数学Ｉ・Ａ基礎問題精講［六訂版］

上園信武著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1

与式$=(x^4y^2)\times(2xy^2)\times(-x^3y^3)$
$=-2x^{4+1+3}y^{2+2+3}$
$=\boldsymbol{-2x^8y^7}$

2

$2A-B$
$=2(x^2-2x+3)-(2x^2+4x-2)$
$=(2x^2-2x^2)+(-4x-4x)+(6+2)$
$=\boldsymbol{-8x+8}$
$A-2B$
$=(x^2-2x+3)-2(2x^2+4x-2)$
$=(x^2-4x^2)+(-2x-8x)+(3+4)$
$=\boldsymbol{-3x^2-10x+7}$

3

(1)　$s=x-y$，$t=z-w$ とおくと
$(x-y-z+w)(x-y+z-w)$
$=(s-t)(s+t)=s^2-t^2$
$=(x-y)^2-(z-w)^2$
$=(x^2-2xy+y^2)-(z^2-2zw+w^2)$
$=\boldsymbol{x^2-2xy+y^2-z^2+2zw-w^2}$

(2)　$(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)$
$=\{(x-1)(x-6)\}\{(x-2)(x-3)\}$
$=(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)$
$=\{(x^2+6)-7x\}\{(x^2+6)-5x\}$
$=(x^2+6)^2-12x(x^2+6)+35x^2$
$=\boldsymbol{x^4-12x^3+47x^2-72x+36}$

(3)　$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)=\boldsymbol{x^8-1}$

4

(1)　$ab-bc-b^2+ca$
$=a(b+c)-b(b+c)$
$=\boldsymbol{(a-b)(b+c)}$

(2)　$x^2-y^2+x+5y-6$
$=x^2+x-(y^2-5y+6)$
$=x^2+x-(y-2)(y-3)$
$=\{x+(y-2)\}\{x-(y-3)\}$
$=\boldsymbol{(x+y-2)(x-y+3)}$

(3)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b$
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a$
$+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

(4)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)$
$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$
$=\boldsymbol{x(x+5)(x^2+5x+10)}$

(5)　x^4+2x^2+9
$=(x^4+6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+3-2x)(x^2+3+2x)$
$=\boldsymbol{(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)}$

5

(1)　$x+y=(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=\boldsymbol{6}$
$xy=(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=9-2=\boldsymbol{7}$
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=6^2-2\cdot7=\boldsymbol{22}$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=6^3-3\cdot7\cdot6=\boldsymbol{90}$

(2)　$t^3+\dfrac{1}{t^3}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^3-3\cdot t\cdot\dfrac{1}{t}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$
$=3^3-3\cdot3=\boldsymbol{18}$
$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2=t^2-2+\dfrac{1}{t^2}$
$=\left(t^2+2+\dfrac{1}{t^2}\right)-4$
$=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-4=3^2-4=5$

ここで，$t>1$ より $t>\dfrac{1}{t}$

∴ $t-\dfrac{1}{t}>0$

よって $t-\dfrac{1}{t}=\sqrt{5}$

∴ $t^2-\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=\mathbf{3\sqrt{5}}$

6

$$
\begin{array}{r}
0.7692307 \\
13\,\overline{)\,10.0} \\
\underline{9\,1} \\
90 \\
\underline{78} \\
120 \\
\underline{117} \\
30 \\
\underline{26} \\
40 \\
\underline{39} \\
100 \\
\underline{91} \\
9
\end{array}
$$

上のわり算より $\dfrac{10}{13}=0.\dot{7}6923\dot{0}$

よって，小数点以下は

7，6，9，2，3，0 のくりかえし．

200÷6＝33 余り 2

より，小数第 200 位の数字は **6**

7

(1) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{9+6\sqrt{2}+2}{9-2}=\mathbf{\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}$

8

$a=\sqrt{2}-1$ より $a+1=\sqrt{2}$

両辺を 2 乗すると，$a^2+2a-1=0$

これより $a^2=1-2a$

a^3+6a^2-3a+1

$=a(1-2a)+6(1-2a)-3a+1$

$=-2a^2-14a+7$

$=-2(1-2a)-14a+7$

$=-10a+5$

$=-10(\sqrt{2}-1)+5=\mathbf{15-10\sqrt{2}}$

9

(1) $A^2=(2+\sqrt{14})^2=18+4\sqrt{14}$

$=18+2\sqrt{56}$

$B^2=(1+\sqrt{17})^2=18+2\sqrt{17}$

$\sqrt{17}<\sqrt{56}$ だから，$A^2>B^2$

$A>0$，$B>0$ だから，$A>B$

(2) $3.7^2=13.69$，$3.8^2=14.44$

だから $3.7^2<14<3.8^2$

∴ $3.7<\sqrt{14}<3.8$

$4.1^2=16.81$，$4.2^2=17.64$

だから $4.1^2<17<4.2^2$

∴ $4.1<\sqrt{17}<4.2$

よって，$A=2+\sqrt{14}>2+3.7=5.7$

また，$B=1+\sqrt{17}<1+4.2=5.2$

∴ $B<5.2<5.7<A$

よって，$B<A$

10

(1) $1<3<4$ より，$1<\sqrt{3}<2$ だから

$6<5+\sqrt{3}<7$

よって，

$a=\mathbf{6}$，$b=5+\sqrt{3}-6=\mathbf{\sqrt{3}-1}$

(2) $\dfrac{1}{6+\sqrt{3}-1+1}+\dfrac{1}{6-(\sqrt{3}-1)-1}$

$=\dfrac{1}{6+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{6-\sqrt{3}+6+\sqrt{3}}{(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})}=\dfrac{12}{33}=\mathbf{\dfrac{4}{11}}$

11

i） $x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$，$|x-2|=-(x-2)$，

$|x-3|=-(x-3)$

$\therefore\ P=(-x+1)+(-x+2)$
$\quad+(-x+3)$
$\quad=-3x+6$

ii） $1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|x-2|=-(x-2)$，

$|x-3|=-(x-3)$

$\therefore\ P=(x-1)+(-x+2)+(-x+3)$
$\quad=-x+4$

iii） $2<x<3$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|x-2|=x-2$，

$|x-3|=-(x-3)$

$\therefore\ P=(x-1)+(x-2)+(-x+3)$
$\quad=x$

iv） $3\leqq x$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|x-2|=x-2$，

$|x-3|=x-3$

$\therefore\ P=(x-1)+(x-2)+(x-3)$
$\quad=3x-6$

以上のことより

$$P=\begin{cases}\boldsymbol{-3x+6} & \boldsymbol{(x<1)}\\ \boldsymbol{-x+4} & \boldsymbol{(1\leqq x\leqq 2)}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{(2<x<3)}\\ \boldsymbol{3x-6} & \boldsymbol{(3\leqq x)}\end{cases}$$

12

$A=\sqrt{x^2-8a}$ とおくと，

$A=\sqrt{(2a+1)^2-8a}=\sqrt{(2a-1)^2}$
$\quad=|2a-1|$

となる．

i） $2a-1\geqq 0$ すなわち，

$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{1}{2}}$ **のとき，** $A=\boldsymbol{2a-1}$

ii） $2a-1<0$ すなわち，

$\boldsymbol{a<\dfrac{1}{2}}$ **のとき，**

$A=-(2a-1)=\boldsymbol{-2a+1}$

13

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}$
$\quad=\sqrt{4}+\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{3}=\mathbf{4}$

(3) $\sqrt{6+\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(9+3)+2\sqrt{9\cdot 3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\cdot 2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

よって，

$\sqrt{6+\sqrt{27}}-\sqrt{8+\sqrt{48}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}$

14

$a\neq\pm 1$ のとき，

$x=\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}=\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{a+1}{a-1}$

$a=1$ のとき，与えられた方程式は

$0\cdot x=2^2$ すなわち，$0\cdot x=4$ より解なし．

$a=-1$ のとき，与えられた方程式は

$0\cdot x=0$ よりすべての数．

よって，求める解は

$\boldsymbol{a\neq\pm 1}$ **のとき，** $\boldsymbol{x=\dfrac{a+1}{a-1}}$

$\boldsymbol{a=1}$ **のとき，解なし**

$\boldsymbol{a=-1}$ **のとき，すべての数**

15

(1) $3(x-1)\leqq 2(2x-1)+3$ は

$\quad 3x-3\leqq 4x-2+3$

$\quad\therefore\ \boldsymbol{x\geqq -4}$

(2) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}$ は

$4x+9>6x+2$

$\therefore\ 2x<7\quad\therefore\ \boldsymbol{x<\dfrac{7}{2}}$

16

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}x<\dfrac{1}{3}x$ ……①

$x\leqq\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{2}$ ……②

$1-x<x-2$ ……③

①は，$3-x<2x\quad\therefore\ x>1$

②は，$6x\leqq2x+9\quad\therefore\ x\leqq\dfrac{9}{4}$

③は，$2x>3\quad\therefore\ x>\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}<x\leqq\dfrac{9}{4}}$

17

$a(1-x)>1+x$ は

$(a+1)x<a-1$ ……①

(i) $a+1>0$ すなわち，$a>-1$ のとき

$x<\dfrac{a-1}{a+1}$

(ii) $a+1<0$ すなわち，$a<-1$ のとき

$x>\dfrac{a-1}{a+1}$

(iii) $a+1=0$ すなわち，$a=-1$ のとき

①は $0\cdot x<-2$ となり，これをみたす x はない．

以上より，求める解は

$a>-1$ のとき，$x<\dfrac{a-1}{a+1}$

$a<-1$ のとき，$x>\dfrac{a-1}{a+1}$

$a=-1$ のとき，解なし

18

(1) $|x-2|=1$ は絶対値の性質より

$x-2=\pm1$

よって，$\boldsymbol{x=1,\ 3}$

(2) $|x-1|=|2x-3|-2$ ……①

i) $x<1$ のとき

$x-1<0$，$2x-3<0$ だから，

①は $-(x-1)=-(2x-3)-2$

$\therefore\ x=0$

これは $x<1$ をみたす．

ii) $1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$x-1\geqq0$，$2x-3\leqq0$ だから，

①は $x-1=-(2x-3)-2$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$

これは，$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ をみたさない．

iii) $\dfrac{3}{2}<x$ のとき

$x-1>0$，$2x-3>0$ だから，

①は $x-1=2x-3-2$

$\therefore\ x=4$

これは，$\dfrac{3}{2}<x$ をみたす．

i)～iii)より，$\boldsymbol{x=0,\ 4}$

19

(1) $|x-2|>2$ は絶対値の性質より

$x-2<-2$ または $x-2>2$

$\boldsymbol{x<0,\ x>4}$

(2) i) $x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$，

$|2x-3|=-(2x-3)$ であるから，

与えられた不等式は

$-x+1<-2x+3-2\quad\therefore\ x<0$

$x<1$ より，$x<0$

ii) $1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|2x-3|=-(2x-3)$

であるから，与えられた不等式は

$x-1<-2x+3-2\quad\therefore\ x<\dfrac{2}{3}$

これは不適．

iii）$\dfrac{3}{2}<x$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|2x-3|=2x-3$

であるから，与えられた不等式は

$x-1<2x-3-2 \quad \therefore \quad x>4$

$\dfrac{3}{2}<x$ より，$4<x$

i）～iii）より，$\boldsymbol{x<0}$，$\boldsymbol{4<x}$

20

求める分数は $\dfrac{m}{m+20}$（m は自然数で，m と $m+20$ は互いに素）と表せる．

このとき，$0.25 \leqq \dfrac{m}{m+20} < 0.35$ が成りたつ．

$$\therefore \quad \frac{1}{4} \leqq \frac{m}{m+20} < \frac{7}{20}$$

$$\frac{20}{7} < \frac{m+20}{m} \leqq 4$$

$$\frac{20}{7} < 1+\frac{20}{m} \leqq 4$$

$$\frac{13}{7} < \frac{20}{m} \leqq 3$$

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{m}{20} < \frac{7}{13}$$

$$\frac{20}{3} \leqq m < \frac{140}{13}$$

この不等式をみたす m は 7，8，9，10

このうち，m と $m+20$ が互いに素となるのは $m=7$，9

よって，求める分数は $\boldsymbol{\dfrac{7}{27}}$，$\boldsymbol{\dfrac{9}{29}}$

21

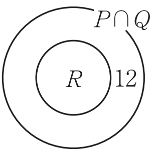
(1) $P\cap Q$ は，12 の倍数を表す．全体集合は自然数だから，$\boldsymbol{a=12}$

(2) 右のベン図より

$12 \notin R$

したがって

ウ…⑤



22

(1) $A=\{\boldsymbol{2,\ 3,\ 5,\ 7}\}$，

$B=\{\boldsymbol{3,\ 6,\ 9}\}$

(2) $A\cap B=\{\boldsymbol{3}\}$，

$A\cup B=\{\boldsymbol{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9}\}$，

$\overline{A}=\{\boldsymbol{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9}\}$，

$\overline{B}=\{\boldsymbol{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8}\}$，

$\overline{A}\cap B=\{\boldsymbol{6,\ 9}\}$，

$A\cup\overline{B}=\{\boldsymbol{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8}\}$

注　ここで，$A\cup\overline{B}=\overline{\overline{A}\cap B}$ である．

23

(1) $200\div5=40$ より　$n(A)=\boldsymbol{40}$

B の要素は 4 でわり切れる数から 2 をひいたものだから，

$200\div4=50$ より　$n(B)=\boldsymbol{50}$

(2) $A\cap B$

$=\{10,\ 30,\ 50,\ 70,\ \cdots\cdots,\ 190\}$

より，$n(A\cap B)=\boldsymbol{10}$

24

(1) **逆**：$x^2<1$ ならば $0<x<1$

$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，不成立だから，**偽**

裏：$x\leqq0$ または $1\leqq x$ ならば $x^2\geqq1$

$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，不成立だから，**偽**

対偶：$x^2\geqq1$ ならば $x\leqq0$ または $1\leqq x$

もとの命題が真だから，対偶も**真**

(2) 対偶：$x=1$ かつ $y=2$ ならば

$xy=2$

これは真だから，もとの命題も真である．

(3) $\sqrt{2}+1$ が有理数であると仮定すると，2 つの自然数 m，n を用いて

$\sqrt{2}+1=\dfrac{n}{m}$ と表せる．(ただし，m，n は互いに素)

しかし，$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}-1=\dfrac{n-m}{m}$ となり

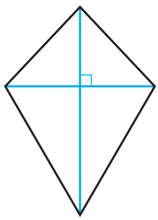
$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する.
よって, $\sqrt{2}+1$ は有理数でない.
つまり, $\sqrt{2}+1$ は無理数である.

25

(1)　$x<-1$ または $1<x$ を数直線上に表すと下図の斜線部分になる.

したがって, $x>1$ であることは,
$x<-1$ または $1<x$ であるための**十分条件**

(2)　「対角線が直交する」ならば「ひし形」は偽
(反例は右図)
「ひし形」ならば「対角線は直交する」は真
よって, **必要条件**

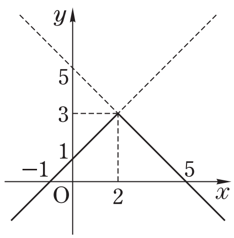


26

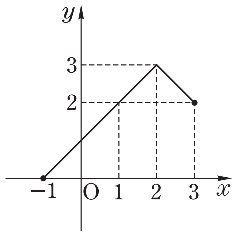
(1)　$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x \geqq 2) \\ -x+2 & (x<2) \end{cases}$ だから,

$y=\begin{cases} -(x-2)+3=-x+5 & (x \geqq 2) \\ -(-x+2)+3=x+1 & (x<2) \end{cases}$

よって, グラフは次の図のようになる.



(2)　グラフより, $\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 3}$



(3)　$a<2<b$ より $x=2$ は定義域内なので, y の最大値は 3
よって, $b=3$
(i)　$1 \leqq a<2$ のとき
$a \leqq x \leqq b=3$ における y の最小値は $2\,(x=3$ のとき$)$
よって, $2-a=2$ から $a=0$. これは不適.
(ii)　$a<1$ のとき
$a \leqq x \leqq b=3$ における y の最小値は $a+1$ $(x=a$ のとき$)$
よって,

$$2-a=a+1 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}\,(<1)$$

以上より,

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=3}$$

27

点 $\mathrm{A}(2,\ 4)$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した点は, $(2+p,\ 4+q)$
この点を x 軸に関して対称移動した点は,
$(2+p,\ -4-q)$
一方, 点 $\mathrm{A}(2,\ 4)$ を y 軸に関して対称移動した点は, $(-2,\ 4)$.
この 2 点が一致するので
$2+p=-2,\ -4-q=4$
$\therefore$　$\boldsymbol{p=-4,\ q=-8}$

28

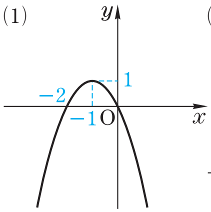
(1)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+x-1=-\dfrac{1}{3}(x^2-3x)-1$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-1$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

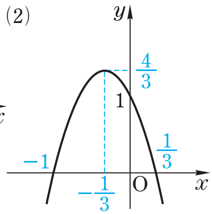
(2)　$y=(2x-1)(x+1)=2x^2+x-1$
$$=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-1$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}-1$$
$$=\boldsymbol{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}}$$

29

(1)

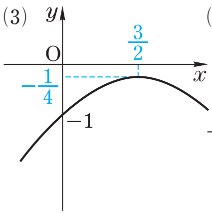


(2)

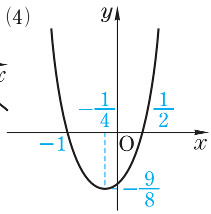


$y=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

(3)



(4)



$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$　　$y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$

30

$y=-2x^2-14x-13$
$$=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{23}{2}$$
より，頂点 $\left(-\frac{7}{2},\ \frac{23}{2}\right)$

$y=-2x^2+8x+7=-2(x-2)^2+15$
より，頂点 $(2,\ 15)$

よって，**x 軸方向に $\boldsymbol{\frac{11}{2}}$，$y$ 軸方向に $\boldsymbol{\frac{7}{2}}$ だけ平行移動**すると重なる．

31

$$y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$
よって，頂点は $(-2,\ 1)$
この点の x 軸，y 軸，原点に関する対称点はそれぞれ
$$(-2,\ -1),\ (2,\ 1),\ (2,\ -1)$$
だから，$y=x^2+4x+5$ を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動してできる放物線は，それぞれ
$$\boldsymbol{y=-(x+2)^2-1,}$$
$$\boldsymbol{y=(x-2)^2+1,}$$
$$\boldsymbol{y=-(x-2)^2-1}$$

32

$y=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，頂点は $(1,\ 5)$ から $(-1,\ 2)$ に移る．
よって，$y=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$
これが，$y=x^2+cx+3$ と一致するので，
$$\boldsymbol{c=2}$$
次に，$y=(x+1)^2+2$ を y 軸に関して対称移動すると，頂点は $(-1,\ 2)$ から $(1,\ 2)$ に移る．
よって，$y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$
これが，$y=x^2+ax+b$ と一致するので
$$\boldsymbol{a=-2,\ b=3}$$

33

(1)　軸が $x=-2$ なので，求める 2 次関数は，$y=a(x+2)^2+b$
とおける．
$(-1,\ -2)$，$(2,\ -47)$ を通るので，
$$\begin{cases} a+b=-2 & \cdots\cdots① \\ 16a+b=-47 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
①，②より，$a=-3$，$b=1$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-3x^2-12x-11}$$

(2)　x 軸に接するので，求める 2 次関数は，$y=a(x-p)^2$
とおける．

$(1,\ 1)$, $(4,\ 4)$ を通るので,

$$\begin{cases} a(p-1)^2=1 & \cdots\cdots① \\ a(p-4)^2=4 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

ここで, $p=1$ は①をみたさないので $p \neq 1$. このとき, ②÷①より

$$\frac{(p-4)^2}{(p-1)^2}=4$$

$$\therefore\quad 3p^2=12$$

したがって, $p=\pm 2$

$p=2$ のとき, $a=1$

$p=-2$ のとき, $a=\dfrac{1}{9}$

よって, $\boldsymbol{y=x^2-4x+4}$,

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}}$$

(3) 求める 2 次関数を,

$y=ax^2+bx+c$ とおくと, $(-1,\ -3)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 3)$を通るので,

$$\begin{cases} a-b+c=-3 & \cdots\cdots① \\ a+b+c=5 & \cdots\cdots② \\ 4a+2b+c=3 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①, ②, ③の連立方程式を解くと,

$a=-2$, $b=4$, $c=3$

よって, $\boldsymbol{y=-2x^2+4x+3}$

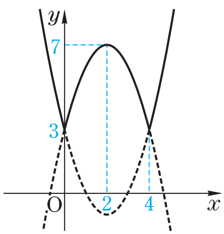
34

(1) $x \leqq 0$, $4 \leqq x$ のとき

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$0<x<4$ のとき

$y=-x^2+4x+3=-(x-2)^2+7$



(2) $x \leqq -1$ のとき

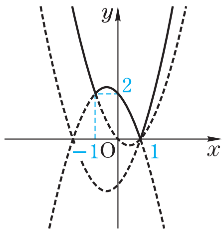
$y=-(x-1)+(x^2-1)=x^2-x$

$-1<x<1$ のとき

$y=-(x-1)-(x^2-1)=-x^2-x+2$

$1 \leqq x$ のとき

$y=(x-1)+(x^2-1)=x^2+x-2$



35

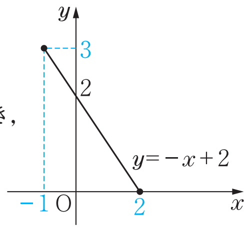
(1) グラフより,

$x=-1$ のとき,

最大値 3

$x=2$ のとき,

最小値 0



(2) $|x-3|=\begin{cases} 3-x\ (1 \leqq x \leqq 3) \\ x-3\ (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$

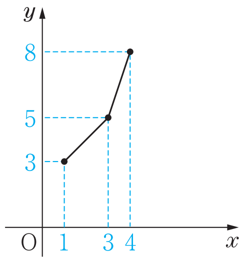
であるから

$y=2x-1$

$\quad +|x-3|$

$=\begin{cases} x+2 \\ (1 \leqq x \leqq 3) \\ 3x-4 \\ (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$

よって, グラフは右のようになり



$x=4$ のとき, **最大値 8**

$x=1$ のとき, **最小値 3**

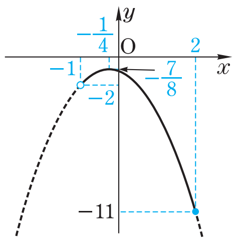
(3) グラフより,

$x=-\dfrac{1}{4}$ のとき,

最大値 $\boldsymbol{-\dfrac{7}{8}}$

$x=2$ のとき,

最小値 −11



36

(1)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+1$

より

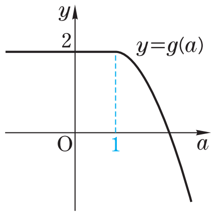
(ア)　軸<1，つまり　$\boldsymbol{a<1}$ **のとき，**

$\boldsymbol{g(a)=f(1)=2}$

(イ)　軸$\geqq1$，つまり　$\boldsymbol{a\geqq1}$ **のとき，**

$\boldsymbol{g(a)=f(a)=-a^2+2a+1}$

(2)　関数$g(a)$のグラフは下図のようになる．これから，$g(a)$の**最大値は 2** であることがわかる．



37

(1)　$x+2y=1$ より，$x=1-2y$

よって，

$x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2$

$=5y^2-4y+1=5\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$

yはすべての値をとるので，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2)　$x^2+2y^2=1$ より，$x^2=1-2y^2\geqq0$

$\therefore\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq y\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　……①

よって，

$x^2+4y=(1-2y^2)+4y=-2(y-1)^2+3$

①の範囲において，最大値，最小値を考えると，

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$，

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

(3)　(i)　$t=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$ より，$0\leqq x\leqq3$ において，

$\boldsymbol{-3\leqq t\leqq1}$

(ii)　y

$=-(x^2-4x+1)^2+2(x^2-4x+1)-3$

$=-t^2+2t-3=-(t-1)^2-2$

よって，$t=1$，すなわち，

$x=0$ のとき，**最大値 $\boldsymbol{-2}$，**

$t=-3$，すなわち，

$x=2$ のとき，**最小値 $\boldsymbol{-18}$**

38

$3x^2+2xy+y^2+4x-4y+3$

$=y^2+2(x-2)y+3x^2+4x+3$

$=(y+x-2)^2-(x-2)^2+3x^2+4x+3$

$=(y+x-2)^2+2x^2+8x-1$

$=(y+x-2)^2+2(x+2)^2-9$

$(y+x-2)^2\geqq0$，$2(x+2)^2\geqq0$ だから，最小となるのは

$y+x-2=x+2=0$

すなわち，$x=-2$，$y=4$ のときで，

最小値 $\boldsymbol{-9}$

39

長方形の他の 1 辺の長さは $100-2x$ (m)

ここで，$x>0$，$100-2x>0$ より

$0<x<50$

このとき，$S=x(100-2x)=-2x^2+100x$

$=-2(x-25)^2+1250$

$0<x<50$ だから，$\boldsymbol{x=25}$ **のとき**

最大値 1250 ($\boldsymbol{m^2}$)

40

(1)　(i)　$x^2+x-2=0$

は $(x+2)(x-1)=0$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 1}$

(ii)　解の公式より，$\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{5}}$

(iii)　$x^2=t$ ($t\geqq0$) とおくと，解の公式より，$t=3\pm2\sqrt{2}$

よって，$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}=\pm(\sqrt{2}\pm1)}$

(複号任意)

(iv)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$

は $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=0$

$\therefore \quad x(x+5)(x^2+5x+10)=0$

$x^2+5x+10=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$

だから，$\boldsymbol{x=0,\ -5}$

(2) 判別式を D' とおくと，$D'=1+k$

i） $D'>0$，すなわち，

$\boldsymbol{k>-1}$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ

ii） $D'=0$，すなわち，

$\boldsymbol{k=-1}$ のとき，実数の重解をもつ

iii） $D'<0$，すなわち，

$\boldsymbol{k<-1}$ のとき，実数解をもたない

41

$y=x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$

より，頂点の y 座標は

$-a^2+a \qquad \therefore \quad -a(a-1)$

i） $-a(a-1)>0$ すなわち，

$\boldsymbol{0<a<1}$ のとき，$\boldsymbol{x}$ 軸と共有点をもたない．

ii） $-a(a-1)=0$ すなわち，

$\boldsymbol{a=0,\ 1}$ のとき，$\boldsymbol{x}$ 軸と接する．

iii） $-a(a-1)<0$ すなわち，

$\boldsymbol{a<0,\ 1<a}$ のとき，$\boldsymbol{x}$ 軸と異なる 2 点で交わる．

42

$x^2-3x+1=2x+b$ を整理して，

$x^2-5x+1-b=0$

この 2 次方程式が異なる 2 つの解をもつことより，判別式>0

$\therefore \quad 25-4(1-b)>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b>-\dfrac{21}{4}}$

43

$x^2-mx+1=mx+m-1$ を整理して

$x^2-2mx+2-m=0$

この 2 次方程式が重解をもつことより，

判別式$=0 \qquad \therefore \quad m^2-(2-m)=0$

$m^2+m-2=0 \qquad (m+2)(m-1)=0$

よって，$\boldsymbol{m=-2,\ 1}$

44

(1) $2x^2-3x-2\leqq 0$ は

$(2x+1)(x-2)\leqq 0$

$\therefore \quad \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2}$

(2) $x^2-4x-2=0$ を解くと，

$x=2\pm\sqrt{6}$

$\therefore \quad \boldsymbol{x<2-\sqrt{6},\ 2+\sqrt{6}<x}$

(3) $x^2-4x+4>0$ は $(x-2)^2>0$

$\therefore \quad \boldsymbol{x<2,\ 2<x}$

(4) $x^2-3x<x-5$ は $x^2-4x+5<0$

ここで，$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

であるから，**解なし**

(5) $x^2-2x-3>0$ は $(x-3)(x+1)>0$

$\therefore \quad x<-1,\ 3<x$

$x^2-4\leqq 0$ は $(x-2)(x+2)\leqq 0$

$\therefore \quad -2\leqq x\leqq 2$

よって，$\boldsymbol{-2\leqq x<-1}$

45

(1) 上に凸より，$\boldsymbol{a<0}$

(2) $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

より，軸 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$，

$a<0$ より，$\boldsymbol{b<0}$

(3) y 切片<0 より，$\boldsymbol{c<0}$

(4) 頂点の y 座標>0，$a<0$

より，$\boldsymbol{b^2-4ac>0}$

(5) $x=1$ のとき $y<0$ だから，

$\boldsymbol{a+b+c<0}$

(6) 放物線の軸は $x=-1$ であることより，$x=0$ のときと $x=-2$ のときの y の値は等しい．

よって，概形から，$\boldsymbol{4a-2b+c<0}$

46

$f(x)=4x^2-2mx+n$ とおくと，

$$f(x)=4\left(x-\frac{m}{4}\right)^2-\frac{m^2}{4}+n$$

$f(x)=0$ の 2 解が，ともに $0<x<1$ に含まれる条件は，

$$\begin{cases} f(0)=n>0,\ f(1)=4-2m+n>0 & \cdots\cdots① \\ 0<\dfrac{m}{4}<1 \text{ すなわち，} 0<m<4 & \cdots\cdots② \\ -\dfrac{m^2}{4}+n\leqq 0 \text{ すなわち，} 4n\leqq m^2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より，$m=1,\ 2,\ 3$.

③より，

$(m,\ n)=(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

このうち，①をみたすのは，

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(2,\ 1)}$$

47

$f(x)=2x-a^2+2a+5$ $(x\geqq -1)$ とおくと，$y=f(x)$ は右上がりの直線だから，

最小値は $f(-1)=-a^2+2a+3$

よって，

$$-a^2+2a+3\geqq 0$$

$$a^2-2a-3\leqq 0 \qquad (a-3)(a+1)\leqq 0$$

$\therefore\quad \boldsymbol{-1\leqq a\leqq 3}$

48

$f(x)=x^2+(m-1)x+1$ とおくと，

$$f(x)=\left(x+\frac{m-1}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+\frac{m}{2}+\frac{3}{4}$$

すべての x に対して，$f(x)\geqq 0$ だから，

$$-\frac{m^2}{4}+\frac{m}{2}+\frac{3}{4}\geqq 0$$

$\therefore\quad m^2-2m-3\leqq 0$

$\therefore\quad (m-3)(m+1)\leqq 0$

よって，$\boldsymbol{-1\leqq m\leqq 3}$

49

(1) $x^2+3x-40<0$ は $(x+8)(x-5)<0$

$\therefore\quad -8<x<5$

$x^2-5x-6>0$ は $(x-6)(x+1)>0$

$\therefore\quad x<-1,\ 6<x$

よって，$\boldsymbol{-8<x<-1}$

(2) $x^2-ax-6a^2>0$ は

$(x-3a)(x+2a)>0$

(i) $a<0$ より，$x<3a,\ -2a<x$

これが(1)の範囲を含むためには，

$-2a>0$ より $-1\leqq 3a$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq a<0}$

(ii) $a=0$ のとき，$x^2>0$ となり，

(1)の範囲で成立する．

(iii) $a>0$ より，$x<-2a,\ 3a<x$

(i)と同様にして

$-1\leqq -2a$　よって，$\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{1}{2}}$

50

$|x^2+2x-8|=|(x+4)(x-2)|$

$$=\begin{cases} (x+4)(x-2) & (x\leqq -4,\ 2\leqq x) \\ -(x+4)(x-2) & (-4<x<2) \end{cases}$$

i) $x\leqq -4,\ 2\leqq x$ のとき

与えられた方程式は

$(x+4)(x-2)=2(x-2)$

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\quad x=-2,\ 2$

$x\leqq -4,\ 2\leqq x$ より，$x=2$

ii) $-4<x<2$ のとき

与えられた方程式は

$-(x+4)(x-2)=2(x-2)$

$(x-2)(x+6)=0$

$\therefore\quad x=-6,\ 2$

$-4<x<2$ より，ともに不適．

以上，i)，ii)より，$\boldsymbol{x=2}$

51

$|x^2-2x-8|=|(x-4)(x+2)|$

$$=\begin{cases} (x-4)(x+2) & (x\leqq -2,\ 4\leqq x) \\ -(x-4)(x+2) & (-2<x<4) \end{cases}$$

i) $x\leqq -2,\ 4\leqq x$ のとき

与えられた不等式は

$(x-4)(x+2)>2(x+2)$

$\therefore\quad (x-6)(x+2)>0$

$\therefore\quad x<-2,\ 6<x$

$x\leqq -2,\ 4\leqq x$ だから，$x<-2,\ 6<x$

ii）$-2<x<4$ のとき

与えられた不等式は

$-(x-4)(x+2)>2(x+2)$

$\therefore\quad (x+2)(x-2)<0$

$\therefore\quad -2<x<2$

$-2<x<4$ だから，$-2<x<2$

以上，i)，ii) より，

$\boldsymbol{x<-2,\ -2<x<2,\ 6<x}$

52

(1) (i) △AOM と △ABN において，

∠OAM＝∠BAN（共通の角）

∠OMA＝∠BNA＝90°

よって，△AOM∽△ABN

（二角相等）

(ii) O は AB, BC の垂直 2 等分線の交点なので△ABC の外心である．よって，OA は外接円の半径．△ABN において，三平方の定理より

$AN=\sqrt{AB^2-BN^2}$

$=\sqrt{12^2-5^2}=\sqrt{119}$

よって，△AOM∽△ABN より

OA：BA＝AM：AN

$\therefore\quad R:12=6:\sqrt{119}$

よって，$R=\boldsymbol{\dfrac{72\sqrt{119}}{119}}$

(2) (i) △AFI と △AEI において，接線と円の半径は直交するので，この 2 つの三角形は直角三角形である．

AI は共通，

I は △ABC の内心なので，

∠IAF＝∠IAE

斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

△AFI≡△AEI

(ii) (i)と同様にして

△BFI≡△BDI,

△CDI≡△CEI

がいえるので

$AE=AF=x,$

$BF=BD=y,$

$CD=CE=z$

とすると，△ABC の 3 辺の長さについて，次の等式が成り立つ．

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots① \\ y+z=6 & \cdots\cdots② \\ z+x=5 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

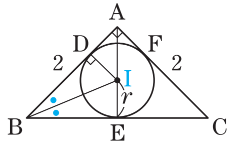
(①＋②＋③)÷2 より

$x+y+z=9 \qquad \cdots\cdots④$

④－②より　$x=3$

$\therefore\quad AF=\boldsymbol{3}$

53



(1) AI は ∠BAC の 2 等分線なので，∠IAD＝45° である．

よって，△ADI は ∠ADI＝90° なので AD＝ID の直角二等辺三角形となる．

したがって，AD＝AB－BD＝2－BD,

AD＝ID＝r だから

$2-BD=r$

$BD=\boldsymbol{2-r}$

また，図形の対称性から，BD＝CF が成り立つので，$CF=BD=\boldsymbol{2-r}$

(2) △BDI と △BEI において，

∠IBD＝∠IBE，DI＝EI,

∠IDB＝∠IEB＝90°

よって，△BDI≡△BEI

したがって，BD＝BE

以上より，$BC=2BE=2(2-r)=2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{r=2-\sqrt{2}}$

(3) △ABE において，BI は ∠ABE の 2 等分線なので

$\mathrm{AI}:\mathrm{IE}=\mathrm{BA}:\mathrm{BE}=2:\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$

よって，$\mathrm{AI}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sqrt{2}$

$=\mathbf{2\sqrt{2}-2}$

54

△PBD において，

$\mathrm{BD}:\mathrm{PD}=\sqrt{3}:1$　　∴　$\mathrm{BD}=1$

よって，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{AF}}\times\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}}\times\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{CE}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{4}{3}\times\frac{2}{1}\times\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=\frac{3}{8}$$

よって，$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\mathbf{3:8}$

55

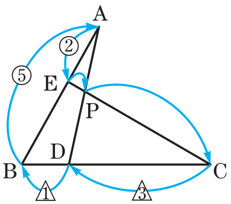
メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BA}}\times\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{EP}}\times\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{2}{5}\times\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{EP}}\times\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PC}}=\frac{2}{15}$$

よって，$\mathrm{EP}:\mathrm{PC}=\mathbf{2:15}$



56

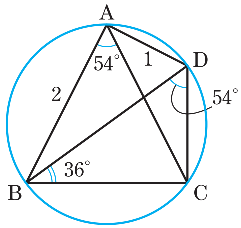
(1)　∠BAC＝∠BDC だから，四角形 ABCD は円に内接する．

よって，円周角の性質より

∠DAC＝∠DBC＝36°

よって，∠BAD＝54°＋36°＝90°

三平方の定理より，$\mathrm{BD}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{5}}$



(2)　∠ADC＝θ とおくと

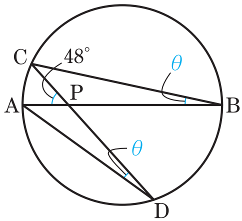
∠ABC＝θ，∠BCD＝3θ

(円弧の長さと円周角は比例する)

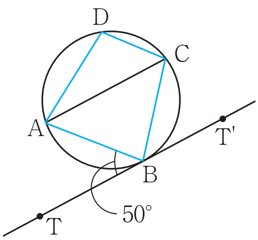
△PBC の内角の和を考えて

$\theta+3\theta+(180°-48°)=180°$

$4\theta=48°$，$\theta=\mathbf{12°}$



57



(1)　接弦定理より，

∠BCA＝∠TBA＝50°

ここで，$\overparen{\mathrm{AB}}=\overparen{\mathrm{AD}}$ であるから

∠ACD＝∠BCA＝50°

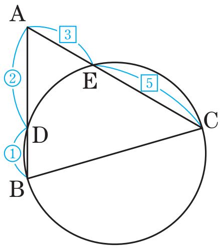
以上より，

∠BCD＝∠BCA＋∠ACD＝**100°**

(2)　円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

∠BAD＝180°－∠BCD＝**80°**

58



4 点 B, C, E, D が同一円周上にあるので，方べきの定理より

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{AD}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AB}$，$\mathrm{AE}=\dfrac{3}{8}\mathrm{AC}$ より

①は $\dfrac{2}{3}\mathrm{AB}^2=\dfrac{3}{8}\mathrm{AC}^2$ となる．

$$\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{3}{4}$$

よって，$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathbf{3:4}$

59

(1)　$\mathrm{AB}=r_1+\mathrm{O_1E}+r_2$ より

$\mathrm{O_1E}=\mathrm{AB}-(r_1+r_2)=\mathrm{AB}-\mathrm{O_1O_2}$

$=9-5=\mathbf{4}$

したがって，$\triangle\mathrm{O_1O_2E}$ において三平方の定理より

$\mathrm{EO_2}=\sqrt{\mathrm{O_1O_2}^2-\mathrm{O_1E}^2}$

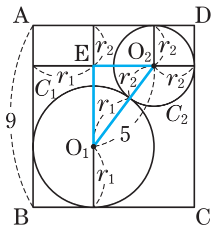
$=\sqrt{5^2-4^2}=3$

よって，

$\mathrm{AD}=r_1+\mathrm{EO_2}+r_2$

$=(r_1+r_2)+\mathrm{EO_2}$

$=\mathrm{O_1O_2}+\mathrm{EO_2}=5+3=\mathbf{8}$



(2)　$\mathrm{O_1O_2}=r_1+r_2=5$ より　$r_2=5-r_1$

よって，$S=\pi r_1{}^2+\pi r_2{}^2$

$=\pi r_1{}^2+\pi(5-r_1)^2$

$=\boldsymbol{\pi(2r_1{}^2-10r_1+25)}$

(3)　円 C_1，C_2 は長方形の中の円なので

$2r_1\leqq\mathrm{AD}=8$ よって，$r_1\leqq4$　……①

$2r_2\leqq\mathrm{AD}=8$ よって，$r_2\leqq4$

∴　$r_2=5-r_1\leqq4$

∴　$1\leqq r_1$　……②

①，②より，$\boldsymbol{1\leqq r_1\leqq4}$

(4)　(2)より　$S=\pi\left\{2\left(r_1-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}\right\}$

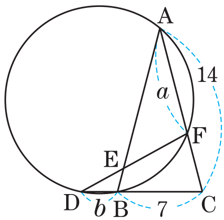
$1\leqq r_1\leqq4$ より

$r_1=\dfrac{5}{2}$ のとき S は**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{25}{2}\pi}$ をとる．

$r_1=1$，4 のとき S は**最大値** $\boldsymbol{17\pi}$ をとる．

60

(1)　4 点 A, B, D, F が同一円周上なので方べきの定理より



$$\mathrm{CA}\times\mathrm{CF}=\mathrm{CD}\times\mathrm{CB}$$

よって，$14\mathrm{CF}=7\mathrm{CD}$

∴　$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}$

∴　$\mathrm{CF}:\mathrm{CD}=1:2$

$\mathrm{AF}=a$，$\mathrm{BD}=b$ とすると $\triangle\mathrm{ABC}$ においてメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{AF}}\times\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{BE}}=1$$

よって，$\dfrac{14-a}{a}\times\dfrac{b}{b+7}\times\dfrac{12}{2}=1$

$\therefore\quad ab+a-12b=0 \quad \cdots\cdots ①$

また，

$$CF:CD=(14-a):(b+7)$$
$$=1:2$$

よって，$b+7=2(14-a)$

$\therefore\quad b=21-2a \quad \cdots\cdots ②$

①，②から b を消去して，

$$a^2-23a+126=0$$

$\therefore\quad (a-9)(a-14)=0$

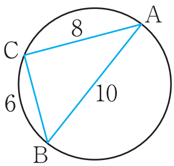
$a<14$ より　$a=9$

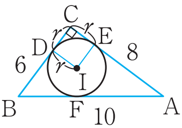
②より　$b=3$

よって，AF：DB＝3：1

(2)　(1)より　DB＝b＝3

61





(1)　△ABC において，$AB^2=BC^2+CA^2$ が成りたつので，△ABC は $\angle ACB=90°$ の直角三角形となる．
円周角の定理より，AB は △ABC の外接円の直径であるから

$R=\mathbf{5}$

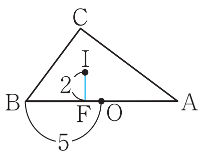
また，図より，EA＝AF，FB＝BD だから，$EA=AF=8-r$

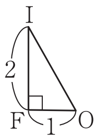
よって，$FB=10-(8-r)=2+r$

$\therefore\quad 2+r=6-r$

$r=\mathbf{2}$

(2)





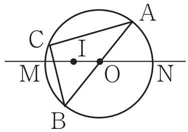
$FB=2+r=4$

よって，$OF=OB-FB=1$

△OIF において，三平方の定理より

$OI=\sqrt{\mathbf{5}}$

(3)

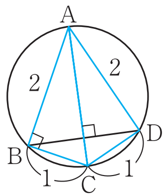


図より

$IM=OM-OI=\mathbf{5-\sqrt{5}}$

$IN=ON+OI=\mathbf{5+\sqrt{5}}$

62



(1)　△ABC と △ADC において
AB＝AD，BC＝DC，AC は共通
よって，△ABC≡△ADC

(2)　(1)と円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$\angle ABC=\angle ADC=90°$

△ABC において，三平方の定理より

$AC=\sqrt{5}$

AC⊥BD だから，四角形 ABCD の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times2\times1\times2$$

$$BD=\frac{4}{\sqrt{5}}=\mathbf{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$$

(別解)　トレミーの定理より

$AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$

$2\cdot1+1\cdot2=\sqrt{5}\,BD$

$\sqrt{5}\,BD=4$

$BD=\frac{4}{5}\sqrt{5}$

63

図のように A，B，C，H とおくと，
OB＝R，OH＝$8-R$，BH＝6
三平方の定理より

$OB^2=OH^2+BH^2$

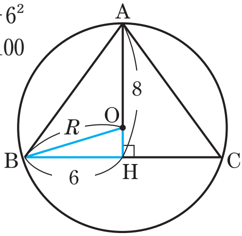
よって，

$R^2=(8-R)^2+6^2$

$\therefore\ \ 0=-16R+100$

したがって，

$R=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$



(別解)　三平方の定理より，

$AB=10$

R は △ABC の外接円の半径だから

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$

(⇨85)

よって，

$\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\dfrac{BC}{2R}$

$\therefore\ \ R=\dfrac{AB\cdot AC}{2AH}=\dfrac{100}{16}=\dfrac{25}{4}$

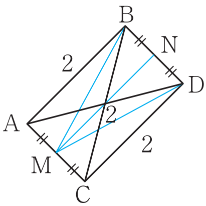
64

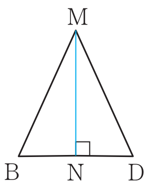
(1)　問題文の図より，立方体の 1 辺の長さは $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2)　図より，$MB=MD=\sqrt{3}$，$BN=ND=1$

△BMN において，三平方の定理より

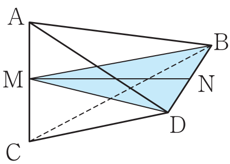
$MN=\sqrt{MB^2-BN^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$





注　MN は立方体の 1 辺の長さと一致する.

(3)　四面体 ABCD において，底面を △BMD と考えると，AC⊥MB，AC⊥MD だから，線分 AC が高さである.



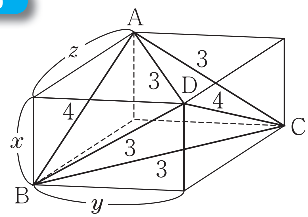
よって，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle BMD\cdot AC$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot2$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\sqrt{2}}$

注　立方体の体積から，正四面体と立方体の間にある三角錐 4 個分をひいてもよい.

65



(1)　直方体の 3 辺の長さをそれぞれ x，y，z とおく．三平方の定理より

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots\cdots① \\ x^2+z^2=16 & \cdots\cdots② \\ y^2+z^2=9 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②−③ より，$x^2-y^2=7$　……④

①+④ より，$2x^2=16$　$x=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

よって，$y=\boldsymbol{1}$，$z=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(2)　求める体積は，立方体の体積 xyz から 4 つの三角錐の体積の合計

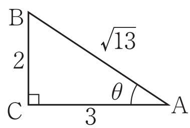
$4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}xyz=\dfrac{2}{3}xyz$ をひいたものである.

よって，

$xyz-\dfrac{2}{3}xyz=\dfrac{1}{3}xyz$

$=\dfrac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}=\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$

66



図のようにA，B，Cを定めると，
三平方の定理より，
$AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
よって，$\sin\theta=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sqrt{13}}}$，$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{\sqrt{13}}}$，
$\tan\theta=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

67

(1) $\cos^2 45^\circ+\sin^2 45^\circ$
$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\mathbf{1}$

(2) $\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\mathbf{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$

(3) $\dfrac{1}{\cos^2 30^\circ}-\dfrac{1}{\tan^2 60^\circ}$
$=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}=\mathbf{1}$

68

(1)，(2)　P(0，1) より
$\sin 90^\circ=\mathbf{1}$，$\cos 90^\circ=\mathbf{0}$

(3)，(4)　$P\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より
$\cos 120^\circ=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\tan 120^\circ=-\mathbf{\sqrt{3}}$

(5)，(6)　$P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ より
$\sin 135^\circ=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}}$，$\tan 135^\circ=-\mathbf{1}$

(7)，(8)　$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ より
$\sin 150^\circ=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\cos 150^\circ=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$

(9)，(10)，(11)　P(−1，0) より
$\sin 180^\circ=\mathbf{0}$，$\cos 180^\circ=-\mathbf{1}$，
$\tan 180^\circ=\mathbf{0}$

69

$\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\cos(90^\circ+\theta)}-\dfrac{\cos(180^\circ-\theta)}{1+\cos(90^\circ-\theta)}$
$=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$
$=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{\cos\theta}}$

70

(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$
$=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$
$0^\circ<\theta<180^\circ$ だから，$\cos\theta=\pm\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}}$
また，
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$=\dfrac{5}{13}\times\left(\pm\dfrac{13}{12}\right)=\pm\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$ **(複号同順)**

(2) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$
$=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{10}$
$\tan\theta<0$ より，$\cos\theta<0$
よって，$\cos\theta=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{\sqrt{10}}}$
$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta$
$=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{10}}}$

71

(1) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$
$=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sin\theta}}$

(2) $\cos\theta+\cos^2\theta=1$
より $\cos\theta+1-\sin^2\theta=1$
∴ $\sin^2\theta=\cos\theta$
よって，
与式$=\cos\theta+\cos^3\theta+\cos^4\theta$

$=\cos\theta+\cos^2\theta(\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=\cos\theta+\cos^2\theta=\mathbf{1}$

72

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

より，$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{-\frac{3}{8}}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$
$=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$

ここで，$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$
$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(3) (2)より $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ……①

また，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ ……②

①＋②，①－② より

$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$，$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

∴ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}=\mathbf{-\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$

73

(1) $\cos^2\theta=\frac{3}{4}$ より，$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より
$\theta=\mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$

(2) $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$ より，$\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より
$\theta=\mathbf{30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$

(3) $\sin3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$0^\circ\leqq3\theta\leqq180^\circ$ だから
$3\theta=60^\circ$，120°

よって，
$\theta=\mathbf{20^\circ}$，$\mathbf{40^\circ}$

74

(1) $4\cos^2\theta-3\leqq0$
$(2\cos\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-\sqrt{3})\leqq0$
∴ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ だから
$\mathbf{30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ}$

(2) $3\tan^2\theta-1>0$
$(\sqrt{3}\tan\theta-1)(\sqrt{3}\tan\theta+1)>0$
∴ $\tan\theta<-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ だから
$\mathbf{30^\circ<\theta<90^\circ}$，$\mathbf{90^\circ<\theta<150^\circ}$

(3) $\sin3\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ かつ，$0^\circ\leqq3\theta\leqq180^\circ$

より
$0^\circ\leqq3\theta<60^\circ$，$120^\circ<3\theta\leqq180^\circ$
よって，$\mathbf{0^\circ\leqq\theta<20^\circ}$，$\mathbf{40^\circ<\theta\leqq60^\circ}$

75

$2\sin^2x+\cos x=1$
$2(1-\cos^2x)+\cos x=1$
∴ $2\cos^2x-\cos x-1=0$
∴ $(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$
∴ $\cos x=-\frac{1}{2}$，1

$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ より
$x=\mathbf{120^\circ}$，$\mathbf{0^\circ}$

76

$2\sin^2x-5\cos x+1\leqq0$
$2(1-\cos^2x)-5\cos x+1\leqq0$
∴ $2\cos^2x+5\cos x-3\geqq0$
∴ $(2\cos x-1)(\cos x+3)\geqq0$
∴ $\cos x\leqq-3$，$\frac{1}{2}\leqq\cos x$

$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ において，
$-1\leqq\cos x\leqq1$ であるから

$\frac{1}{2} \leqq \cos x \leqq 1$

∴　$\mathbf{0^\circ \leqq x \leqq 60^\circ}$

77

$y = -\cos^2 x - \sin x + 1$

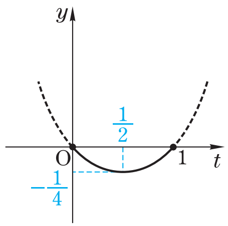
$\quad = -(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1$

$\quad = \sin^2 x - \sin x$

$t = \sin x$ とおくと，

$y = t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

ここで，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ において，$0 \leqq t \leqq 1$



グラフより，$t = \frac{1}{2}$，すなわち $x = \mathbf{30^\circ}$，**$\mathbf{150^\circ}$ のとき最小値 $\mathbf{-\frac{1}{4}}$**，$t = 0$，1，すなわち，$x = \mathbf{0^\circ}$，$\mathbf{90^\circ}$，$\mathbf{180^\circ}$ のとき**最大値 0.**

78

正弦定理より

$\frac{2}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$

$\sin C = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

79

余弦定理より

$\cos A = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA}$

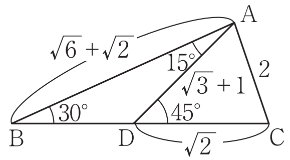
$\quad = \frac{8^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{11}{16}$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より，$\sin A > 0$ だから

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2}$

$\quad = \sqrt{\frac{135}{256}} = \mathbf{\frac{3\sqrt{15}}{16}}$

80



(1)　△ACD において，正弦定理より

$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle CAD}$

$\sin \angle CAD = \frac{1}{2}$

三角形の内角の和は 180° であるから

$0^\circ < \angle CAD < 135^\circ$

よって，$\angle CAD = \mathbf{30^\circ}$

(2)　点Aから辺 BC に垂線 AE を下ろすと

$BE = AB \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

$DE = AD \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

よって，$BD = BE - DE = \sqrt{2}$

△ABD に余弦定理を適用して

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 15^\circ$

$2 = 12 + 6\sqrt{3} - (8\sqrt{2} + 4\sqrt{6}) \cos 15^\circ$

$\cos 15^\circ = \mathbf{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

81

中線定理

$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

より

$5^2 + 4^2 = 2(AM^2 + 3^2)$

∴　$2AM^2 = 23$

∴　$AM = \sqrt{\frac{23}{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{46}}{2}}$

82

82 より，$BD=2OB=2\sqrt{17}$，$GF=\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$

であるから，平行四辺形 ABCD の面積を x とおくと，

$$\triangle AGF : \text{▱}ABCD=\left(\frac{GF}{BD}\times\frac{1}{2}x\right) : x$$
$$=\frac{1}{6} : 1=\mathbf{1 : 6}$$

83

$b\tan A=a\tan B$ より

$$b\frac{\sin A}{\cos A}=a\frac{\sin B}{\cos B}$$
$$\therefore\quad \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos A}{\cos B}$$
$$\therefore\quad \frac{\cos A}{\cos B}=1\ \left(\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}\ \text{より}\right)$$
$$\therefore\quad \cos A=\cos B$$

$0°<A<180°$，$0°<B<180°$ だから

$$A=B$$

ゆえに，**$\angle A=\angle B$ をみたす二等辺三角形.**

注 この問題のように角だけの関係式になおした方がよいこともあります.

84

(1) 3 辺の長さは正なので $t>0$ である.

$5t<(t+2)+(2t+3)$ より $t<\dfrac{5}{2}$

$t+2<5t+(2t+3)$ より $-\dfrac{1}{6}<t$

$2t+3<5t+(t+2)$ より $\dfrac{1}{4}<t$

よって，三角形が存在するような t のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{5}{2}}$

(2) (1)の条件と $t>2$ より $2<t<\dfrac{5}{2}$

このとき，

$$5t-(t+2)=4t-2>0$$
$$5t-(2t+3)=3t-3>0$$

だから最大辺の長さは $5t$.

よって，$(5t)^2>(t+2)^2+(2t+3)^2$ ……①

を示せばよい.

$$f(t)=(5t)^2-(t+2)^2-(2t+3)^2$$
$$=20t^2-16t-13$$
$$=20\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{81}{5}\ \text{より}$$

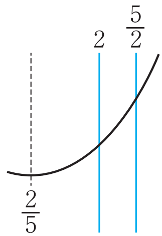
$y=f(t)$ は下に凸の放物線で，

軸が $t=\dfrac{2}{5}<2$

$f(2)=35>0$ なので，

$f(t)>0\ \left(2<t<\dfrac{5}{2}\right)$

よって，①は成立し，三角形は鈍角三角形である.



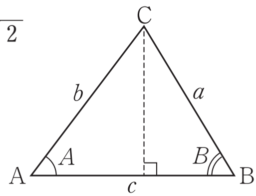
85

$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)=45°$，

正弦定理より，$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}$

$$\therefore\quad CA=\sin 60°\times\frac{12}{\sin 45°}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12\sqrt{2}$$
$$=6\sqrt{6}$$

C から辺 AB に垂線を引くと



$AB=AC\cos A+BC\cos B$

であることがわかる．これより

$$AB=6\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+12\cdot\frac{1}{2}=6(\sqrt{3}+1)$$

よって，△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6(\sqrt{3}+1)\cdot 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{18(3+\sqrt{3})}$$

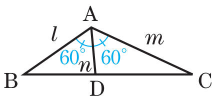
注　（第一余弦定理）

$a=b\cos C+c\cos B,$

$b=a\cos C+c\cos A,$

$c=a\cos B+b\cos A$

86



△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}lm$$

ここで，△ABC＝△ABD＋△ADC より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{DAC}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}ln+\frac{\sqrt{3}}{4}nm=\frac{\sqrt{3}}{4}n(l+m)$$

よって，$lm=n(l+m)$

$lmn\neq 0$ より，両辺を lmn でわると，

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$$

87

余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\cos A$$

$$=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7$$

$$\therefore\quad \mathrm{BC}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$$

△ABC の面積を S とすると，

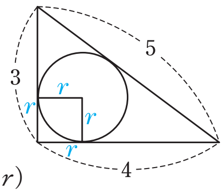
$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ここで，

$$r=\frac{2S}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}}$$

88



$3^2+4^2=5^2$

より，この三角形は直角三角形である．

よって，

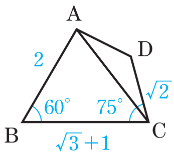
$5=(3-r)+(4-r)$

より

$$r=\boldsymbol{1}$$

89

(1)



余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$=4+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=6$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$

(2)　正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{ACB}=\sin\angle\mathrm{ABC}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

三角形の内角の和は 180° であるから，

$0°<\angle\mathrm{ACB}<120°$ より

$\angle\mathrm{ACB}=\boldsymbol{45°}$

(3)　$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{BCD}-\angle\mathrm{ACB}=30°$

よって，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\sin\angle\mathrm{ACD}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$=\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

90

100 円玉，50 円玉，10 円玉の枚数を

(100 円玉，50 円玉，10 円玉)

で表す．540 円になるのは，使用する硬貨がそれぞれ 1 枚以上合計 25 枚以下であることに気をつけて

(4, 2, 4), (4, 1, 9),
(3, 4, 4), (3, 3, 9), (3, 2, 14),
(3, 1, 19),
(2, 6, 4), (2, 5, 9), (2, 4, 14),
(2, 3, 19),
(1, 8, 4), (1, 7, 9), (1, 6, 14),
(1, 5, 19) の **14 通り**

91

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$各 2 枚から 3 枚を選ぶ方法は，

(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4),
(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4),
(1, 3, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 4),
(2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 3),
(2, 3, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4),
(3, 4, 4) だけあり，

すべて異なる数字のとき 6 個の整数が，2 つ同じ数字のとき 3 個の整数がつくれるので

$6\times4+3\times12=24+36=$**60 (個)**

(2) $\boxed{0}$を 1 個使うので，(1)と同様に考えると

(0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 1, 3),
(0, 1, 4), (0, 2, 2), (0, 2, 3),
(0, 2, 4), (0, 3, 3), (0, 3, 4),
(0, 4, 4)

だけ数字の組合せがあり，

0 以外が異なる数字のとき，

$3!-2=4$ (個)

の整数が，

0 以外が同じ数字のとき，

$3-1=2$ (個)

の整数ができるので

$4\times6+2\times4=24+8=$**32 (個)**

(3) (1), (2)より，$60+32=$**92 (個)**

92

Aの要素 1 ～ 9 のおのおのについて，それが部分集合の要素であるか，そうでないかで，2 通り考えられるので，求める個数は

$2\times2\times\cdots\times2=2^9=$**512 (個)**

93

72 の正の約数の逆数の和は

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^0,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^1,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}$ と

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^0,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^1,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}$ からそれぞれ

1 つずつ選んでつくった積の和だから，

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\times$$
$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{15}{8}\times\frac{13}{9}=\boldsymbol{\frac{65}{24}}$$

94

$$r_nC_r=r\cdot\frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!(r-1)!}$$
$$=n_{n-1}C_{r-1}$$

95

(1) 両端の文字の入り方は ${}_3P_2$ 通りあり，他の 4 文字の並べ方は $4!$ 通りあるので，

$6\times4!=$**144 (個)**

(2) P，E，I をひとまとめと考えると，全体は 4 文字と考えられるので，並べ

方は 4! 通りあり，P，E，I の入れかえが 3! 通りあるので，

$4!\times 3!=\mathbf{144}$ **(個)**

(3)　まず，P，E，I を並べ，その間と両端 4 か所から 3 か所を選んで，J，U，N を入れると考えれば，

$3!\times {}_4P_3=\mathbf{144}$ **(個)**

注　$\boxed{(\text{全体})-(\text{3 文字がとなりあう})}$ と考えると $6!-144=576$ (個) とまちがえてしまう．

(4)　U，E，I が入る場所の選び方は，${}_6C_3$ 通りあり，並べ方は 1 通りである．
また，残りの 3 文字の並べ方は，3! 通りあるので

${}_6C_3\times 3!=\mathbf{120}$ **(個)**

96

下 2 桁が 25 の倍数のとき 25 の倍数となる．
6 個の数でつくられる 25 の倍数は 25，50 の 2 個．

(i)　下 2 桁が 25 のとき
千の位，百の位の 2 数の並べ方は，0，1，3，4 から 2 数をとって並べたもので，0 が入るものは 3 個，0 が入らないものは ${}_3P_2=3\times 2=6$ (個)．
よって　$3+6=9$ (個)

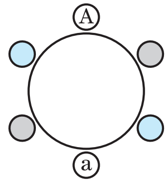
(ii)　下 2 桁が 50 のとき
千の位，百の位の 2 数の並べ方は 1，2，3，4 から 2 数をとって並べたもので，${}_4P_2=4\times 3=12$ (個)．

(i)，(ii)より　$9+12=\mathbf{21}$ **(個)**

97

s，i，n を○とした，
○，c，○，e，○，c，e
の並べ方は $\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$ (通り)．
この並びの 1 つ 1 つについて，○に s，i，n をこの順番で入れる方法は 1 通り．
よって，**210 通り**．

98



(1)　3 人の男子が円卓にすわる方法は
$(3-1)!=2$ (通り)
男子の間 3 か所に女子がすわればよいので　$2\times 3!=\mathbf{12}$ **(通り)**

(2)　A と a を固定したとき，B と b，C と c の入る位置が 2 通り，B と b，C と c の入れかえが 2 通りずつ．
よって，$2\times 2\times 2=\mathbf{8}$ **(通り)**

99

(1)　男子 7 人の中から 2 人，女子 4 人の中から 1 人選ぶので，

$${}_7C_2\times {}_4C_1=\frac{7\cdot 6}{2}\times 4=\mathbf{84}\ \textbf{(通り)}$$

(2)　男子 7 人の中から 1 人，女子 4 人の中から 2 人選ぶ方法は
${}_7C_1\times {}_4C_2=42$
(1)もあわせて　$84+42=\mathbf{126}$ **(通り)**

100

正三角形でない三角形が 6 個と，正三角形となる 2 個であるから，

$6+2=\mathbf{8}$ **(個)**

101

(1)　最大の目 $\leqq 4$ となるのは
それぞれのサイコロの目が 1 から 4 の目であるとき．
よって，　$4^3=\mathbf{64}$ **(通り)**

(2)　最大の目 $=4$ となるのは
「最大の目 $\leqq 4$」－「最大の目 $\leqq 3$」のとき．
よって，　$4^3-3^3=\mathbf{37}$ **(通り)**

102

(1)　使われる 2 つのスタンプの選び方は
${}_4C_2=6$ (通り)

この2つがAとBのスタンプとすると，Aのみ，Bのみの押し方2通りが不適当だから，

$2^5-2=30$（通り）

よって，$6\times30=$**180（通り）**

(2)　使われる3つのスタンプの選び方は

${}_4C_3=4$（通り）

この3つがA，B，Cのスタンプとすると，どのカードにもスタンプの押し方が3通りずつあるが，この中には，1つのスタンプのみ，2つのスタンプのみ使われているものが含まれる．

(i)　1つのスタンプのみ使われているものは，3通り

(ii)　2つのスタンプのみ使われているものは，

2つのスタンプの選び方が

${}_3C_2=3$（通り）

2つのスタンプの使われ方が

$2^5-2=30$（通り）

より，$3\times30=90$（通り）

よって，A，B，Cのスタンプが使われているのは，

$3^5-3-90=150$（通り）

これより，使わないスタンプが1つになる押し方は

$150\times4=$**600（通り）**

103

8人の生徒を2人，2人，2人，2人に分けると考えると

(1)　組に区別があるので

${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2$

$=\dfrac{8\cdot7}{2}\times\dfrac{6\cdot5}{2}\times\dfrac{4\cdot3}{2}\times1=$**2520（通り）**

(2)　組に区別がないので

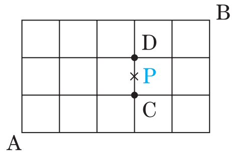
$\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=$**105（通り）**

104

(1)　「｜」を3本，「—」を5本並べると考えて，

$\dfrac{8!}{5!3!}=$**56（通り）**

(2)



Pを通る道は，

A⟶C⟶D⟶B が考えられる．

ここで，A⟶C では $\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

D⟶B では $\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）

あるので，求めるものは，

$56-4\times3=$**44（通り）**

105

赤，青，黄のカードの枚数をそれぞれx，y，zとすると，$x+y+z=5$（$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$）をみたす$(x,\ y,\ z)$の組の個数を求めればよい．よって，$\dfrac{7!}{5!2!}=$**21（通り）**

106

1枚のコインの面は2通りあるので，3枚では$2^3=8$（通り）ある．

求めるものの組合せは，

（表，表，表），（裏，裏，裏）より

$\dfrac{2}{8}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

107

2つの数が互いに素となる組合せは

(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，

(1，7)，(1，8)，(1，9)，(1，10)，

(2，3)，(2，5)，(2，7)，(2，9)，

(3，4)，(3，5)，(3，7)，(3，8)，

(3，10)，(4，5)，(4，7)，(4，9)，

(5，6)，(5，7)，(5，8)，(5，9)，

(6，7)，(7，8)，(7，9)，(7，10)，

(8, 9), (9, 10)
の 31 通りである．

よって，$\dfrac{31}{{}_{10}C_2}=\mathbf{\dfrac{31}{45}}$

108

4 桁の整数になる並べ方は，全部で

$4\times4\times3\times2=96$（通り）

また，3 の倍数となるためには，選ばれた 4 つの数の和が 3 の倍数になればよい．その数の組合せは

(i)　$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$　(ii)　$\{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$

である．(i)，(ii)の並べ方は，それぞれ

$3\times3\times2\times1=18$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times18}{96}=\dfrac{36}{96}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

109

i）　2 個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{36}$$

ii）　2 個とも白玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{{}_3C_1}{{}_9C_2}=\frac{3}{36}$$

iii）　2 個とも青玉である確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{36}$$

i），ii），iii）は排反だから求める確率は

$$\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{6}{36}=\frac{10}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

110

積 abc が偶数であるためには，a，b，c のうち「少なくとも 1 つは偶数」であればよいから，余事象である「すべて奇数」となるときを考え

$$1-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

111

(1)　1 回の試行で黒石のでる確率は $\dfrac{1}{3}$，

白石のでる確率は $\dfrac{2}{3}$．

よって，4 回目にはじめて黒石がでる確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{8}{81}}$$

(2)　i）　白黒白黒とでる確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$$

ii）　黒白黒白とでる確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$$

2 つの事象は排反だから，求める確率は

$$\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\mathbf{\frac{8}{81}}$$

112

(1)　8 題中 6 題正解であり，どの 2 題が不正解かを考えて

$${}_8C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2^6}=\mathbf{\frac{7}{64}}$$

(2)　8 題中　(i) 6 題　(ii) 7 題　(iii) 8 題 正解するときであるから

(i)　(1)より　$\dfrac{7}{64}$

(ii)　どの 1 題が不正解かを考えて

$${}_8C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

(iii)　すべて正解だから，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$$

(i)，(ii)，(iii)より，$\dfrac{7}{64}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{256}=\mathbf{\dfrac{37}{256}}$

113

(解 I)　根元事象は

${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8$（通り）

当たりを○，はずれを×で表すと，C が当たるのは××○，×○○，○×○の 3 通りがあり，それぞれ ${}_8P_2\cdot{}_2P_1$，${}_8P_1\cdot{}_2P_2$，${}_8P_1\cdot{}_2P_2$ 通りあるので，

求める確率は　$\dfrac{8\cdot7\cdot2+8\cdot2+8\cdot2}{10\cdot9\cdot8}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

(解Ⅱ)　根元事象は　$\dfrac{10!}{8!2!}=5\cdot 9$ (通り)

Cが当たるのは 10 本のくじを 1 列に並べたとき，左から 3 番目に当たりくじがあるときで，その並べ方は

$$\frac{9!}{8!1!}=9\text{ (通り)}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{5\cdot 9}=\frac{1}{5}$$

114

$Y\geqq 3$ となるとき，でる目は 4 回とも 3 から 6 のどれかだから，

$$P(Y\geqq 3)=\left(\frac{4}{6}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

同様に，

$$P(Y\geqq 4)=\left(\frac{3}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

よって，

$$P(Y=3)=P(Y\geqq 3)-P(Y\geqq 4)$$
$$=\frac{16}{81}-\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{175}{1296}}$$

115

(1)　裏は $(10-k)$ 回でるので，点Pの座標は

$$(\boldsymbol{k},\ \mathbf{10}-\boldsymbol{k})$$

(2)　(1)より $(6,\ 4)$ となるのは，$k=6$ のときだから

$${}_{10}C_6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{210}{2^{10}}=\mathbf{\frac{105}{512}}$$

(3)　表が 6 回以上でる確率を考えるので

$$\frac{105}{512}+{}_{10}C_7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$+{}_{10}C_8\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$+{}_{10}C_9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=(210+120+45+10+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=\frac{193}{2^9}=\mathbf{\frac{193}{512}}$$

116

(1)　とりだし方の総数は ${}_{10}C_2=45$ (通り)

このうち，2 枚とも偶数になるのは，

$${}_5C_2=10\text{ (通り)}$$

$$\therefore\quad \frac{10}{45}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2)　素数は$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$の 4 枚だから

$$\frac{{}_4C_2}{45}=\frac{6}{45}=\mathbf{\frac{2}{15}}$$

(3)　奇数は$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{9}$の 5 枚だから

$$\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{45}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

117

(B)

＼	1	2	3	4	5	6
1		●			●	
2	●			●		
3			●			●
4		●			●	
5	●			●		
6			●			●

($A\cap B$)

＼	1	2	3	4	5	6
1		●				
2	●			●		
3						●
4		●			●	
5				●		
6			●			●

($A\cup B$)

＼	1	2	3	4	5	6
1		●		●	●	●
2	●	●	●	●	●	●
3		●	●	●		●
4	●	●	●	●	●	●
5	●	●		●		●
6	●	●	●	●	●	●

$\overline{A}$：両方とも奇数　だから

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

また，上の表より，

$$P(B)=\frac{12}{36}=\mathbf{\frac{1}{3}},\quad P(A\cap B)=\frac{9}{36}=\mathbf{\frac{1}{4}},$$

$$P(A\cup B)=\frac{30}{36}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

注　ここで，
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

118

(1)　PからQまで行く最短経路は

${}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7!}{4!3!}=35$（通り）である．

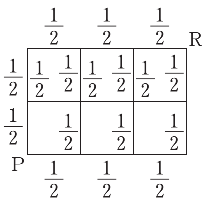
PからRまで行く最短経路は

${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）あり

RからQまでの最短経路は2通りだから，

$$\frac{10\times 2}{35}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

(2)　それぞれの交差点における確率を下図により表現する．



求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 10=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

119

(1)　p_n は，$n-5$ 個の無印の白玉と，5個の赤印の白玉の入った袋の中から5個とりだし，赤印が2個含まれている確率であるから

$$\therefore\quad p_n=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_5}$$

$$=\boldsymbol{\frac{200(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}}$$

(2)　$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\dfrac{200(n-4)(n-5)(n-6)}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}}{\dfrac{200(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}}$$

$$=\frac{(n-4)^2}{(n+1)(n-7)}=1+\frac{23-2n}{(n+1)(n-7)}$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{p_n}-1=\frac{23-2n}{(n+1)(n-7)}$$

よって，$n\leqq 11$ のとき，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$，

$n\geqq 12$ のとき，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$

$\therefore\quad p_8<p_9<\cdots<p_{11}<p_{12}>p_{13}>\cdots$

よって，p_n を最大にする n は，**12**

120

3数の和が3の倍数になる組は

(1，2，3)，(2，3，4)

の2通りなので和が3の倍数になるとり出し方の総数は

$3!\times 2=12$（通り）．

このうち，1枚目のカードが$\boxed{1}$であるのは(1，2，3)，(1，3，2)の2通り．

よって求める確率は

$$\frac{2}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

121

(1)　箱Cに赤玉が含まれない，つまり箱Cが白玉のみであるという余事象を考えて，求める確率は，

$$1-\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\boldsymbol{\frac{27}{35}}$$

(2)　箱Cの中の玉の組合せは，

(i) 赤・赤　　(ii) 赤・白

のみであり(i)のとき，箱Cから赤玉をとりだす確率は1だから

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}\times 1=\frac{9}{35}$$

(ii)のとき，箱Cから赤玉をとりだす確率は $\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{35}$$

(i)，(ii)より，求める確率は，

$$\frac{9}{35}+\frac{9}{35}=\boldsymbol{\frac{18}{35}}$$

(3)　$P(R)$：箱Cから赤玉をとりだす確率，$P(A)$：箱Aの赤玉をえらぶ確率とすると，

$$P(R\cap A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore\quad P_R(A)=\frac{P(R\cap A)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{18}{35}}=\boldsymbol{\frac{7}{12}}$$

注 $P(R\cap A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$ と求めてもよい.

122

目の和	0	1	2	3	4	5	6
確　率	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

表より，期待値は

$$0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{2}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{2}{16}+6\times\frac{1}{16}=\mathbf{3}$$

123

3 個の球のとりだし方は，

$${}_6C_3=20\ (\text{通り})$$

ある．

(i) 3 点になるのは，3 個とも白球より，確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

(ii) 2 点になるのは，白球が 2 個，黒球が 1 個のときだから，その確率は

$$\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{6\times2}{20}=\frac{3}{5}$$

(iii) 1 点になるのは，白球が 1 個，黒球が 2 個のときだから，その確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4\times1}{20}=\frac{1}{5}$$

よって，求める期待値は，

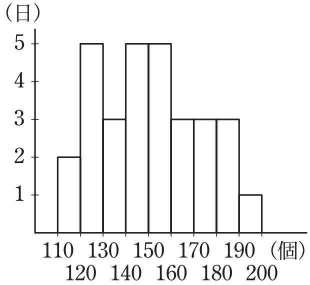
$$3\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+1\times\frac{1}{5}=\mathbf{2}\ (\textbf{点})$$

124

(1)

階　級 (個)	度数
110 以上 〜 120 未満	2
120 〜 130	5
130 〜 140	3
140 〜 150	5
150 〜 160	5
160 〜 170	3
170 〜 180	3
180 〜 190	3
190 〜 200	1
計	30

(2)



125

(1) データの最も多い階級は，7.5 秒以上 8.0 秒未満だから，最頻値は

$$\frac{7.5+8.0}{2}=\mathbf{7.75}\ (\textbf{秒})$$

(2) (平均値)

$$=\left(\frac{6.0+6.5}{2}\times2+\frac{6.5+7.0}{2}\times2+\frac{7.0+7.5}{2}\times6+\frac{7.5+8.0}{2}\times8+\frac{8.0+8.5}{2}\times2\right)\times\frac{1}{20}=\frac{148}{20}=\mathbf{7.4}\ (\textbf{秒})$$

(3) データの平均値が最小となるのは各階級の最小値を使って平均を計算したときなので，

(平均値の最小値)

$=(6.0\times2+6.5\times2+7.0\times6+7.5\times8$
$+8.0\times2)\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{143}{20}=7.15$

この値と階級の幅が 0.5 秒であることから平均値のとりうる値の範囲は，

7.15 秒以上 7.65 秒未満

126

(1)　A君のデータを小さい順に並べると
1，1，2，2，2，5，5，6，6，10
第 2 四分位数は

$\dfrac{2+5}{2}=\mathbf{3.5}$（**点**）

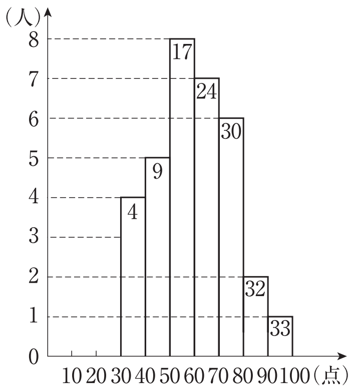
第 1 四分位数は **2 点**，
第 3 四分位数は **6 点**
四分位範囲は，6−2=**4**（**点**）
B君のデータを小さい順に並べると
1，4，5，5，7，8，8，9，10，10
第 2 四分位数は

$\dfrac{7+8}{2}=\mathbf{7.5}$（**点**）

第 1 四分位数は **5 点**，
第 3 四分位数は **9 点**
四分位範囲は，9−5=**4**（**点**）

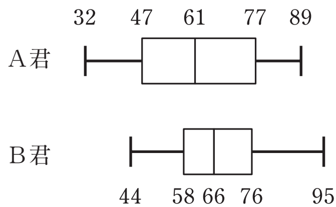
(2)　2 人の四分位範囲が等しいことからデータの散らばり度合いは同程度と考えられる．

127

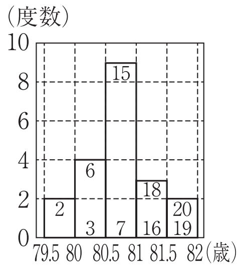


33 人に対する第 2 四分位数は，点数の低い方から 17 人目．
第 1 四分位数は，点数の低い方から，8 人目と 9 人目の平均．
第 3 四分位数は，点数の高い方から，8 人目と 9 人目の平均．
よって，第 1 四分位数が存在する階級値は **45 点**
第 2 四分位数が存在する階級値は **55 点**
第 3 四分位数が存在する階級値は **75 点**

128



129



（最小値について）　最小値は 79.5 以上 80.0 未満の階級にあるので，⓪，③，④，⑤が正しい．
（最大値について）　最大値は 81.5 以上 82.0 未満の階級にあるので，④，⑤，⑥，⑦が正しい．
以上のことより，正しいのは④または⑤である．
次に，第 1 四分位数は 5 番目と 6 番目のデータの平均値だから，80.0 以上 80.5 未満の階級にある．よって，④が正しい．

130

⓪　箱ひげ図から平均値はわからないので，正しくない．

①　0 点の生徒が 10 点だった場合，すなわち，1 人だけが変化した場合が考えられるので，正しくない．

②　ⅠとⅡの箱ひげ図を比較すると，最小値，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数，最大値がそれぞれ 1 点ずつ上がっているので，データのばらつきが大きくなるとはいえない．
よって，正しくない．

以上のことより，⓪～②はつねに正しいとは限らない．すなわち，正しいものは③である．

131

第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とすると，

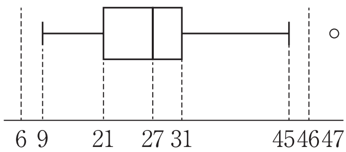
$Q_1=21$，$Q_3=31$

よって，$Q_3-Q_1=31-21=10$

$\therefore$　$Q_1-1.5\times10=21-15=6$

$Q_3+1.5\times10=31+15=46$

したがって，外れ値は **47**.



132

A クラスの身長の平均値，分散，標準偏差をそれぞれ $\overline{x}_A$，$s_A{}^2$，s_A とすると

$\overline{x}_A=\dfrac{1}{20}(150\times5+160\times6+170\times4+180\times4+190\times1)=\mathbf{165}$ (cm)

$s_A{}^2=\dfrac{1}{20}\{(150-165)^2\times5+(160-165)^2\times6+(170-165)^2\times4+(180-165)^2\times4+(190-165)^2\times1\}=\mathbf{145}$

$s_A=\sqrt{\mathbf{145}}$ (cm)

B クラスの身長の平均値，分散，標準偏差をそれぞれ $\overline{x}_B$，$s_B{}^2$，s_B とすると

$\overline{x}_B=\dfrac{1}{20}(150\times1+160\times4+170\times12+180\times2+190\times1)=\mathbf{169}$ (cm)

$s_B{}^2=\dfrac{1}{20}\{(150-169)^2\times1+(160-169)^2\times4+(170-169)^2\times12+(180-169)^2\times2+(190-169)^2\times1\}=\mathbf{69}$

$s_B=\sqrt{\mathbf{69}}$ (cm)

以上より，$s_A>s_B$ なので，A クラスの方が身長の散らばり度合いが大きい．

133

それぞれのデータから 62 をひいた数を新しいデータとして考える．

$a'=a-62$，$b'=b-62$，$c'=c-62$ とおくと

(ア)は $-5<a'<b'<2<c'$ だから，

(イ)より，$c'-(-5)=10$　$\therefore$　$c'=5$

(ウ)より，$\dfrac{57+a+b+64+c}{5}=62$

$\therefore$　$\dfrac{(62-5)+(a'+62)+(b'+62)+(62+2)+(c'+62)}{5}=62$

$\therefore$　$-5+a'+b'+2+c'=0$

$\therefore$　$a'+b'=-2$　……①

(エ)より

$\dfrac{(57-62)^2+(a-62)^2+(b-62)^2+(64-62)^2+(c-62)^2}{5}=11.6$

$\therefore$　$25+a'^2+b'^2+4+c'^2=58$

$\therefore$　$a'^2+b'^2=4$　……②

①，②と $a'<b'$ より，$a'=-2$，$b'=0$

よって，$a=\mathbf{60}$，$b=\mathbf{62}$，$c=\mathbf{67}$

134

正方形 C_1，C_2，…，C_8 の 1 辺の長さをそれぞれ，a_1，a_2，…，a_8 とすると，面積の平均値は

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2}{8}$$

ここで，1 辺の長さの平均値は 3，分散は 4 であるから，分散の公式より

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2}{8}-3^2=4$$

よって，$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2}{8}=9+4=\mathbf{13}$

135

A グループの得点を a_1，a_2，a_3，a_4
B グループの得点を b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6 とおくと
$\overline{a}=8.0$ より，$a_1+a_2+a_3+a_4=32$
$\overline{b}=7.0$ より，
$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=42$
よって，

$$\overline{x}=\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)+(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)}{10}$$

$$=\frac{74}{10}=\mathbf{7.4}$$

次に，$s_a{}^2=4.0$ より

$$\frac{1}{4}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)-8^2=4$$

$$\therefore\quad a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2=272$$

また，$s_b{}^2=5.0$ より

$$\frac{1}{6}(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2)-7^2=5$$

$$\therefore\quad b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2=324$$

$$s_x{}^2=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2}{10}$$

$$-(\overline{x})^2=\frac{272+324}{10}-(7.4)^2$$

$$=59.6-54.76=\mathbf{4.84}$$

136

$\overline{x}=6$ より，$x_1+x_2+\cdots+x_9=54$
$s_x{}^2=4$ より

$$\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_9{}^2}{9}-(\overline{x})^2=4$$

$$\therefore\quad x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_9{}^2=9\times(36+4)$$

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_9{}^2=360$$

よって，

$$\overline{y}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9+9}{10}=\frac{54+9}{10}$$

$$=\mathbf{6.3}$$

$$s_y{}^2=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_9{}^2+9^2}{10}-(\overline{y})^2$$

$$=\frac{360+81}{10}-(6.3)^2$$

$$=44.1-39.69=\mathbf{4.41}$$

137

$y=x-167$ で変換すると

x	166	158	177	187	162
y	-1	-9	10	20	-5

y の値は表のようになる．

$$\overline{y}=\frac{(-1)+(-9)+10+20+(-5)}{5}$$

$$=\frac{15}{5}=3$$

$\overline{y}=\overline{x}-167$ より，$\overline{x}=\overline{y}+167=\mathbf{170}$
次に

$$s_y{}^2=\frac{1}{5}(1+81+100+400+25)-3^2$$

$$=\frac{607}{5}-9=\frac{562}{5}=112.4$$

$s_y{}^2=1^2\cdot s_x{}^2$ だから，$s_x{}^2=\mathbf{112.4}$

138

(A の偏差値の合計)
科目 X の偏差値は

$$\frac{96-\overline{x}}{s_x}\times10+50=\frac{96-72}{16}\times10+50$$

$$=65$$

科目 Y の偏差値は

$$\frac{90-\overline{y}}{s_y}\times10+50=\frac{90-84}{24}\times10+50$$

$$=52.5$$

よって，A の偏差値の合計は
$65+52.5=117.5$
(B の偏差値の合計)

科目Xの偏差値は

$$\frac{88-\overline{x}}{s_x}\times10+50=\frac{88-72}{16}\times10+50=60$$

科目Yの偏差値は

$$\frac{99-\overline{y}}{s_y}\times10+50=\frac{99-84}{24}\times10+50$$

$$=56.25$$

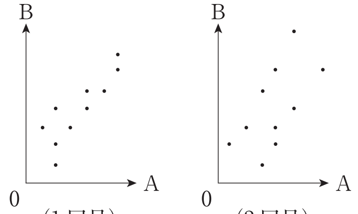
よって，Bの偏差値の合計は，

$$60+56.25=116.25$$

以上のことより，**A**の方が上位の成績といえる．

139

(1)



(1回目)　(2回目)

(2) **1回目**の方が相関が強い．

140

⓪　散布図によると最小値は25円より小さいので，正しくない．

①　散布図によると，秋では，20℃以下ではすべて15円を下回っている．
よって，正しくない．

②　箱ひげ図によると夏の購入額の範囲は20円より大きく，秋の購入額の範囲は20円より小さいので，正しくない．

③　箱ひげ図より，春の購入額の最大値は25円より小さく，秋の購入額の最大値は25円より大きい．
よって，正しくない．

④　箱ひげ図によると，秋の第3四分位数の方が春の第3四分位数より大きいので，正しい．

⑤　箱ひげ図によると，秋の中央値は春の中央値より小さい．
よって，正しくない．

⑥　散布図によると，秋にも最高気温が25℃を上回っている日がある．
よって，正しくない．

⑦　箱ひげ図によると，四分位範囲が最小なのは冬である．
よって，正しくない．

⑧　散布図より，春，夏，秋，冬すべて正しい．よって，正しい．

$\boxed{ア}$は④，$\boxed{イ}$は⑧（順不同）

141

(1) $$\overline{x}=\frac{50+52+46+42+43+35+48+47+50+37}{10}$$

$$=\mathbf{45}\ \textbf{(kg)}$$

$$\overline{y}=\frac{31+33+48+42+51+49+39+45+45+47}{10}$$

$$=\mathbf{43}\ \textbf{(kg)}$$

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}\{5^2+7^2+1^2+(-3)^2+(-2)^2+(-10)^2+3^2+2^2+5^2+(-8)^2\}=\mathbf{29}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{10}\{(-12)^2+(-10)^2+5^2+(-1)^2+8^2+6^2+(-4)^2+2^2+2^2+4^2\}=\mathbf{41}$$

(2) $$s_{xy}=\frac{1}{10}\{5(-12)+7(-10)+1\cdot5+(-3)(-1)+(-2)\cdot8+(-10)\cdot6+3\cdot(-4)+2\cdot2+5\cdot2+(-8)\cdot4\}=\mathbf{-22.8}$$

よって，$r=\dfrac{s_{xy}}{s_xs_y}=\dfrac{-22.8}{\sqrt{29}\sqrt{41}}\fallingdotseq\mathbf{-0.66}$

参考　注にある仮平均の考え（＝137の変量変換）を使うと…

x	50	52	46	42	43	35	48	47	50	37
x'	3	5	-1	-5	-4	-12	1	0	3	-10

（仮平均は47）

$\overline{x'}=-2$ だから，$\overline{x}=47-2=45$ (kg)

142

実験データの表より，13回以上表が出る相対度数は

$$\frac{11+8+2+1}{200}=\frac{22}{200}=0.11>0.1$$

14 回以上表が出る相対度数は

$$\frac{8+2+1}{200}=\frac{11}{200}=0.055<0.1$$

よって，20 人中少なくとも **14 人**がＢの方が使いやすいと回答すると，主張Ｘは正しいといえる．

143

(1)　$12=2^2\times3$，$36=2^2\times3^2$，$60=2^2\times3\times5$

よって，

最大公約数は $2^2\times3=\mathbf{12}$

また，

最小公倍数は $2^2\times3^2\times5=\mathbf{180}$

(2)　最大公約数が 12 だから，

$a=12a'$，$b=12b'$ (a'，b' は互いに素で $a'>b'$ をみたす正の整数)と表せる．

このとき，最小公倍数が 144 だから

$12a'b'=144$

$\therefore\ a'b'=12$

a'，b' は互いに素だから

$(a',\ b')=(12,\ 1)$，$(4,\ 3)$

よって，

$(a,\ b)=(\mathbf{144},\ \mathbf{12})$，$(\mathbf{48},\ \mathbf{36})$

(3)　最大公約数が 4 だから，

$m=4m'$，$n=4n'$ (m'，n' は互いに素で，$m'>n'$ をみたす正の整数) と表せる．

このとき，$mn=16m'n'=160$

$\therefore\ m'n'=10$

$\therefore\ (m',\ n')=(10,\ 1)$，$(5,\ 2)$

よって，

$(m,\ n)=(\mathbf{40},\ \mathbf{4})$，$(\mathbf{20},\ \mathbf{8})$

144

$n^3+3n^2-4n=n(n-1)(n+4)$

$=n(n-1)(n+1+3)$

$=(n-1)n(n+1)+3(n-1)n$

$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数．

$(n-1)n$ は 2 の倍数だから，

n^3+3n^2-4n は 6 の倍数．

145

(1)　$a=2n+i$ ($i=0,\ 1$) とおくと，

$a^2=4n^2+4ni+i^2=4(n^2+ni)+i^2$

$i^2=0,\ 1$ だから，整数 a を 2 乗して 4 でわると，わりきれるか，1 余るかのどちらかである．

(2)　$a^2-4a-2m=0$ より $2m=a(a-4)$

ここで，左辺は偶数だから，a も偶数．

ゆえに，a^2 は 4 でわりきれ，$4a$ も 4 でわりきれる．

よって，$2m=a^2-4a$ も 4 でわりきれる．

ゆえに，m は偶数．

146

$4387\div3103=1\cdots1284$

$3103\div1284=2\cdots535$

$1284\div535=2\ \cdots214$

$535\div214=2\ \cdots107$

$214\div107=2\ \cdots0$

よって，最大公約数は **107**

147

$(x,\ y)=(3,\ 1)$ は①をみたす．

$3x-4y=5$ ……①

$3\cdot3-4\cdot1=5$ ……②

①－②より　$3(x-3)=4(y-1)$

右辺は 4 の倍数だから，$3(x-3)$ も 4 の倍数．

3 と 4 は互いに素なので 4 は $x-3$ の因数．よって，$x-3$ は 4 の倍数．

同様にして，$y-1$ は 3 の倍数．

よって，

$x-3=4n$，$y-1=3n$ (n：整数)

と表せるので

$(x,\ y)=(4n+3,\ 3n+1)$ (n：整数)

これより

$|x-y|=|(4n+3)-(3n+1)|$

$=|n+2|$

なので，$|x-y|$ は，$n=-2$ のとき**最小値 0** をとる．

148

(1) $1201_{(3)}=3^3\times1+3^2\times2+3^1\times0+3^0\times1$
$=27+18+1=\mathbf{46}$

$1.23_{(4)}=4^0\times1+\dfrac{1}{4}\times2+\dfrac{1}{4^2}\times3$

$=\dfrac{16+8+3}{16}=\dfrac{27}{16}=\mathbf{1.6875}$

(2)
```
3) 5 3
3) 1 7 … 2
3)   5 … 2
     1 … 2
```
上のわり算より　$\mathbf{1222_{(3)}}$

```
4) 5 3
4) 1 3 … 1
     3 … 1
```
上のわり算より　$\mathbf{311_{(4)}}$

149

(1)
```
    1 1 1 1 1 (2)
+     1 0 1 1 (2)
---------------
  1 0 1 0 1 0 (2)
```

```
    1 1 1 1 1 (2)
−     1 0 1 1 (2)
---------------
    1 0 1 0 0 (2)
```

(2)
```
        1 1 1 (2)
×       1 1 1 (2)
---------------
        1 1 1 (2)
      1 1 1 (2)
    1 1 1 (2)
---------------
  1 1 0 0 0 1 (2)
```

150

(1) 与式$=4x^2+10x-(y+3)(y-2)$
$=\mathbf{(2x-y+2)(2x+y+3)}$

(2) (1)より，
$4x^2+10x-y^2-y$
$=(4x^2+10x-y^2-y+6)-6$
$=(2x-y+2)(2x+y+3)-6$
したがって，方程式は
$$(2x-y+2)(2x+y+3)=6$$
となる．

$2x-y+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$2x+y+3$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

よって，

$2x-y$	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4
$2x+y$	-4	-5	-6	-9	3	0	-1	-2

このうち，$(x,\ y)$ が整数であるものは，

$\begin{cases}2x-y=-8\\2x+y=-4\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

$\begin{cases}2x-y=-3\\2x+y=-9\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$

$\begin{cases}2x-y=0\\2x+y=0\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

$\begin{cases}2x-y=1\\2x+y=-1\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

よって，
$(x,\ y)=\mathbf{(-3,\ 2),\ (-3,\ -3),}$
$\mathbf{(0,\ 0),\ (0,\ -1)}$

151

$x\leqq y\leqq z$ より $\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ だから

$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

$\therefore\ 1\leqq\dfrac{3}{x}$

よって，$x\leqq3$ より $x=1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき，

方程式は $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これをみたす自然数 $y,\ z$ はない．

$x=2$ のとき，

方程式は $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……①

$\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ だから，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

$\therefore\ y\leqq4$

よって，$2=x\leqq y\leqq4$ より $y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，①は $\dfrac{1}{z}=0$

これをみたす z はない．

$y=3$ のとき，①は $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　∴　$z=6$

$y=4$ のとき，①は $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　∴　$z=4$

$x=3$ のとき，

方程式は $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……②

$\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ だから $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

　∴　$y\leqq 3$

よって，$3=x\leqq y\leqq 3$ より $y=3$

このとき，

②は $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　∴　$z=3$

以上より，

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)}$

152

$x^2-2mx+2m+7=0$ の解を α，β とすると

$x=m\pm\sqrt{m^2-2m-7}$ より

$$\alpha+\beta=2m,\ \alpha\beta=2m+7$$

m を消去すると

$$\alpha\beta=\alpha+\beta+7$$

$$\therefore\ \alpha\beta-\alpha-\beta-7=0$$

$$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)=8$$

α，β が整数で，$\alpha\leqq\beta$ とすると

$$(\alpha-1,\ \beta-1)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (-8,\ -1),\ (-4,\ -2)$$

$$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(2,\ 9),\ (3,\ 5),\ (-7,\ 0),\ (-3,\ -1)$$

このうち m が整数になるものは

$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 5),\ (-3,\ -1)$ のときで，

　$\boldsymbol{m=4,\ -2}$

153

(1)　$n\leqq 2x<n+1$（n：整数）のとき，

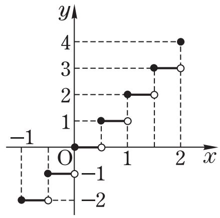
　すなわち，$\dfrac{n}{2}\leqq x<\dfrac{n+1}{2}$　……①

のとき，$y=[2x]=n$　……②

であるから，$-2\leqq 2x\leqq 4$ の n を考えて，①，②に $n=-2,\ -1,\ \cdots,\ 2,\ 3$ を代入して（$x=2$ のときは別に考える）

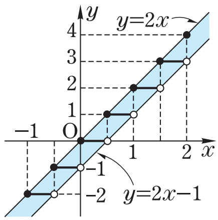
$$y=[2x]=\begin{cases}-2 & \left(-1\leqq x<-\dfrac{1}{2}\right)\\ -1 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x<0\right)\\ 0 & \left(0\leqq x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x<1\right)\\ 2 & \left(1\leqq x<\dfrac{3}{2}\right)\\ 3 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq x<2\right)\\ 4 & (x=2)\end{cases}$$

よって，グラフは次の図のようになる．



(2)　$y=2x+k$ は傾き 2，y 切片 k の直線を表すので，この直線が(1)のグラフと共有点をもつのは，図より

　$\boldsymbol{-1<k\leqq 0}$



154

(1)　$x^2\geqq 0$ だから，左辺$\geqq 18$

　よって，$9[x]\geqq 18$

　　∴　$[x]\geqq 2$

(2)　$n\leqq x<n+1$（n は 2 以上の自然数）のとき

　$[x]=n$ だから，①は $x^2=9n-18$

　ここで，$n^2\leqq x^2<(n+1)^2$ だから

$$n^2 \leqq 9n-18<(n+1)^2$$

$$\therefore \quad \begin{cases} n^2-9n+18 \leqq 0 & \cdots\cdots ② \\ n^2-7n+19>0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②より，$(n-3)(n-6) \leqq 0$ から，

$3 \leqq n \leqq 6$

③は，$n^2-7n+19=\left(n-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$

より，すべての n で成りたつ．

$$\therefore \quad \boldsymbol{x=3\sqrt{n-2} \quad (3 \leqq n \leqq 6)}$$

(3)　(2)より，n に 3，4，5，6 を代入して

$\boldsymbol{x=3,\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{3},\ 6}$