(10t+50)+17=\dfrac{1}{3}$　　∴　$t=\mathbf{30}$　（これは①を満たしている）

178

応募者の入社試験の点数を X（点），合格最低点を x（点）とする．
X は正規分布 $N(245,\ 50^2)$ に従う．

$Z=\dfrac{X-245}{50}$ とおいて X を標準化すると，
Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

◀X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおき X を標準化すると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う

$$P(X \geqq x)=P\left(\frac{X-245}{50} \geqq \frac{x-245}{50}\right)=P\left(Z \geqq \frac{x-245}{50}\right)$$

ここで，$P(X \geqq x)=\dfrac{300}{500}=0.6$ であるから　$P\left(Z \geqq \dfrac{x-245}{50}\right)=0.6$　…①

$P(Z>0.25)=0.4$ であるから，正規分布曲線の対称性より，

$P(Z<-0.25)=0.4 \iff P(Z \geqq -0.25)=1-P(Z<-0.25)=0.6$　…②

①，②より　$\dfrac{x-245}{50}=-0.25$

∴　$x=245-12.5=232.5$

よって，合格最低点は，**約 233 点**である．

179

表の割合をすべて足すと 100 (%) であるから,
今回投票かつ前回棄権の人の割合は

$100-(45+3+10+29+1)=\mathbf{12}$ (%)　アイ

よって, 今回投票した人の割合は

$45+12+3=60$ (%)

ゆえに, この有権者全体から無作為に 1 人を選ぶとき,
今回投票の人が選ばれる確率は

$0.\mathbf{60}$　ウエ

また, 前回投票した人の割合は

$45+10=55$ (%)

よって, この有権者全体から無作為に 1 人を選ぶとき,
前回投票の人が選ばれる確率は

$0.\mathbf{55}$　オカ

また, 今回棄権かつ前回投票した人の割合は 10% であるから,
X は二項分布 $B(900,\ 0.\mathbf{10})$ に従う.　キク
X の平均 (期待値) $E(X)$ は

$E(X)=900\cdot0.10=\mathbf{90}$　ケコ　◀$B(n,\ p)$ に従うとき　$E(X)=np$

X の標準偏差 $\sigma(X)$ は

$\sigma(X)=\sqrt{900\cdot0.10(1-0.10)}=\mathbf{9.0}$　サシ　◀$B(n,\ p)$ に従うとき　$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

$Z=\dfrac{X-90}{9.0}$ とおいて X を標準化すると,
Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う.
正規分布表より

◀X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおき X を標準化し, 正規分布表を使える土台を作る

$$
\begin{aligned}
P(X\geqq105)&=P\left(Z\geqq\frac{105-90}{9.0}\right)\\
&=P\left(Z\geqq\frac{5}{3}\right)\\
&=P(Z\geqq0)-P\left(0\leqq Z\leqq\frac{5}{3}\right)\\
&=P(Z\geqq0)-P(0\leqq Z\leqq1.66\cdots\cdots)\\
&\fallingdotseq0.5-0.4525=0.0475\fallingdotseq0.\mathbf{05}
\end{aligned}
$$

スセ

◀正規分布表を利用するために $P(0\leqq Z\leqq u)$ の形に変形する

180

$\overline{X}$ は $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおいて $\overline{X}$ を標準化すると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$\overline{X}-m=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ より

$$P\left(|\overline{X}-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)=P\left(\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z\right|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)$$
$$=P\left(|Z|\geqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\qquad\left(\because\ \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}>0\right)$$
$$=2P\left(Z\geqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$
$$=1-2P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

$P\left(|\overline{X}-m|\geqq\dfrac{\sigma}{4}\right)\leqq 0.02$ より

$$1-2P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\leqq 0.02$$
$$\therefore\quad P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\geqq 0.49$$

正規分布表より，$P(0\leqq Z\leqq 2.33)=0.4901$ であるから

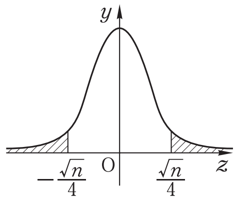
$$\frac{\sqrt{n}}{4}\geqq 2.33$$
$$\therefore\quad \sqrt{n}\geqq 9.32$$
$$\therefore\quad n\geqq 86.8624$$

よって，求める最小の n は

$n=$**87**

◀標本平均 $\overline{X}$ の平均は $E(\overline{X})=m$ 標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

◀正規分布曲線



181

(1) 母平均を m とする．標本の大きさは 96 名，標本平均の値は 99 点，母標準偏差の値が 20 点であるから，m に対する信頼度 95％ の信頼区間は

$$99-1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{96}}\leqq m\leqq 99+1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{96}}$$
$$\therefore\quad 99-1.96\cdot\frac{20}{4\sqrt{6}}\leqq m\leqq 99+1.96\cdot\frac{20}{4\sqrt{6}}$$

$\sqrt{6}=2.45$ より

$$95\leqq m\leqq 103$$

よって，m に対する信頼度 95％ の信頼区間は，**95 点以上 103 点以下**である．

(2) 標本平均の値は 99 点，母標準偏差の値が 15 点であるから，
m に対する信頼度 95％ の信頼区間の幅は

$$2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{\sqrt{96}}=2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{4\sqrt{6}}=2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{4\cdot 2.45}=\mathbf{6}\ (\text{点})$$

182

n 回のうち，正の向きに移動した回数を Y とすると，
負の向きに移動した回数が $n-Y$ であるから

$$X=3Y+(-1)\cdot(n-Y)=-n+4Y \quad \cdots\cdots①$$

①に $n=2400$，$X=1440$ を代入して

$$1440=-2400+4Y$$

$$\therefore \quad Y=960$$

よって，標本比率 R は，

$$R=\frac{960}{2400}=0.4$$

したがって，p に対する信頼度 95％ の信頼区間は

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}\leqq p\leqq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}$$

$$\therefore \quad 0.4-0.0196\leqq p\leqq 0.4+0.0196$$

$$\therefore \quad \mathbf{0.3804\leqq p\leqq 0.4196}$$

183

帰無仮説を「この日のポップコーンの重さは正常である」とし，この仮説が正しいとする．
ポップコーンの重さを X g とすると，X は $N(200,\ 5^2)$ に従う．
このとき，標本平均 $\overline{X}$ は $N\left(200,\ \frac{5^2}{100}\right)$ に従うので，$Z=\dfrac{\overline{X}-200}{\frac{5}{\sqrt{100}}}$ とおいて $\overline{X}$ を標準化すると，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．
両側検定において，有意水準 5％ の棄却域は

$$Z\leqq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96\leqq Z$$

$\overline{X}=198$ のとき，$Z=\dfrac{198-200}{\frac{5}{\sqrt{100}}}=-4$ は棄却域に入るので，帰無仮説は棄却される．
したがって，この日の購入したポップコーンの重さは**異常である．**

参考

「購入したポップコーンの重さは異常であるか」すなわち，「重さが重くなっている」場合と「重さが軽くなっている」場合の両方の可能性を考える必要があり，どちらの方に異常な値をとっても仮説を棄却できるように，棄却域が両側にある両側検定を用いる．