数学Ⅰ・A標準問題精講［改訂増補版］

麻生雅久著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1 (1) $(a-b+c)(a-b-c)$

$=(a-b)^2-c^2$

$=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2-c^2}$

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$

$=\boldsymbol{x^8-y^8}$

(3) $(x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3$
$\quad -(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3$

$=\{(x+y)+2z\}^3-\{(x+y)-2z\}^3$
$\quad -\{2z-(x-y)\}^3-\{2z+(x-y)\}^3$

$=(x+y)^3+6(x+y)^2z+12(x+y)z^2+8z^3$
$\quad -(x+y)^3+6(x+y)^2z-12(x+y)z^2+8z^3$
$\quad -8z^3+12z^2(x-y)-6z(x-y)^2+(x-y)^3$
$\quad -8z^3-12z^2(x-y)-6z(x-y)^2-(x-y)^3$

$=12(x+y)^2z-12z(x-y)^2$

$=\boldsymbol{48xyz}$

2 (1)

$10x^2-xy-2y^2+17x+5y+3$

$=10x^2-(y-17)x-(2y+1)(y-3)$

$=\{5x+(2y+1)\}\{2x-(y-3)\}$

$=\boldsymbol{(5x+2y+1)(2x-y+3)}$

(2) $x^3+2x^2-9x-18$

$=x^2(x+2)-9(x+2)$

$=(x^2-9)(x+2)$

$=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+2)}$

(3) $(x^2+3x+5)(x+1)(x+2)+2$

$=(x^2+3x+5)(x^2+3x+2)+2$

$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12$

$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$

$=4x^4+8x^2y^2+4y^4-25x^2y^2$

$=(2x^2+2y^2)^2-(5xy)^2$

$=(2x^2+5xy+2y^2)(2x^2-5xy+2y^2)$

$=\boldsymbol{(2x+y)(x+2y)(2x-y)(x-2y)}$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4$

$=4x^4-8x^2y^2+4y^4-9x^2y^2$

$=(2x^2-2y^2)^2-(3xy)^2$

$=(2x^2+3xy-2y^2)(2x^2-3xy-2y^2)$

$=(2x-y)(x+2y)(2x+y)(x-2y)$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4$

$=(x^2-4y^2)(4x^2-y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(2x+y)(2x-y)$

3-1

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{2})$
$\quad +(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\boldsymbol{0}$

3-2 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}$

$=\dfrac{24}{-8}$

$=\boldsymbol{-3}$

4-1 $\sqrt{14+\sqrt{96}}=\sqrt{14+2\sqrt{24}}$

$=\sqrt{(\sqrt{12}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{12}+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

よって，

$\sqrt{14+\sqrt{96}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

4-2 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$

$=\sqrt{3}+1$

であるから

$\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)}$

$=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}=\sqrt{12}+1$

$=\boldsymbol{2\sqrt{3}+1}$

4-3 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であるから

$$2<2\sqrt{2}<3$$

よって，$3<6-2\sqrt{2}<4$

したがって，$6-2\sqrt{2}$ をこえない最大の整数は 3 である．

よって，$a=3$，$b=3-2\sqrt{2}$

このとき，

$$\frac{1}{b^3}=\left(\frac{1}{b}\right)^3=\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^3$$

$$=(3+2\sqrt{2})^3$$

よって，

$$b^3+\frac{1}{b^3}$$

$$=(3-2\sqrt{2})^3+(3+2\sqrt{2})^3$$

$$=27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}$$

$$+27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}$$

$$=198$$

したがって，

$$b^3+\frac{1}{b^3}-7a^3=198-7\cdot3^3=\mathbf{9}$$

5 (1) $(\sqrt{2}-1)p+(\sqrt{2}-1)^2q$

$=19-11\sqrt{2}$ より，

$$-p+3q-19+(p-2q+11)\sqrt{2}=0$$

$-p+3q-19$，$p-2q+11$ は有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases}-p+3q-19=0\\ p-2q+11=0\end{cases}$$

よって，$p=\mathbf{5}$，$q=\mathbf{8}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

(2) k^2-l^2，m^2-1 は有理数であるから，(1)より

$$\begin{cases}k^2-l^2=5 & \cdots\cdots①\\ m^2-1=8 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より，　$(k-l)(k+l)=5$

$k-l$ は整数，$k+l$ は自然数であり，$k-l<k+l$ であるから，

$$\begin{cases}k-l=1\\ k+l=5\end{cases}$$

よって，$k=\mathbf{3}$，$l=\mathbf{2}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

②より，$m^2=9$ であり，m は自然数であるから，$m=\mathbf{3}$

6-1 $x+4y=y-3x$ より

$$4x+3y=0$$

よって，$y=-\dfrac{4}{3}x$

したがって，

$$\frac{2x^2-xy-y^2}{2x^2+xy+y^2}$$

$$=\frac{\left(2+\frac{4}{3}-\frac{16}{9}\right)x^2}{\left(2-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\right)x^2}=\mathbf{\frac{7}{11}}$$

6-2 $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+2z}{x}=\dfrac{z-x}{y}=k$

とおくと

$$x+y=kz \qquad\cdots\cdots①$$

$$y+2z=kx \qquad\cdots\cdots②$$

$$z-x=ky \qquad\cdots\cdots③$$

①＋③より

$$y+z=k(y+z)$$

よって，$(y+z)(k-1)=0$

したがって，$y+z=0$ または $k=1$

$y+z=0$ のとき

$z=-y$ であり，①，②に代入して

$$x=-(k+1)y,\quad -y=kx$$

よって，$x=(k+1)kx$

$x\neq0$ より　$(k+1)k=1$

よって，$k^2+k-1=0$

したがって，$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

また，$k=1$ のとき，①，②より

$$x+y=z,\quad y+2z=x$$

これらを満たす 0 でない x，y，z が存在する．(たとえば，$x=3$，$y=-1$，$z=2$)

以上より，$k=\mathbf{1}$，$\mathbf{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

7 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

であり，これに

$$x+y=1,\quad x^2+y^2=2$$

を代入して　$1^2=2+2xy$

よって，$xy=-\dfrac{1}{2}$

したがって，

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=1^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1=\frac{5}{2}$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

また，

$$(x^3+y^3)(x^4+y^4)$$
$$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$$

であるから

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}=x^7+y^7+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot1$$

よって，

$$x^7+y^7=\frac{35}{4}+\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{71}{8}}$$

8-1　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=3^2-4=5$$

よって，

$$x-\frac{1}{x}=\boldsymbol{\pm\sqrt{5}}$$

また，

$$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\pm\sqrt{5}\cdot3\cdot(3^2-2)$$
$$=\boldsymbol{\pm21\sqrt{5}}\ \text{（複号同順）}$$

8-2　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=\boldsymbol{a^2+2}$$

また，

$$x^3-\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=a(a^2+2+1)$$
$$=\boldsymbol{a^3+3a}$$

9-1　$x^2+y^2+z^2$

$$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=4^2-2\cdot5=\boldsymbol{6}$$

また，

$$x^3+y^3+z^3$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=4(6-5)+3=\boldsymbol{7}$$

9-2　$(x+y+z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

であるから

$$xy+yz+zx$$
$$=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$$
$$=\frac{0^2-1}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

また，

$$(xy+yz+zx)^2$$
$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$$

であるから

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$
$$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2xyz\cdot0=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

10　$6x+4<2x+5$　より

$$4x<1$$

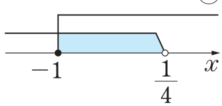
よって，$x<\dfrac{1}{4}$　　……①

$2x+5\leqq3x+6$　より

$$-x\leqq1$$

よって，$x\geqq-1$　　……②

①，②をともに満たす x の値の範囲は，



$$\boldsymbol{-1\leqq x<\frac{1}{4}}$$

11　$|x|+2|x-1|=x+3$　　……①

（i）$x<0$ のとき

$$|x|=-x,\ |x-1|=-x+1$$

であるから①より，

$$-x+2(-x+1)=x+3$$

整理して，$4x=-1$

よって，$x=-\dfrac{1}{4}$

これは $x<0$ を満たす．

(ii) $0\leqq x<1$ のとき

$$|x|=x,\ |x-1|=-x+1$$

であるから①より，

$$x+2(-x+1)=x+3$$

整理して，$2x=-1$

よって，$x=-\dfrac{1}{2}$

これは $0\leqq x<1$ を満たさないので不適．

(iii) $1\leqq x$ のとき

$$|x|=x,\ |x-1|=x-1$$

であるから①より，

$$x+2(x-1)=x+3$$

整理して，$2x=5$

よって，$x=\dfrac{5}{2}$

これは $x\geqq 1$ を満たす．

(i)，(ii)，(iii)より，$x=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}}$

12 $y=x^2+4x+12$ は

$$y=(x+2)^2+8$$

と変形できるので頂点の座標は $(-2,\ 8)$ である．

$y=x^2-2x+4$ は

$$y=(x-1)^2+3$$

と変形できるので頂点の座標は $(1,\ 3)$ である．

したがって，放物線 $y=x^2+4x+12$ は，放物線 $y=x^2-2x+4$ を，

x 軸方向に $\boldsymbol{-3}$，y 軸方向に **5** だけ平行移動したものである．

13-1 $y=x^2+px+q$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通ることから

$$1=1+p+q$$

よって，$p+q=0$ ……①

また，x 軸に接することから

$x^2+px+q=0$ は重解をもち，

$$(D=)\ p^2-4q=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より q を消去して

$$p^2+4p=0$$

$p\neq 0$ であるから $p=-4$

①に代入して

$$(p,\ q)=\boldsymbol{(-4,\ 4)}$$

別解 $y=x^2+px+q$ が x 軸に接することから $y=(x-\alpha)^2$ とおくことができる．

これが点 $(1,\ 1)$ を通るので

$$1=(1-\alpha)^2$$

よって，$1-\alpha=\pm 1$

したがって，$\alpha=0,\ 2$

$\alpha=0$ のとき $y=x^2$

このとき，$p=0$，$q=0$ となり不適．

$\alpha=2$ のとき

$$y=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

よって，$(p,\ q)=(-4,\ 4)$

13-2 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点

$$(-1,\ 0),\ (0,\ -1),\ (2,\ 3)$$

を通ることから

$$a-b+c=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$c=-1 \quad \cdots\cdots②$$
$$4a+2b+c=3 \quad \cdots\cdots③$$

②を①，③に代入して

$$a-b=1,\ 4a+2b=4$$

よって，$a=1$，$b=0$

したがって，求める 2 次関数の式は

$$\boldsymbol{y=x^2-1}$$

14 $f(x)=x^2-mx+m^2-m$

$$=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m^2-m$$

よって，$f(x)$ の最小値 $g(m)$ は

$$g(m)=\frac{3}{4}m^2-m$$
$$=\frac{3}{4}\left(m-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$

したがって，$g(m)$ の最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

15 $f(x)=x^2+ax+a$

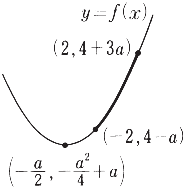
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a$$

(i) $-\dfrac{a}{2}<-2$ つまり $a>4$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において，$x=-2$ のときに最小値をとる．

最小値は

$f(-2)=4-a$



(ii) $-2\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 2$ つまり

$-4\leqq a\leqq 4$ のとき

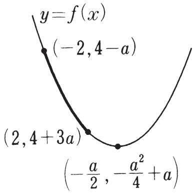
$x=-\dfrac{a}{2}$ において最小値 $-\dfrac{a^2}{4}+a$ をとる．

(iii) $2<-\dfrac{a}{2}$ つまり，$a<-4$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において，$x=2$ のときに最小値をとる．

最小値は，

$f(2)=4+3a$



(i)～(iii)より，$f(x)$ の最小値は

$a<-4$ のとき，$4+3a$

$-4\leqq a\leqq 4$ のとき，$-\dfrac{a^2}{4}+a$

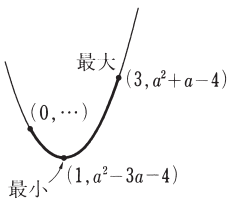
$4<a$ のとき，$4-a$

16 $y=ax^2-2ax+a^2-2a-4$ より

$y=a(x-1)^2+a^2-3a-4$

(i) $a>0$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ において，$x=3$ のときに最大値をとる．



最大値が 8 である条件は

$a^2+a-4=8$

よって，$a^2+a-12=0$

したがって，$(a+4)(a-3)=0$

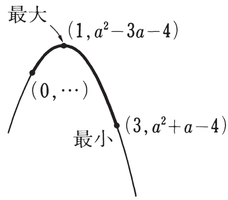
$a>0$ であるから，$a=3$

このとき，$x=1$ において最小となり，最小値は

$a^2-3a-4=-4$

(ii) $a<0$ のとき

$x=1$ のときに最大値をとる．



最大値が 8 である条件は

$a^2-3a-4=8$

よって，$a^2-3a-12=0$

$a<0$ であるから，$a=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$

このとき，$x=3$ において最小となり，最小値は

$$a^2+a-4=(a^2-3a-12)+4a+8$$
$$=4a+8=14-2\sqrt{57}$$

(i)，(ii)より

$a=3$，最小値 -4；

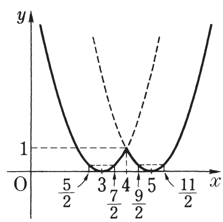
$a=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$，最小値 $14-2\sqrt{57}$

17 (1) $|x-4|=\begin{cases} x-4 & (x\geqq 4) \\ -x+4 & (x<4) \end{cases}$

であるから

$$(|x-4|-1)^2=\begin{cases} (x-5)^2 & (x\geqq 4) \\ (x-3)^2 & (x<4) \end{cases}$$

したがって，$y=(|x-4|-1)^2$ のグラフは，右のようになる．



(2) $t\leqq x\leqq t+1$ において(1)の関数が最大となる x は

$t\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき，$x=t$

$\dfrac{5}{2}<t<3$ のとき，$x=t+1$

$3 \leqq t \leqq 4$ のとき，$x=4$

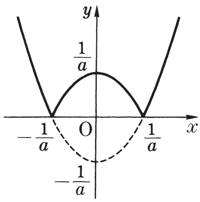
$4 < t \leqq \dfrac{9}{2}$ のとき，$x=t$

$\dfrac{9}{2} < t$ のとき，$x=t+1$

したがって，$t \leqq x \leqq t+1$ における最大値 $f(t)$ は

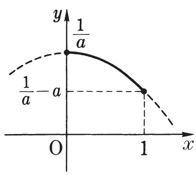
$$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases}(t-3)^2 & \left(t \leqq \dfrac{5}{2}\right)\\ (t-2)^2 & \left(\dfrac{5}{2} < t < 3\right)\\ 1 & (3 \leqq t \leqq 4)\\ (t-5)^2 & \left(4 < t \leqq \dfrac{9}{2}\right)\\ (t-4)^2 & \left(\dfrac{9}{2} < t\right)\end{cases}}$$

18 (1) $f(x)=\left|ax^2-\dfrac{1}{a}\right|$ のグラフは右のようになる．

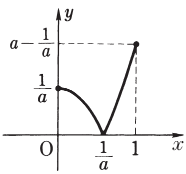


したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフは，下のようになる．

$0<a<1$ のとき



$1 \leqq a$ のとき



(2) (I) $0<a<1$ のときは $x=0$ において最大となる．

よって，$g(a)=f(0)=\dfrac{1}{a}$

(II) $1 \leqq a$ のときについて，

$\dfrac{1}{a}$ と $a-\dfrac{1}{a}$ の大小を比較する．

$$\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}-a=\frac{2-a^2}{a}$$

(i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{2-a^2}{a} \geqq 0$ より，$\dfrac{1}{a} \geqq a-\dfrac{1}{a}$

よって，$g(a)=\dfrac{1}{a}$

(ii) $\sqrt{2} < a$ のとき

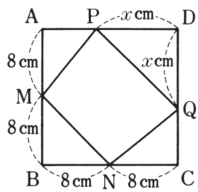
$\dfrac{2-a^2}{a} < 0$ より，$\dfrac{1}{a} < a-\dfrac{1}{a}$

よって，$g(a)=a-\dfrac{1}{a}$

(I)，(II)(i)，(II)(ii)より，

$$\boldsymbol{g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & (0<a \leqq \sqrt{2})\\ a-\dfrac{1}{a} & (\sqrt{2}<a)\end{cases}}$$

19 (1) DP の長さを x cm とすると



$\triangle$APM

$=\dfrac{1}{2}$AP$\cdot$AM

$=\dfrac{1}{2}(16-x)\cdot 8$

$=4(16-x)$

また，

$\triangle$CQN$=\triangle$APM$=4(16-x)$

$\triangle$BNM$=\dfrac{1}{2}$BM$\cdot$BN$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

$\triangle$DPQ$=\dfrac{1}{2}$DP$\cdot$DQ$=\dfrac{1}{2}x^2$

したがって，四角形 PMNQ の面積 S は

$S=$(正方形 ABCD)$-\triangle$APM

$\quad -\triangle$BNM$-\triangle$CQN$-\triangle$DPQ

$=16^2-4(16-x)-32$

$\quad -4(16-x)-\dfrac{x^2}{2}$

$=-\dfrac{x^2}{2}+8x+96$

$=-\dfrac{1}{2}(x-8)^2+128$

よって，$0<x \leqq 16$ において，$x=8$ のときに S は最大となる．

つまり，DP が **8 cm** のとき最大．

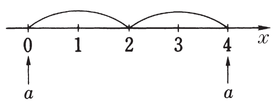
(2) S が最小になるのは，$x=16$ つま

り，DP が 16 cm のときで，最小値は
96 cm² である．

20 $A \neq 0$ のとき，
(i) $0^2-4AB \geqq 0$ つまり
$AB \leqq 0$ ならば，$x=\pm\sqrt{-\dfrac{B}{A}}$
(ii) $AB>0$ ならば，実数解なし．
$A=0$ のとき，
(i) $B=0$ ならば，解はすべての実数．
(ii) $B \neq 0$ ならば，実数解なし．

21 $ax^2-(2a^2+2a)x$
$+a^3+2a^2+a+1=0$ ……①
(i) $a \neq 0$ のとき，①が実数解をもつ条件は，
$$(2a^2+2a)^2-4a(a^3+2a^2+a+1) \geqq 0$$
左辺を整理して，$-4a \geqq 0$
よって，$a \leqq 0$
$a \neq 0$ より，$a<0$
(ii) $a=0$ のとき，①は
$$1=0$$
となり，解をもたない．
よって，$a=0$ は不適．
以上(i)，(ii)より，x の方程式①が実数解をもつ条件は，$\boldsymbol{a<0}$

22 $x^2-(a+2)x+2a<0$ より
$(x-a)(x-2)<0$ ……($*$)



($*$)を満たす x の整数値がただ 1 つ存在するような整数 a の値は **0, 4** である．

23 $x^2+(a-1)x+a-1=0$ ……①
が実数解をもたない条件は，
$$(a-1)^2-4(a-1)<0$$
左辺を整理して，
$$(a-1)(a-5)<0$$
よって，$1<a<5$ ……③
また，$x^2+2(a-1)x-a+7=0$ ……②
が実数解をもたない条件は，
$$\{2(a-1)\}^2-4(-a+7)<0$$
4 で割って，
$$(a-1)^2-(-a+7)<0$$
左辺を整理して，
$$a^2-a-6<0$$
$$(a+2)(a-3)<0$$
よって，$-2<a<3$ ……④
③，④をともに満たす a の値の範囲は，
$$\boldsymbol{1<a<3}$$

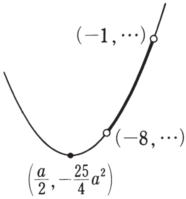
24 $ax^2+(a-1)x+a-1<0$
……($*$)
$a=0$ のとき
($*$)は，　$-x-1<0$
となり，これが成立しない実数 x の値が存在するので不適．
$a \neq 0$ のとき
($*$)がすべての実数 x に対して成立する条件は
$a<0$ ……①
$(D=)$ $(a-1)^2-4a(a-1)<0$ ……②
②より，
$$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$$
よって，$(a-1)(3a+1)>0$
したがって，$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$
これと①より，
$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{3}}$$

25 (1) $x^2+3x-40<0$ より
$(x+8)(x-5)<0$
よって，$-8<x<5$ ……①
$x^2-5x-6>0$ より
$(x-6)(x+1)>0$
よって，$x<-1$，$6<x$ ……②
①，②をともに満たす x の範囲は
$$\boldsymbol{-8<x<-1}$$
(2) $f(x)=x^2-ax-6a^2$
とおくと
$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{25}{4}a^2$$

$-8<x<-1$ のとき

$$f(x)>0$$

が成立する条件は
次のようになる．



(i) $\dfrac{a}{2}<-8$

つまり $a<-16$

のとき

$$f(-8)\geqq 0$$

よって，$64+8a-6a^2\geqq 0$

つまり，$3a^2-4a-32\leqq 0$

左辺を因数分解して

$$(3a+8)(a-4)\leqq 0$$

よって，$-\dfrac{8}{3}\leqq a\leqq 4$

これは $a<-16$ に反する．

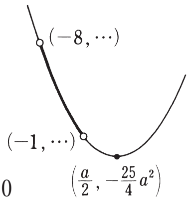
(ii) $-8\leqq\dfrac{a}{2}\leqq -1$ つまり

$-16\leqq a\leqq -2$ のとき

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{25}{4}a^2>0$$

これを満たす a は存在しない．

(iii) $-1<\dfrac{a}{2}$



つまり

$$-2<a$$

のとき

$$f(-1)\geqq 0$$

よって，$1+a-6a^2\geqq 0$

つまり，$6a^2-a-1\leqq 0$

左辺を因数分解して

$$(3a+1)(2a-1)\leqq 0$$

よって，$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

$-2<a$ を考えて，

$$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

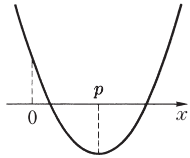
(i)～(iii)より，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}}$

26-1 $f(x)=x^2-2px+2-p$

とおくと

$$f(x)=(x-p)^2-p^2-p+2$$

方程式 $f(x)=0$
の 2 つの解がともに
正となる条件は



(軸) $p>0$

($f(0)=$) $2-p>0$

$\left(\dfrac{D}{4}=\right)$ $p^2-(2-p)\geqq 0$ ⬅重解を 2 つの解と扱う

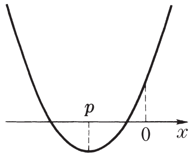
よって，

$p>0$，$p<2$，$(p+2)(p-1)\geqq 0$

これらすべてを満たす p の値の範囲は

$$\boldsymbol{1\leqq p<2}$$

方程式
$f(x)=0$ の 2 つ
の解がともに負
となる条件は



$p<0$,

$2-p>0$,

$p^2-(2-p)\geqq 0$

よって，$p<0$，$p<2$，$(p+2)(p-1)\geqq 0$

これらすべてを満たす p の値の範囲は

$$\boldsymbol{p\leqq -2}$$

方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の符号が
異なる条件は

$$f(0)<0$$

よって， $2-p<0$

したがって，$\boldsymbol{p>2}$

26-2 (1)

$$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$$

とおくと

$$f(x)=(x-a)^2+a^2-5$$

方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい解と
1 より小さい解を 1 つずつもつ条件は

$$f(1)<0$$

よって，$2a^2-2a-4<0$

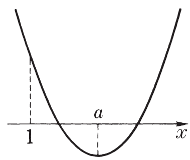
左辺を因数分解して

$$2(a-2)(a+1)<0$$

したがって，

$$\boldsymbol{-1<a<2}$$

(2) 方程式
$f(x)=0$ が 1 よ
り大きい解を 2



つもつ条件は

$$\begin{cases}(f(1)=)\ 2a^2-2a-4>0\\(\text{軸})\ a>1\\\left(\dfrac{D}{4}=\right)\ a^2-(2a^2-5)\geqq 0\end{cases}$$

よって，$\begin{cases}2(a-2)(a+1)>0\\a>1\\a^2\leqq 5\end{cases}$

したがって，

$$\mathbf{2<a\leqq\sqrt{5}}$$

27

$f(x)=2ax^2-2x+4a-1\quad(a>0)$

とおく．

$y=f(x)$ のグラフが，区間

$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 2$ において x 軸と少なくとも

1つの共有点をもつ条件を求めればよい．

(i) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)f(2)\leqq 0$ の場合

$$\left(\frac{38}{9}a-\frac{1}{3}\right)(12a-5)\leqq 0$$

よって，

$$\frac{3}{38}\leqq a\leqq\frac{5}{12}$$

(ii) $\begin{cases}\left(f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\right)\ \dfrac{38}{9}a-\dfrac{1}{3}\geqq 0 & \cdots\cdots①\\(f(2)=)\ 12a-5\geqq 0 & \cdots\cdots②\\\text{軸}：-\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2a}\leqq 2 & \cdots\cdots③\\\text{判別式}：1-2a(4a-1)\geqq 0 & \cdots\cdots④\end{cases}$

の場合

①より，$a\geqq\dfrac{3}{38}$ ……①′

②より，$a\geqq\dfrac{5}{12}$ ……②′

$a>0$ に注意すると③は，$\dfrac{1}{2a}\leqq 2$

よって，$a\geqq\dfrac{1}{4}$ ……③′

④より，　$8a^2-2a-1\leqq 0$

よって，$(4a+1)(2a-1)\leqq 0$

したがって，

$$-\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots④'$$

①′～④′，$a>0$ より，

$$\frac{5}{12}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

(i)，(ii)より，$\mathbf{\dfrac{3}{38}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}}$

参考 軸の位置での場合分けによる解答

$f(x)=2ax^2-2x+4a-1\ (a>0)$

とおく．

2次関数 $y=f(x)$ の対称軸 $\left(x=\dfrac{1}{2a}\right)$

の位置で場合分けする．

(i) $0<\dfrac{1}{2a}\leqq 2$　つまり $\dfrac{1}{4}\leqq a$ のとき

$f\left(\dfrac{1}{2a}\right)\leqq 0$ ……①

かつ

「$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\geqq 0$ または $f(2)\geqq 0$」…②

①より，

$$-\frac{1}{2a}+4a-1\leqq 0$$

両辺に $2a\,(>0)$ をかけて左辺を因数分解して

$$(4a+1)(2a-1)\leqq 0$$

よって，$-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

$a>0$ より，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ ……①′

②より，

$$\frac{38}{9}a-\frac{1}{3}\geqq 0\ \text{または}\ 12a-5\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{3}{38}$ ……②′

①′かつ②′と $\dfrac{1}{4}\leqq a$ より

$$\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

(ii) $\dfrac{1}{2a}>2$　つまり　$0<a<\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{38}{9}a-\dfrac{1}{3}\geqq 0\\f(2)=12a-5\leqq 0\end{cases}$$

より，

$$\frac{3}{38} \leqq a \leqq \frac{5}{12}$$

これと，$0<a<\frac{1}{4}$ より

$$\frac{3}{38} \leqq a < \frac{1}{4}$$

(i)，(ii)より，$\frac{3}{38} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

28-1 $x^2+ax+b=0$ ……①

$x^2+bx+a=0$ ……②

(1) ①，②の共通解を α とおくと，

$\alpha^2+a\alpha+b=0$ ……③

$\alpha^2+b\alpha+a=0$ ……④

③－④ より

$$(a-b)(\alpha-1)=0$$

よって，

$$a=b \text{ または } \alpha=1$$

$a=b$ のとき，①と②が一致し，①と②は 2 つの共通解をもつので条件に反する．

よって，$\boldsymbol{\alpha=1}$

(2) ③に $\alpha=1$ を代入して

$1+a+b=0$ ……⑤

$a=b$ であると，①と②は 2 つの共通解をもつので，a，b が満たすべき条件は，

$$\boldsymbol{1+a+b=0 \text{ かつ } a \neq b}$$

$\left(1+a+b=0 \text{ かつ } a \neq -\frac{1}{2} \text{ でもよい}\right)$

(3) ⑤より，$a=-b-1$

①に代入して，

$$x^2-(b+1)x+b=0$$

左辺を因数分解して，

$$(x-1)(x-b)=0$$

よって，①の $x=1$ 以外の解は

$$x=b$$

である．

同様に，⑤より，$b=-a-1$

②に代入して，

$$x^2-(a+1)x+a=0$$

よって，$(x-1)(x-a)=0$

したがって，②の $x=1$ 以外の解は

$$x=a$$

である．

28-2

$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ は

$x^2+ax+1=0$ ……①

または

$3x^2+ax-3=0$ ……②

と同値である．

$$(\text{②の判別式})=a^2+36>0$$

であるから，②を満たす異なる実数 x は 2 つある．

①を満たす異なる実数 x の個数は，

$(D=)$ $a^2-4>0$ つまり

$a<-2$，$2<a$ のとき 2 個

$(D=)$ $a^2-4=0$ つまり

$a=\pm 2$ のとき 1 個

$(D=)$ $a^2-4<0$ つまり

$-2<a<2$ のとき 0 個

である．

①と②が共通解をもつときについて調べる．

共通解を α とおくと，

$\alpha^2+a\alpha+1=0$ ……③

$3\alpha^2+a\alpha-3=0$ ……④

④－③ より

$$2\alpha^2-4=0$$

よって，$\alpha=\pm\sqrt{2}$

$\alpha=\sqrt{2}$ のとき，③より $a=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\alpha=-\sqrt{2}$ のとき，③より $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

以上より，「①」，「②」，「①かつ②」を満たす異なる実数 x の個数は次のようになる．

a	…	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	…	-2	…	2	…	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	…
①	2	2	2	1	0	1	2	2	2
②	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①かつ②	0	1	0	0	0	0	0	1	0

したがって，「①または②」を満たす異な

る実数 x の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{3}{\sqrt{2}}<a<-2,} \\ \boldsymbol{2<a<\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}<a} \text{ \textbf{のとき 4 個}} \\ \boldsymbol{a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm 2} \text{ \textbf{のとき 3 個}} \\ \boldsymbol{-2<a<2} \text{ \textbf{のとき 2 個}} \end{cases}$$

29 $2x^2+4xy+3y^2$

$+4x+5y-4=0$

を x について整理して，

$$2x^2+4(y+1)x+3y^2+5y-4=0$$

これを満たす実数 x が存在する条件より

$$4(y+1)^2-2(3y^2+5y-4)\geqq 0$$

整理して，

$$y^2+y-6\leqq 0$$

よって，

$$(y+3)(y-2)\leqq 0$$

したがって，

$$\boldsymbol{-3\leqq y\leqq 2}$$

30 $1111_{(2)}=2^3+2^2+2^1+2^0$

$=8+4+2+1$

$=\boldsymbol{15}$

15 を 3 で割ると商は 5 余りは 0

5 を 3 で割ると商は 1 余りは 2

1 を 3 で割ると商は 0 余りは 1

したがって，15 を 3 進法表示すると

120

31 (1) $\frac{14}{3}<x<5$ のとき

$2<\frac{3}{7}x<\frac{15}{7}$ であるから

$$\left[\frac{3}{7}x\right]=2$$

また，$[x]=4$ であるから，

$$\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\left[\frac{3}{7}\cdot 4\right]=\left[\frac{12}{7}\right]=1$$

したがって，

$$\left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\boldsymbol{1}$$

(2) $\left[\frac{1}{2}x\right]=N$ （N は整数）とおくと，

$$\frac{1}{2}x-1<\left[\frac{1}{2}x\right]\leqq\frac{1}{2}x$$

より，$\frac{1}{2}x-1<N\leqq\frac{1}{2}x$

x について解いて，

$$2N\leqq x<2N+2$$

このとき，

$$[x]=2N,\ 2N+1$$

であり，

$$\frac{1}{2}[x]=N,\ N+\frac{1}{2}$$

したがって

$$\left[\frac{1}{2}[x]\right]=N$$

以上より，

$$\left[\frac{1}{2}x\right]-\left[\frac{1}{2}[x]\right]=N-N=0$$

(3) $\left[\frac{1}{n}x\right]=N$ （N は整数）とおくと，

$$\frac{1}{n}x-1<\left[\frac{1}{n}x\right]\leqq\frac{1}{n}x$$

より，$\frac{1}{n}x-1<N\leqq\frac{1}{n}x$

よって，

$$nN\leqq x<nN+n$$

このとき，

$$[x]=nN,\ nN+1,\ nN+2,\ \cdots,\ nN+(n-1)$$

であり，

$$\frac{1}{n}[x]=N,\ N+\frac{1}{n},\ N+\frac{2}{n},\ \cdots,\ N+\frac{n-1}{n}$$

したがって，

$$\left[\frac{1}{n}[x]\right]=N$$

以上より，

$$\left[\frac{1}{n}x\right]-\left[\frac{1}{n}[x]\right]=\boldsymbol{0}$$

32 $P=(m-5)(m^2+m+1)$

であり，m は正の整数であるから，

$m-5 \geqq -4$, $m^2+m+1 \geqq 3$
したがって，P が素数であることから
$m-5=1$
よって，$m=6$
したがって，$P=\mathbf{43}$

33 (1) $a=\left[\dfrac{50}{2}\right]+\left[\dfrac{50}{2^2}\right]+\left[\dfrac{50}{2^3}\right]$
$+\left[\dfrac{50}{2^4}\right]+\left[\dfrac{50}{2^5}\right]+\left[\dfrac{50}{2^6}\right]+\cdots$
$=\left[\dfrac{50}{2}\right]+\left[\dfrac{50}{4}\right]+\left[\dfrac{50}{8}\right]+\left[\dfrac{50}{16}\right]+\left[\dfrac{50}{32}\right]$
$=25+12+6+3+1$
$=\mathbf{47}$

(2) ${}_{100}C_{50}=\dfrac{100!}{50!50!}$
これは整数であることに注意する．
100! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，
$\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{3^2}\right]+\left[\dfrac{100}{3^3}\right]$
$+\left[\dfrac{100}{3^4}\right]+\left[\dfrac{100}{3^5}\right]+\cdots$
$=\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{9}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{81}\right]$
$=33+11+3+1$
$=48$
同様に，50! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，
$\left[\dfrac{50}{3}\right]+\left[\dfrac{50}{3^2}\right]+\left[\dfrac{50}{3^3}\right]+\left[\dfrac{50}{3^4}\right]+\cdots$
$=\left[\dfrac{50}{3}\right]+\left[\dfrac{50}{9}\right]+\left[\dfrac{50}{27}\right]$
$=16+5+1$
$=22$
したがって，${}_{100}C_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の b は，
$b=48-22-22$
$=\mathbf{4}$

34-1 (1) a を 3 で割った余りが 0，1，2 のとき，a^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 0，1，1 となる．

(2) a^2，b^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．
a^2，b^2 を 3 で割った余りがともに 1 のときも，一方が 0，他方が 1 のときも a^2+b^2 は 3 で割り切れない．
したがって，a^2+b^2 が 3 の倍数ならば a^2，b^2 はともに 3 の倍数である．このとき，a，b はともに 3 の倍数である．

(3) a，b ともに 3 の倍数でないならば，(1)より，a^2，b^2 を 3 で割った余りは 1 であり，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である．しかし，これに等しい c^2 を 3 で割った余りが 2 となることはない．
したがって，a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

34-2 連続 3 整数の中に必ず 3 の倍数が含まれるので，当然連続 4 整数の中にも 3 の倍数が含まれる．
また，連続 4 整数の中に必ず 4 の倍数があり，また，それ以外の 3 つの整数の中に 2 の倍数がある．(4 の倍数の 2 つ隣)
したがって，連続 4 整数の積は $3\times4\times2$ つまり 24 の倍数であり，24 で割り切れる．

35 $m+n$ と $m+4n$ の最大公約数が 3 であるから，
$m+n=3a$ ……①
$m+4n=3b$ ……②
(a と b は互いに素な自然数)
と表すことができる．
このとき，$m+n$ と $m+4n$ の最小公倍数は $3ab$ であるから，
$4m+16n=3ab$
両辺に 3 をかけて
$12m+48n=3a\cdot3b$
これに①，②を代入して
$12m+48n=(m+n)(m+4n)$
左辺は，$12(m+4n)$ と変形できるから
$12(m+4n)=(m+n)(m+4n)$

$m+4n \neq 0$ であるから

$m+n=12$

よって，自然数 m，n $(m \geqq n)$ は

$(m,\ n)=(6,\ 6),\ (7,\ 5),\ (8,\ 4),$
$(9,\ 3),\ (10,\ 2),\ (11,\ 1)$

それぞれに対して，$m+4n$ の値は

$m+4n=30,\ 27,\ 24,\ 21,\ 18,\ 15$

となる．このうち，$m+n$ $(=12)$ との最大公約数が 3 であるものは

$m+4n=27,\ 21,\ 15$

であり，このとき

$(m,\ n)=\mathbf{(7,\ 5),\ (9,\ 3),\ (11,\ 1)}$

36 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{120}{360}$，$\dfrac{3}{8}=\dfrac{135}{360}$

であるから，

$$\frac{1}{3}<\frac{m}{360}<\frac{3}{8}$$

を満たす分数 $\dfrac{m}{360}$ (m は整数) は，次の 14 個ある．

$\dfrac{121}{360}$，$\dfrac{122}{360}$，$\dfrac{123}{360}$，$\dfrac{124}{360}$，$\dfrac{125}{360}$，

$\dfrac{126}{360}$，$\dfrac{127}{360}$，$\dfrac{128}{360}$，$\dfrac{129}{360}$，$\dfrac{130}{360}$，

$\dfrac{131}{360}$，$\dfrac{132}{360}$，$\dfrac{133}{360}$，$\dfrac{134}{360}$

このうち，既約分数は

$\dfrac{121}{360}$，$\dfrac{127}{360}$，$\dfrac{131}{360}$，$\dfrac{133}{360}$

の **4 個**ある．

そのうち，最大の m は

$\mathbf{m=133}$

である．

37 $7l=4m+3$ ……①

$l=1$ のとき $m=1$ であるから，

$7\cdot 1=4\cdot 1+3$ ……①′

①−①′ より

$7(l-1)=4(m-1)$ ……①″

右辺は 4 の倍数であり，7 と 4 は互いに素であるから，

$l-1=4k$ （k は整数）

と表すことができ，このとき，①″より

$m-1=7k$

よって

$l=4k+1$，$m=7k+1$

これらを②に代入して

$(4k+1)(7k+1)$
$=139-28n^2+(4k+1)+(7k+1)$

整理して

$28(k^2+n^2)=140$

よって，$k^2+n^2=5$

これを満たす整数 k，n の組 $(k,\ n)$ は

$(k,\ n)=(-2,\ -1),\ (-2,\ 1),$
$(-1,\ -2),\ (-1,\ 2),$
$(1,\ -2),\ (1,\ 2),$
$(2,\ -1),\ (2,\ 1)$

の 8 通りある．

したがって，①，②を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は全部で **8 通り**ある．

38 $xy+3x+2y=12$ より

$(x+2)(y+3)=18$

$x+2$，$y+3$ は整数であるから

$x+2$	-18	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9	18
$y+3$	-1	-2	-3	-6	-9	-18	18	9	6	3	2	1

したがって，

x	-20	-11	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4	7	16
y	-4	-5	-6	-9	-12	-21	15	6	3	0	-1	-2

よって，

$x+y$ **の最小値は** $\mathbf{-24}$

xy **の最大値は 80**

39 (1) $1 \leqq c \leqq b \leqq a$ より

$$1 \geqq \frac{1}{c} \geqq \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{a}>0$$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{3}{c}$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ ……(＊) より

$$\frac{1}{3}\leqq\frac{3}{c}$$

よって，$c\leqq 9$

$c=9$ のとき $a=b=9$ とすれば (＊) が成り立つ.

また，$\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$，(＊) より

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{3}$$

よって，$c>3$

$c=4$ のとき，$a=b=24$ とすれば (＊) が成り立つ.

したがって，c の**最大値は 9**，**最小値は 4** である.

(2) $c=6$ のとき (＊) より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$$

よって，$6b+6a=ab$

したがって，$(a-6)(b-6)=36$

$a-6$，$b-6$ は整数であり

$a\geqq b\geqq 6$ より，$a-6\geqq b-6\geqq 0$

したがって，

$a-6$	36	18	12	9	6
$b-6$	1	2	3	4	6

よって，

$(a,\ b)=$**(42, 7), (24, 8), (18, 9), (15, 10), (12, 12)**

40

(1) $x^2+2px+3p^2-8=0$ ……①

x，p は実数であるから

$$p^2-(3p^2-8)\geqq 0$$

よって，$p^2\leqq 4$

したがって，

$$\boldsymbol{-2\leqq p\leqq 2}$$

(2) p が整数のとき，(1)より，

$p=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

・$p=-2$ のとき

①は，$x^2-4x+4=0$

これは，整数解 $x=2$ (重解) をもつ.

・$p=-1$ のとき

①は，$x^2-2x-5=0$

これは整数解をもたない.

・$p=0$ のとき

①は，$x^2-8=0$

これは整数解をもたない.

・$p=1$ のとき

①は，$x^2+2x-5=0$

これは整数解をもたない.

・$p=2$ のとき

①は，$x^2+4x+4=0$

これは，整数解 $x=-2$ (重解) をもつ.

以上より，①を満たす整数 x，p の組 $(x,\ p)$ は，

$$(x,\ p)=(2,\ -2),\ (-2,\ 2)$$

の **2 通り**ある.

41

(1)

$n^2+mn-2m^2-7n-2m+25=0$

n について整理して

$n^2+(m-7)n-2m^2-2m+25=0$

よって

$$n=\frac{1}{2}\{-(m-7)\pm\sqrt{(m-7)^2-4(-2m^2-2m+25)}\}$$

したがって

$$\boldsymbol{n=\frac{7-m\pm\sqrt{9m^2-6m-51}}{2}}$$

(2) m，n は自然数であるから

$\sqrt{9m^2-6m-51}=N$

(Nは 0 以上の整数)

と表せることが必要である.

このとき

$9m^2-6m-51=N^2$

よって

$(3m-1)^2-52=N^2$

変形して

$(3m-1)^2-N^2=52$

左辺を因数分解して

$$(3m-1+N)(3m-1-N)=52$$

$3m-1+N$，$3m-1-N$ はともに整数であり，

$$3m-1+N \geqq 3m-1-N$$

である．

また，m は自然数，N は 0 以上の整数であるから，

$$3m-1+N \geqq 2$$

である．

よって，$3m-1+N$，$3m-1-N$ は次の 3 通り．

$3m-1+N$	52	26	13
$3m-1-N$	1	2	4

(i) $\begin{cases} 3m-1+N=52 \\ 3m-1-N=1 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて

$$2N=51$$

これは N が整数であることに反する．

(ii) $\begin{cases} 3m-1+N=26 \\ 3m-1-N=2 \end{cases}$ のとき

これら 2 式より，

$$m=5,\ N=12$$

(iii) $\begin{cases} 3m-1+N=13 \\ 3m-1-N=4 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて

$$2N=9$$

これは N が整数であることに反する．

以上より，$m=\mathbf{5}$

このとき(1)より，$n=7$，-5

n は自然数であるから，$n=\mathbf{7}$

42 $x^2-kx+4k=0$

の 2 つの解を α，β $(\alpha \geqq \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=k & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=4k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より k を消去して

$$\alpha\beta=4(\alpha+\beta)$$

変形して

$$(\alpha-4)(\beta-4)=16$$

$\alpha-4$，$\beta-4$ はともに整数であり，

$$\alpha-4 \geqq \beta-4$$

であるから

$\alpha-4$	16	8	4	-1	-2	-4
$\beta-4$	1	2	4	-16	-8	-4

よって，α，β は

α	20	12	8	3	2	0
β	5	6	8	-12	-4	0

$$k=\alpha+\beta \quad \cdots\cdots①$$

であるから

$$k=25,\ 18,\ 16,\ -9,\ -2,\ 0$$

したがって，k の最小値 m は

$$m=-9$$

よって，$|m|=\mathbf{9}$

43 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$
$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

44 (1)

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

に $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を代入して

$$\frac{1}{4}=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって，$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2)

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}\ (>0)$$

45 $\cos 75^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)$
$=\sin 15^\circ$

したがって

$$\cos^2 15^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 75^\circ$$
$$=\cos^2 15^\circ+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sin^2 15^\circ$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

46 $P=2\cos^2\theta+\sin\theta$

$$=2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta$$
$$=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから

$$0\leqq\sin\theta\leqq1$$

したがって，P は

$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{8}}$

$\sin\theta=1$ のとき，**最小値 1**

をとる．

47 余弦定理より，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

この式の右辺に，$a^2=b^2+c^2+bc$ を代入して

$$\cos A=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

よって，$A=\mathbf{120^\circ}$

48 正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

（Rは三角形 ABC の外接円の半径）

であるから

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$$

より

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

よって，$a^2=b^2+c^2$

したがって，

$$A=\mathbf{90^\circ}$$

49 (1) $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$$=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

よって，

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$
$$=1-\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{63}{8^2}$$

$\sin A>0$ であるから，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

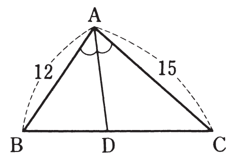
(2) $\triangle ABC=\dfrac{r}{2}(AB+BC+AC)$

であるから

$$\frac{r}{2}(4+6+5)=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

よって，$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

50 $\angle BAD=\angle DAC$ であるから



$BD:DC$
$=AB:AC$
$=12:15$
$=4:5$

したがって，

$$BD=\frac{4}{9}BC=8$$

また，余弦定理より

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$
$$=\frac{12^2+18^2-15^2}{2\cdot12\cdot18}=\frac{9}{16}$$

さらに，三角形 ABD に余弦定理を用いて

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$$
$$=12^2+8^2-2\cdot12\cdot8\cdot\frac{9}{16}$$
$$=100$$

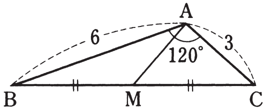
よって，$AD=\mathbf{10}$

51 余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\cos 120^\circ$$
$$=63$$

よって，

$\mathrm{BC}=3\sqrt{7}$



また，

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{6^2+63-3^2}{2\cdot 6\cdot 3\sqrt{7}}$$
$$=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

ここで，三角形 ABM に余弦定理を用いて

$$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos B$$
$$=6^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot 6\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}}$$
$$=\frac{27}{4}$$

よって，$\mathbf{AM}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解　上のように，$\mathrm{BC}=3\sqrt{7}$ を求めたあと

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

(中線定理) より

$$6^2+3^2=2\left\{\mathrm{AM}^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2\right\}$$

よって，$\mathrm{AM}^2=\dfrac{27}{4}$

したがって，$\mathrm{AM}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

52 (1)　$b\sin^2 A+a\cos^2 B=a$

より，　$b\sin^2 A=a(1-\cos^2 B)$

よって，$b\sin^2 A=a\sin^2 B$

正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

(R は外接円の半径)

であるから

$$b\left(\frac{a}{2R}\right)^2=a\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

分母を払って，$a^2b=ab^2$

よって，$a=b$

したがって，**BC＝CA の二等辺三角形**である．

(2)　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

を $a\cos A=b\cos B$ に代入して

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $2abc$ をかけて

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

整理して，

$$a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$$

よって，$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$

左辺を因数分解して

$$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$$

よって，$a^2=b^2$，$c^2=a^2+b^2$

したがって，

BC＝CA の二等辺三角形 または，$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形である．

53 (1)　$\sqrt{x^2-2x}$ の辺が他の 2 辺より長さが短くないことより，

$0<4-x\leqq\sqrt{x^2-2x}$　……①

$(0<)\ 2\leqq\sqrt{x^2-2x}$　……②

①より

$x<4$ かつ $(4-x)^2\leqq x^2-2x$

よって

$x<4$ かつ $6x\geqq 16$

したがって

$\dfrac{8}{3}\leqq x<4$　……①′

②より，$x^2-2x\geqq 4$

よって

$x\leqq 1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5}\leqq x$　……②′

(最大辺の長さ)<(他の 2 辺の長さの和) より，

$$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2$$

よって，$\sqrt{x^2-2x}<6-x$　……③

①′より $6-x>0$ であるから，③の両辺を 2 乗して

$x^2-2x<(6-x)^2$

よって，$x<\dfrac{18}{5}$ ……③′

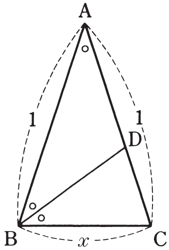
①′，②′，③′より

$$\mathbf{1+\sqrt{5} \leqq x<\frac{18}{5}}$$

(2) 最小の辺は，$4-x$，2 のどちらかであるが，(1)の範囲より，最小の辺は $4-x$ である．この対角が θ であるから，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2+2^2-(4-x)^2}{2\cdot\sqrt{x^2-2x}\cdot 2}$$
$$=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

54 $\angle$B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とすると



$\angle$ABD$=\angle$DBC

$=\dfrac{1}{2}\angle$ABC

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}$

$=36^\circ=\angle$A

よって，$\triangle$ABC$\backsim\triangle$BDC

$\left(\begin{array}{l}\angle\text{CAB}=\angle\text{CBD},\\ \angle\text{ACB}=\angle\text{BCD}\ \text{より，}\end{array}\right)$

したがって，AB : BD$=$AC : BC

BC$=x$ とおくと，

1 : BD$=1 : x$

よって，　BD$=x$

また，AB : BD$=$BC : DC

よって，　$1 : x=x$: DC

したがって，　DC$=x^2$

さらに $\angle$DAB$=\angle$DBA より

AD$=$BD　$(=x)$

したがって，AD$+$DC$=$AC より

$x+x^2=1$

$x^2+x-1=0$

よって，$x=\mathbf{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$　(>0)

$$\cos A=\frac{\text{AB}^2+\text{AC}^2-\text{BC}^2}{2\text{AB}\cdot\text{AC}}$$
$$=\frac{1+1-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{1}{2}(2-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\ \ (x^2=1-x\ \text{より})$$
$$=\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

55 (1) (ア) 三角形 ABC に余弦定理を用いて

$$\boldsymbol{x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

(イ) 三角形 DAC に余弦定理を用いて

$x^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle$CDA

$\angle$CDA$=180^\circ-\theta$ であるから

$\cos\angle$CDA$=\cos(180^\circ-\theta)$

$=-\cos\theta$

よって，

$$\boldsymbol{x^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta}$$

(2) ((1)の(ア))$\times cd+$((1)の(イ))$\times ab$ より

$(cd+ab)x^2$

$=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

右辺$=(a^2cd+abc^2)+(b^2cd+abd^2)$

$=ac(ad+bc)+bd(bc+ad)$

$=(ad+bc)(ac+bd)$

よって，

$(ab+cd)x^2=(ad+bc)(ac+bd)$……①

上と同じようにして，BD$=y$ とおくと

$(ad+bc)y^2=(ab+cd)(ac+bd)$……②

①×② より

$x^2y^2=(ac+bd)^2$

よって，$xy=ac+bd$

つまり，AC$\cdot$BD$=ac+bd$

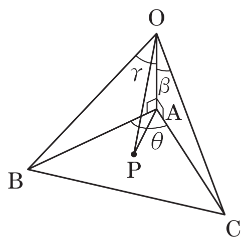
56 (1)

$\text{OB}=\dfrac{\text{OA}}{\cos\gamma}$

$=\sqrt{3}$，

$\text{OC}=\dfrac{\text{OA}}{\cos\beta}$

$=\sqrt{3}$



三角形 OBC に余弦定理を用いて,

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC\cos\alpha$$
$$= 3 + 3 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}$$
$$= \frac{9}{2}$$

よって, $BC = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

(2) $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{2}$,
$AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{2}$

三角形 ABC に余弦定理を用いて,

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC}$$
$$= \frac{2 + 2 - \frac{9}{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{8}}$$

(3) 三角形 ABC の外接円の半径 R は,

$$R = \frac{BC}{2\sin\theta}$$
$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

したがって

$$OP = \sqrt{OA^2 + R^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{8}{7}}$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{\frac{15}{7}}}$$

57 3 の倍数となるのは各数字の和が 3 の倍数のときであるから, 0, 1, 2, 3 から和が 3 の倍数になる異なる 3 つの数字を選ぶと

(0, 1, 2), (1, 2, 3)

0, 1, 2 を並べて 3 桁の整数をつくると 102, 120, 201, 210
の 4 通りできる.

1, 2, 3 を並べて 3 桁の整数をつくると 123, 132, 213, 231, 312, 321
の 6 通りできる.

したがって, 全部で

$4 + 6 = \mathbf{10}$ (**通り**)

できる.

58 大のさいころの目が 1, 3, 5 のとき, 小のさいころの目は 4.

大のさいころの目が 2 または 6 のとき, 小のさいころの目は, 2, 4, 6 のいずれか.

大のさいころの目が 4 のとき, 小のさいころの目は 1 〜 6 のいずれでもよい.

したがって,

$3\times1 + 2\times3 + 1\times6 = \mathbf{15}$ (**通り**)

59 n 人のひとりひとりについて, A, B のいずれに配分するかは 2 通りあるので

$\boldsymbol{2^n}$ (通り) ……(ア)

このうち, A, B どちらか一方に n 人すべてを配分する方法は

2 (通り) ……(イ)

したがって, A, B のどちらにも少なくとも 1 人の学生を配分する方法は

$\boldsymbol{2^n - 2}$ (通り) ……(ウ)

60 $400 = 2^4\times5^2$

であるから 400 の正の約数の個数は

$(4+1)\cdot(2+1) = \mathbf{15}$ (個)

61 (1) 5 桁目が 1 である整数

1□□□□

は　$9\cdot8\cdot7\cdot6 = 3024$

通りあるので, 5 桁目が 1, 2, 3, 4 のいずれかである整数は

$3024\times4 = \mathbf{12096}$ (**通り**)

ある.

(2) 50□□□, 51□□□, 52□□□, 53□□□, 54□□□

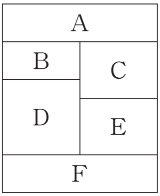
という整数は, 全部で

$5\times8\cdot7\cdot6 = 1680$ (個)

ある.

560□□，561□□，562□□，
563□□，564□□
という整数は，全部で
$5\times7\cdot6=210$（個）ある．
5670□，5671□，5672□，
5673□，5674□，
という整数は，全部で
$5\times6=30$（個）ある．
5678□
という整数で，56789 以下のものは
56780，56781，56782，
56783，56784，56789
の 6 個ある．
5 桁目が 4 以下である整数は(1)より 12096 個あるので，56789 以下の整数は，全部で
$12096+1680+210+30+6$
$=\mathbf{14022}$ **(個)**
ある．

62 (1) 図のように各区画をA～Fとする．3 色で塗り分けるとき



A と D，B と E，
C と F
は同じ色を塗ることになる．
赤，青，黄の 3 色で塗り分けるとき
A と D を何色にするかが 3 通り，
B と E を何色にするかは，残った 2 色のいずれにするかで 2 通り，
C と F は残った色を塗る
ことになる．
したがって，塗り分け方は
$3\times2\times1=\mathbf{6}$ **(通り)**
ある．
(2) A に何色を塗るかは 4 通りあり，B に何色を塗るかは A 以外の 3 通り，C に何色を塗るかは A，B 以外の 2 通りある．
D に何色を塗るかは，B，C 以外の 2 通りある．E に何色を塗るかは，C，D 以外の 2 通りある．
F に何色を塗るかは，D，E 以外の 2 通りある．
したがって，4 色（使わない色があってもよい）で塗り分ける方法は
$4\times3\times2\times2\times2\times2=192$（通り）
ある．
このうち，3 色しか使っていない塗り分け方は除く．3 色の選び方が 4 通りあり，それぞれについて(1)より 6 通りの塗り分け方があるから，3 色で塗り分ける方法は
$4\times6=24$（通り）
ある．
したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は
$192-24=\mathbf{168}$ **(通り)**
ある．
別解　4 色で塗り分けるとき，
A と D，B と E は同色を使う．
A と D，B と F は同色を使う．
A と D，C と F は同色を使う．
A と E，B と F は同色を使う．
A と E，C と F は同色を使う．
A と F，B と E は同色を使う．
B と E，C と F は同色を使う．
場合があり，それぞれについて 4! 通りの塗り分け方がある．
したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は
$4!\times7=168$（通り）
ある．

63 (1) 奇数は全部で 7 個あるから
${}_7C_3=\mathbf{35}$ **(組)**
(2) 3 の倍数は全部で 4 個，3 の倍数でないものは 10 個ある．
全体から 3 個を取る方法から，3 の倍数以外から 3 個を取る方法をひいて
${}_{14}C_3-{}_{10}C_3=364-120$
$=\mathbf{244}$ **(組)**

64 1以上1000以下の整数のうち，2の倍数は**500**個ある．

また，3の倍数は**333**個，6の倍数は，**166**個ある．

2の倍数のうち，3の倍数とならないものは，2の倍数の個数から6の倍数の個数をひいた

$$500-166=\mathbf{334}\ (個)$$

ある．

65 (1) 両端の1の間に

0と書いたカード2枚，

2と書いたカード3枚

を並べる方法は

$$\frac{5!}{2!3!}=\mathbf{10}\ (\textbf{通り})$$

ある．

(2) これら7枚のカードを並べる方法は $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$ (通り)

ある．

このうち，左端が0と書いたカードであるものは

$$\frac{6!}{1!2!3!}=60\ (通り)$$

ある．

よって，7桁の整数は全部で

$$210-60=\mathbf{150}\ (\textbf{通り})$$

できる．

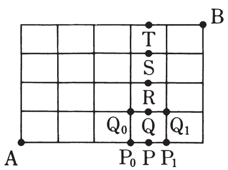
66 (1)

AからBまでの最短経路は

$$\frac{9!}{5!4!}$$

$=\mathbf{126}$ (**通り**)

ある．



(2) $A\to P_0\to P_1\to B$ について

$$1\times1\times\frac{5!}{1!4!}=\mathbf{5}\ (\textbf{通り})$$

(3) $A\to Q_0\to Q_1\to B$ について

$$\frac{4!}{3!1!}\times1\times\frac{4!}{1!3!}=\mathbf{16}\ (\textbf{通り})$$

(4) (1)のうち，図のR，S，Tのいずれかを通る最短経路の数を求めればよい．

これは，(1)の場合の数から(2)と(3)の場合の数をひけば求まるので

$$126-5-16=\mathbf{105}\ (\textbf{通り})$$

67-1 大人3人，子供6人の計9人をAに4人，Bに3人，Cに2人を割り当てる方法は

$$\begin{aligned}{}_9C_4\times{}_5C_3&=126\times10\\&=\mathbf{1260}\ (通り)\end{aligned}$$

また，大人3人をA，B，Cに割り当てる方法は，3!通りあり，子供6人をA，B，Cに2人ずつ割り当てる方法は，${}_6C_2\cdot{}_4C_2$ 通りある．

よって，

$$3!\times{}_6C_2\cdot{}_4C_2=6\times15\cdot6=\mathbf{540}\ (通り)$$

67-2 人も車も区別しないで，10人が2台のバスに分乗する方法は，

(1人，9人)，(2人，8人)，
(3人，7人)，(4人，6人)，
(5人，5人)

の**5**通りある．

人は区別しないが車は区別して，10人が2台のバスに分乗する方法は，

(1人，9人)，(2人，8人)，
(3人，7人)，(4人，6人)，
(5人，5人)，(6人，4人)，
(7人，3人)，(8人，2人)，
(9人，1人)

の**9**通りある．

人も車も区別する場合について，

バスをA，Bとして区別して考える．

Aに乗るのは1人，2人，3人，…，9人の場合があり，それぞれだれが乗るかが

${}_{10}C_1$ 通り，${}_{10}C_2$ 通り，${}_{10}C_3$ 通り，…，${}_{10}C_9$ 通り

ある．

したがって，人も車も区別する場合，10人が2台のバスに分乗する方法は，

$${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$$
$$=10+45+120+210+252+210+120+45+10$$
$$=\mathbf{1022}\text{（通り）}$$

別解　人も車も区別する場合，それぞれの乗客はＡかＢのバスに乗るので，10人がＡかＢのバスに乗る方法は，2^{10} 通りある．

そのうち，10人全員がＡに乗る場合と，10人全員がＢに乗る場合は題意に適さないので，求める方法は

$$2^{10}-2=1022\text{（通り）}$$

68　12人を4人ずつ3組に分ける方法は $\dfrac{{}_{12}C_4\cdot{}_8C_4}{3!}=\mathbf{5775}$（通り）

また，特定の3人Ａ，Ｂ，Ｃが互いに異なる組に入るように4人ずつ3組に分ける方法は，残りの9人について，

Ａの属するグループに入れる3人の決め方が ${}_9C_3$ 通り，

Ｂの属するグループに入れる3人の決め方が ${}_6C_3$ 通り

あるので

$${}_9C_3\times{}_6C_3=\mathbf{1680}\text{（通り）}$$

69　12個の頂点から3頂点を選ぶ選び方を考えて

$${}_{12}C_3=\mathbf{220}\text{（個）}$$

このうち，外接円の直径の両端ともう1つの頂点を選ぶときに直角三角形ができる．

直径の両端の選び方が6通りあり，それぞれに対してもう1つの頂点の選び方が10通りあるから，直角三角形は

$$6\times10=\mathbf{60}\text{（個）}$$

である．また，正三角形は**4**個ある．

70　(1)　1辺の長さが1，2，…，8の正方形がそれぞれ

$$8^2,\ 7^2,\ \cdots,\ 2^2,\ 1^2$$

個あるから

$$8^2+7^2+\cdots+2^2+1^2$$
$$=64+49+36+25+16+9+4+1$$
$$=\mathbf{204}\text{（個）}$$

(2)　縦横それぞれ9本の平行線から2本ずつ選べば長方形が1つ決まるので

$${}_9C_2\times{}_9C_2=\mathbf{1296}\text{（個）}$$

ある．

71　女子2人が両端にくる場合：

左端の女子の決め方が4通り，

右端の女子の決め方が3通り

ある．残りの2人の女子と3人の男子の並べ方が5!通りあるので

$$4\times3\times5!=\mathbf{1440}\text{（通り）}$$

女子4人が隣り合う場合：

4人の女子を1人と考えて，3人の男子と並べる方法は4!通りある．そして4人の女子の並べ方は4!通りあるので

$$4!\times4!=\mathbf{576}\text{（通り）}$$

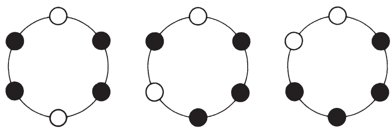
72-1　$(6-1)!=5!$

$$=\mathbf{120}\text{（通り）}$$

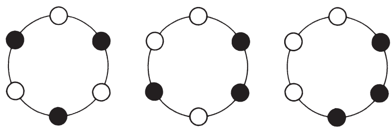
72-2　黒6個のもの　……1種類

黒5個，白1個のもの　……1種類

黒4個，白2個のもの　……3種類



黒3個，白3個のもの　……3種類



黒2個，白4個のもの　……3種類

（黒4個，白2個のものと同様）

黒1個，白5個のもの　……1種類

白6個のもの　……1種類

したがって，

$$1+1+3+3+3+1+1=\mathbf{13}\text{（種類）}$$

73 (1) 全部で

$$9\cdot 8=\mathbf{72}\ (\textbf{個})$$

ある．

これら 72 個の一の位の数字は 1 ～ 9 のいずれも同じ回数 (8 回) ずつ現れるから，この 72 個の一の位の和は

$$8(1+2+3+\cdots+8+9)=360$$

十の位についても同様だから，72 個の整数の総和は

$$360\times 10+360=\mathbf{3960}$$

(2) 全部で

$$9\cdot 8\cdot 7=\mathbf{504}\ (\textbf{個})$$

できる．

これら 504 個の一の位の数字は 1 ～ 9 のいずれも 56 回ずつ現れるから，これら 504 個の一の位の和は

$$56(1+2+3+\cdots+8+9)=2520$$

十の位，百の位についても同様だから，504 個の整数の総和は

$$2520\times 100+2520\times 10+2520$$
$$=\mathbf{279720}$$

74 (1) 3 種類のものから重複を許して 10 個選ぶ方法であり

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=\mathbf{66}\ (\textbf{通り})$$

(2) 球と立方体を 1 個ずつ入れ，残りの 8 個を 3 種類のものから重複を許して選べばよいので

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8=\mathbf{45}\ (\textbf{通り})$$

75 2 つのさいころの目の出方は全部で，$6\times 6=36$ (通り) ある．

このうち，目の和が 3 の倍数になるのは

(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4),
(3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5),
(5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)

の 12 通りあるので，求める確率は

$$\frac{12}{36}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

76-1 (1) 10 枚の札を円形に並べる方法は

$$(10-1)!=9!\ (\text{通り})$$

ある．

このうち，時計回りに見て，1, 2 の順で札が並ぶものは，これら 2 枚を 1 枚の札と考えて，全部で 9 枚の札を並べる方法の

$$(9-1)!=8!\ (\text{通り})$$

ある．

したがって，求める確率は

$$\frac{8!}{9!}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

(2) 0, 1 の札，2, 3 の札をそれぞれ 1 枚の札と考えて並べる方法は

$$(8-1)!=7!\ (\text{通り})$$

ある．

したがって，求める確率は

$$\frac{7!}{9!}=\mathbf{\frac{1}{72}}$$

76-2 a, b の組 (a, b) は全部で $50\cdot 49$ 通りある．

1 から 50 までの整数を 7 で割った余りで分類すると

7 で割った余りが 1 のものは 8 個，
7 で割った余りが 0, 2, 3, 4, 5, 6 のものはそれぞれ 7 個ずつ

ある．

$ab(a+b)$ が 7 で割り切れないのは，a, b, $a+b$ がいずれも 7 で割り切れないときである．

このような a, b の組を数える．

a を 7 で割った余りが 1 のとき，
a は 8 通りあり，
b は，残り 49 個の整数のうち，7 で割った余りが 0, 6 でない 35 通りあるので

$$8\cdot 35=280\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 2 のとき，
a は 7 通りあり，
b は，7 で割った余りが 0, 5 でない 35 通りあるので

$$7\cdot 35=245\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 3，4，5 のときも，それぞれ

$$7\cdot 35=245\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 6 のとき，
a は 7 通りあり，
b は，7 で割った余りが 0，1 でない 34 通りあるので

$$7\cdot 34=238\ (\text{通り})$$

したがって，$ab(a+b)$ が 7 で割り切れない確率は

$$\frac{280+4\times 245+238}{50\cdot 49}=\boldsymbol{\frac{107}{175}}$$

77 (1)　3 つのさいころの目の出方は全部で 6^3 通りある．

3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の組は

$(4,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 3)$

の 2 組ある．

$(4,\ 4,\ 4)$ となる目の出方は 1 通り，
$(4,\ 4,\ 3)$ となる目の出方は 3 通り

あるから，3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の出方は

$$1+3=4\ (\text{通り})$$

ある．

3 つの目の数がどれも 4 以下であるような目の出方は

$$4^3=64\ (\text{通り})$$

あるので，3 つの目の数がどれも 4 以下であり，しかもこれらの積が 40 以下であるような目の出方は

$$64-4=60\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，求める確率は

$$\frac{60}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$$

(2)　3 つの目の数のうち，少なくとも 1 つが 5 以上で，これらの積が 40 以下となる組は

$(6,\ 6,\ 1)$，$(6,\ 5,\ 1)$，$(6,\ 4,\ 1)$
$(6,\ 3,\ 2)$，$(6,\ 3,\ 1)$，$(6,\ 2,\ 2)$
$(6,\ 2,\ 1)$，$(6,\ 1,\ 1)$，$(5,\ 5,\ 1)$
$(5,\ 4,\ 2)$，$(5,\ 4,\ 1)$，$(5,\ 3,\ 2)$
$(5,\ 3,\ 1)$，$(5,\ 2,\ 2)$，$(5,\ 2,\ 1)$
$(5,\ 1,\ 1)$

の 16 組ある．

～～の 6 組について，それぞれ目の出方は 3 通り，

＿＿の 10 組について，それぞれ目の出方は 6 通りあるから，少なくとも 1 つ 5 以上の目が出て，3 つの目の数の積が 40 以下となる目の出方は

$$3\times 6+6\times 10=78\ (\text{通り})$$

ある．

3 つの目の数すべてが 4 以下で，これらの積が 40 以下となる目の出方は(1)より 60 通りあるので，積が 40 以下となる目の出方は

$$78+60=138\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，求める確率は

$$\frac{138}{6^3}=\boldsymbol{\frac{23}{36}}$$

78　3 人の生まれた日の曜日は

$$7\cdot 7\cdot 7\ (\text{通り})$$

ある．

このうち，3 人の生まれた日の曜日がすべて異なるものは

$$7\cdot 6\cdot 5\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，少なくとも 2 人が同じ曜日生まれである確率は

$$1-\frac{7\cdot 6\cdot 5}{7\cdot 7\cdot 7}=\boldsymbol{\frac{19}{49}}$$

79 (1)　すべて奇数の目である確率から，3 か 5 の目以外は出ていない確率をひいて

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n=\boldsymbol{\frac{3^n-2^n}{6^n}}$$

(2)　1 の目が出ていない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

であるから，事象Bの起こる確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$P(A\cup B)$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\left(\frac{3}{6}\right)^n+1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{3^n-2^n}{6^n}$$

$$=\boldsymbol{\frac{6^n+2^n-5^n}{6^n}}$$

80 1つのさいころを投げるとき，偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，3回とも偶数の目が出る確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

81 (1) A → C_1 と進む確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ であり，C_1 → B と進む確率は1であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

(2) A → C_2 について

(i) 上，右，右，右と進む

(ii) 右，上，右，右と進む

(iii) 右，右，上，右と進む

(iv) 右，右，右，上と進む

(v) 右上，右，右と進む

(vi) 右，右上，右と進む

(vii) 右，右，右上と進む

(i)～(iii)の確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{128}$$

(iv)の確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

(v)～(vii)の確率はそれぞれ

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{64}$$

したがって，A → C_2 と進む確率は

$$3\cdot\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{11}{128}$$

C_2 → B と進む確率は1であるから，

求める確率は，$\boldsymbol{\frac{11}{128}}$ である．

82 (1) 3回目にAに戻るのは

A → B → C → A
A → B → D → A
A → C → B → A
A → C → D → A
A → D → B → A
A → D → C → A

の6通りあり，これらの確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 何回目にBにいるかに注目して

(i) A → B → X → Y → A

(ii) A → X → B → Y → A

(iii) A → X → Y → B → A

の3つの型がある．

(i)には，A → B → A → C → A
A → B → A → D → A
A → B → C → D → A
A → B → D → C → A

(ii)には，A → C → B → C → A
A → C → B → D → A
A → D → B → C → A
A → D → B → D → A

(iii)には，A → C → A → B → A
A → C → D → B → A
A → D → A → B → A
A → D → C → B → A

があるから，求める確率は

$$12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

83 (1) だれが勝つかが4通り，どの手で勝つかが3通りあるから

$$\frac{4\cdot 3}{3^4}=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

(2) 2人が勝つ確率，3人が勝つ確率はそれぞれ

$$\frac{{}_4C_2\cdot 3}{3^4},\quad \frac{{}_4C_3\cdot 3}{3^4}$$

である．

あいこになる確率は，1から，1人が勝つ確率，2人が勝つ確率，3人が勝つ確率をひけば求まる．

$$1-\frac{4}{27}-\frac{{}_4C_2\cdot 3}{3^4}-\frac{{}_4C_3\cdot 3}{3^4}$$

$$=\frac{27-4-6-4}{27}=\mathbf{\frac{13}{27}}$$

別解　あいこになるのは，4人全員が同じ手を出すときか，2人が同じ手を出し，他の2人はこの手以外の互いに異なる手を出すときであるから，

$$\frac{3}{3^4}+\frac{{}_4C_2\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3^4}=\frac{13}{27}$$

84　(1)　1が1回，2が1回，3が1回のときと，2が3回のときがある．

1が1回，2が1回，3が1回出るのは

123，132，213，231，312，321

の6通りあるから，和が6となる確率は

$$6\times\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\left(\frac{2}{6}\right)^3$$

$$=\frac{36+8}{6^3}=\mathbf{\frac{11}{54}}$$

(2)　和が7となるのは

1が1回，3が2回

2が2回，3が1回

のときがある．

1が1回，3が2回出るのは

133，313，331

の3通りあり，2が2回，3が1回のときも3通りある．

したがって，和が7となる確率は

$$3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{7}{24}}$$

85　(1)　2秒後に(1，1)にいるのは，上と右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{2}{25}}$$

また，2秒後に(1，−1)にいるのは，下と右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

(2)　2秒後に(0，0)にいるのは，上下に1回ずつ，あるいは左右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+{}_2C_1\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{7}{25}}$$

(3)　4秒後に(1，1)にいるのは

上に2回，下に1回，右に1回進むときと

上に1回，左に1回，右に2回進むときである．

したがって，4秒後に(1，1)にいる確率は

$$\frac{4!}{2!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}$$

$$+\frac{4!}{1!1!2!}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2$$

$$=\mathbf{\frac{42}{625}}$$

86　白球がn回取り出される確率をp_nとすると

$$p_n={}_{40}C_n\left(\frac{10}{70}\right)^n\left(\frac{60}{70}\right)^{40-n}$$

$$=\frac{40!}{n!(40-n)!}\cdot\frac{6^{40-n}}{7^{40}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\dfrac{40!}{(n+1)!(39-n)!}\cdot\dfrac{6^{39-n}}{7^{40}}}{\dfrac{40!}{n!(40-n)!}\cdot\dfrac{6^{40-n}}{7^{40}}}$$

$$=\frac{40-n}{n+1}\cdot\frac{1}{6}$$

よって，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\gtrless 1 \iff \dfrac{40-n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{6}\gtrless 1$

$$\iff 40-n\gtrless 6(n+1)$$

$$\iff 7n\lessgtr 34$$

したがって，$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5>p_6>\cdots$

よって，**白球が5回取り出される確率が**もっとも大きい．

87　(1)　a_2は1回目に白球，2回目に赤球を取り出す確率であるから，

$$a_2=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\mathbf{\frac{7}{30}}$$

a_3 は，1，2 回目に白球，3 回目に赤球を取り出す確率であるから

$$a_3=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{7}{40}}$$

(2) (1)と同様に，

$$a_1=\frac{3}{10}$$

$$a_4=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$$

$$a_5=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

したがって，a_1 から a_5 の中で最大のものは a_1 である．よって，$k=\mathbf{1}$

88 Aから白 3 個を取り出した場合は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{96}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

Aから白 2 個，黒 1 個を取り出した場合は

$$\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}\times\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{450}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

Aから白 1 個，黒 2 個を取り出した場合は

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}\times\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{288}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

Aから黒 3 個を取り出した場合は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{21}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

したがって，求める確率は

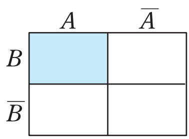
$$\frac{96+450+288+21}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

$$=\frac{855}{35\cdot45}=\mathbf{\frac{19}{35}}$$

89 (1) $P(A)+P(B)-\{P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\}$

$$=2P(A\cap B)$$

であるから，



$P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{11}{24}$$

したがって，

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

(2) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{2}{3}-\frac{11}{24}=\frac{5}{24}$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

したがって，

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

90 (1) さいころを投げて，1，2 が出たとき，3，4 が出たとき，5，6 が出たときに分けて考えて

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{1+3+6}{3\cdot{}_6C_2}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 白球が 1 個である確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{8+9+8}{3\cdot{}_6C_2}=\frac{5}{9}$$

したがって，白球の個数の期待値は

$$1\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9}=\mathbf{1}$$

91 (1) $xyz=0 \;\substack{\not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}\; xy=0$

であるから，

$xyz=0$ は $xy=0$ であるための必要条件であるが十分条件でない． ……(ア)

(2) $x+y+z=0 \;\substack{\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}\; x+y=0$

であるから，

$x+y+z=0$ は $x+y=0$ であるための必要条件でも十分条件でもない．

……(エ)

(3)　$x(y^2+1)=0 \underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} x=0$ であるから，

$x(y^2+1)=0$ は $x=0$ であるための必要十分条件である．　……(ウ)

注　$x(y^2+1)=0 \Longrightarrow x=0$ の証明：

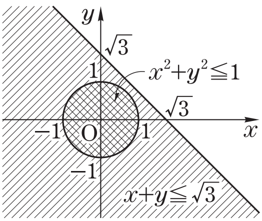
$x(y^2+1)=0$ のとき $x=0$ または $y^2+1=0$

ところが，y は実数であるから $y^2+1=0$ は成り立たない．

したがって，

$$x(y^2+1)=0 \Longrightarrow x=0$$

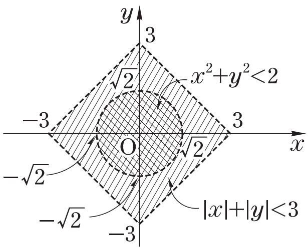
92　(1)



$$「x^2+y^2\leqq 1」\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}「x+y\leqq\sqrt{3}」$$

したがって，$x^2+y^2\leqq 1$ は $x+y\leqq\sqrt{3}$ であるための十分条件であるが必要条件でない．　……(イ)

(2)



$$「x^2+y^2<2」\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}「|x|+|y|<3」$$

したがって，$x^2+y^2<2$ は $|x|+|y|<3$ であるための十分条件であるが必要条件でない．　……(イ)

93　(1)　実数 x についての命題

「$x^2-x-2<0$ ならば $0<x<1$ である」　……①

について，

逆は，

「$0<x<1$ ならば $x^2-x-2<0$ である」

裏は，

「$x^2-x-2\geqq 0$ ならば $x\leqq 0$ または $1\leqq x$ である」

対偶は，

「$x\leqq 0$ または $1\leqq x$ ならば $x^2-x-2\geqq 0$ である」

(2)　$x^2-x-2<0$ を満たす x の範囲は $-1<x<2$ である．

よって，

①：「$-1<x<2 \Longrightarrow 0<x<1$」は**偽**

①の逆：「$0<x<1 \Longrightarrow -1<x<2$」は**真**

①の裏：「$x\leqq -1$ または $2\leqq x \Longrightarrow x\leqq 0$ または $1\leqq x$」は**真**

①の対偶：「$x\leqq 0$ または $1\leqq x \Longrightarrow x\leqq -1$ または $2\leqq x$」は**偽**

94-1　(1)　対偶である

「n が奇数ならば n^2 も奇数となる」

ことを示す．

n が奇数ならば，$n=2k+1$ (k は整数) と表すことができ，

$$n^2=(2k+1)^2$$
$$=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから n^2 は奇数である．

したがって，n が整数であるとき，

n^2 が偶数ならば n も偶数となる．

(2)　$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．

このとき，$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p，q は互いに素な整数) と表すことができる．

両辺を平方して，$2=\dfrac{q^2}{p^2}$

よって，$q^2=2p^2$　……①

右辺は偶数であるから，q^2 も偶数であり，(1)より q は偶数である．

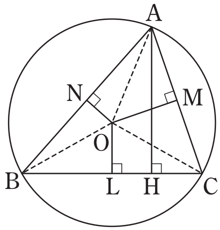
したがって，$q=2q'$ (q' は整数)

と表すことができる．

①に代入して，$4q'^2=2p^2$
よって，$p^2=2q'^2$
したがって，p^2 も偶数であり，(1)より p は偶数である．
すると，p，q は2を公約数にもつことになり矛盾する．
以上より，$\sqrt{2}$ は無理数である．

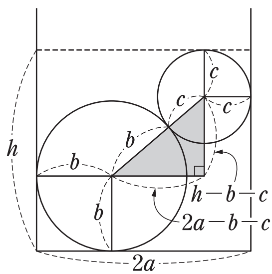
94-2 $a+bx=c+dx$ かつ $b \neq d$ と仮定する．
このとき，$a+bx=c+dx$ より，
$$(b-d)x=c-a$$
よって，
$$x=\frac{c-a}{b-d}$$
が得られる．
ところが，左辺は無理数，右辺は有理数であり矛盾が生じる．
よって，$b=d$
このとき，$a+bx=c+dx$ より $a=c$ が得られる．
したがって，a，b，c，d が有理数，x が無理数のとき，
「$a+bx=c+dx$ ならば，
$a=c$ かつ $b=d$」
が成り立つ．

95 3辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とし，3辺の垂直二等分線の交点（つまり三角形 ABC の外心）を O とする．



三角形 ABC の内部にあって，
$$PA \leqq PB,\ PA \leqq PC$$
を満たす点 P の全体がつくる領域 G は，四角形 ANOM の周および内部である．
ところで，
$$\triangle OAN \equiv \triangle OBN,$$
$$\triangle OAM \equiv \triangle OCM$$
であるから，
$$\triangle OBN+\triangle OCM$$
$$=\triangle OAN+\triangle OAM$$
$$=(\text{四角形 ANOM})$$
したがって，
$$\triangle ABC=2\times(\text{四角形 ANOM})+\triangle OBC$$
条件より，
$$\triangle ABC=3\times(\text{四角形 ANOM})$$
であるから
$$\triangle OBC=(\text{四角形 ANOM}),$$
$$\triangle ABC=3\times\triangle OBC$$
したがって，A から BC に引いた垂線と BC の交点を H とすると，
$$AH=3OL \quad \cdots\cdots①$$
$A=60°$ であるから，$\angle BOC=120°$ であり，三角形 ABC の外接円の半径を r とすると，$OL=\frac{r}{2}$
①より，$AH=\frac{3}{2}r$
また，$OA=r$ であるから，A は半直線 LO 上にあり，三角形 ABC は**正三角形**である．

96 図のアミの直角三角形に注目して，
$$(b+c)^2=(2a-b-c)^2+(h-b-c)^2 \quad \cdots\cdots①$$



(1) ①に，$a=8$，$b=c=5$ を代入して，
$$10^2=6^2+(h-10)^2$$
よって，$(h-10)^2=64$
したがって，$h-10=\pm 8$
これより，$h=18$，2
h は球の直径（$=10$）以上であるから，
$$h=\mathbf{18}$$

(2)　①に，$a=9$，$b=7$，$c=6$ を代入して，

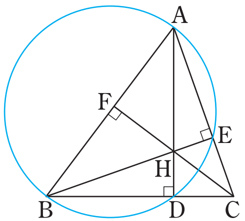
$$13^2=5^2+(h-13)^2$$

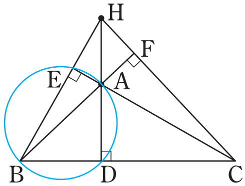
これより，$h=25$，1

h は球の直径（$=14$，12）以上であるから，

$$h=\mathbf{25}$$

97





$\angle ADB=\angle AEB$（$=90°$）

であるから，4 点 A，B，D，E は，同一円周上にある．

したがって，方べきの定理より

$$AH \cdot HD=BH \cdot HE$$

同様に，4 点 B，C，E，F は同一円周上にあり，

$$BH \cdot HE=CH \cdot HF$$

以上より，

$$AH \cdot HD=BH \cdot HE=CH \cdot HF$$

98　チェバの定理より，

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

D は線分 BC の中点であるから

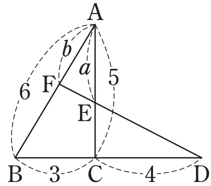
$$\frac{BD}{DC}=1$$

①に代入して，$\dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB}=1$

したがって，AF：FB＝AE：EC

よって，FE∥BC

99



(1)　メネラウスの定理より，

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}=1$$

したがって，

$$\frac{b}{6-b} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5-a}{a}=1$$

よって，

$$7b(5-a)=4a(6-b)$$

整理して，

$$\mathbf{3ab+24a-35b=0} \quad \cdots\cdots ①$$

(2)　4 点 B，C，E，F が同一円周上にあるとき，方べきの定理より，

$$AF \cdot AB=AE \cdot AC$$

したがって，$6b=5a$

よって，　$b=\dfrac{5}{6}a$

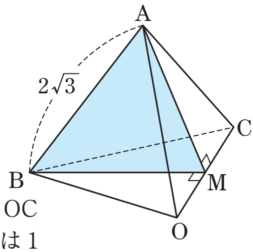
①に代入して，

$$\frac{5}{2}a^2+24a-\frac{175}{6}a=0$$

整理して，$15a^2-31a=0$

$0<a<5$ であるから，$a=\mathbf{\dfrac{31}{15}}$

100　辺 OC の中点を M とする．



AM⊥OC，

BM⊥OC

であるから

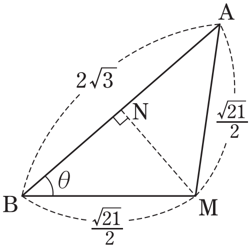
平面 ABM⊥OC

三角形 AOC は 1 辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形であるから

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{7}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

また

$$BM=AM=\frac{\sqrt{21}}{2}$$



$\angle \mathrm{MBA}=\theta$，辺 AB の中点を N とおくと，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{MB}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

よって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

したがって

$$\triangle\mathrm{ABM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

三角錐 OABC の体積は

(三角錐 CABM)＋(三角錐 OABM)

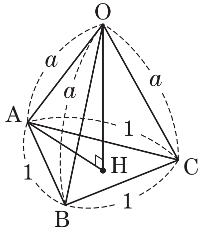
$$=\frac{1}{3}\mathrm{CM}\cdot\triangle\mathrm{ABM}+\frac{1}{3}\mathrm{OM}\cdot\triangle\mathrm{ABM}$$
$$=\frac{1}{3}(\mathrm{CM}+\mathrm{OM})\triangle\mathrm{ABM}$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{OC}\cdot\triangle\mathrm{ABM}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{2}}$$

101 (1) $\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2}$

$$=\sqrt{a^2-\mathrm{OH}^2}$$

$$\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{a^2-\mathrm{OH}^2}$$
$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{a^2-\mathrm{OH}^2}$$

より，AH＝BH＝CH であるから，H は三角形 ABC の外心である．



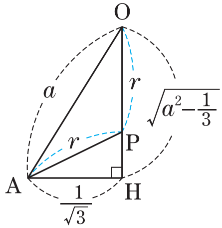
よって，AH は 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC の外接円の半径であり，正弦定理より，

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2) $\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}$

$$=\boldsymbol{\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}$$

(3) 四面体 OABC の外接球 S の中心を P とする．



P から底面 ABC に引いた垂線と底面の交点は三角形ABC の外心であるから，P は線分 OH 上にある．

$\mathrm{PH}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{PA}^2$ より

$$\left(\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}-r\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=r^2$$

よって，$a^2-2r\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}=0$

したがって，

$$r=\boldsymbol{\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}}$$

102-1 $\dfrac{2+8+1+9+4+a}{6}=7$ より

$\dfrac{a+24}{6}=7$

よって,

$a=\mathbf{18}$

102-2 $x \leqq 13$ だと中央値は $\dfrac{13+15}{2}=14$ となり不適である.

$x \geqq 20$ だと中央値は $\dfrac{15+20}{2}=17.5$ となり不適である.

したがって, $13<x<20$ であり, このとき中央値は, $\dfrac{15+x}{2}$ である.

これが 17 である条件は,

$\dfrac{15+x}{2}=17$ より $x=19$

これは $13<x<20$ をみたすので, 求める x の値は **19** である.

103 英語の点数について,

中央値は 68 (点), 第 1 四分位数は 54 (点), 第 3 四分位数は 84 (点),
最小値は 25 (点), 最大値は 94 (点)

したがって, 箱ひげ図は②である. ……ア

数学の点数について,

点数を小さい順に並べると,

45, 55, 65, 65, 66, 69, 73, 77, 78, 78, 80, 87, 88, 90, 94

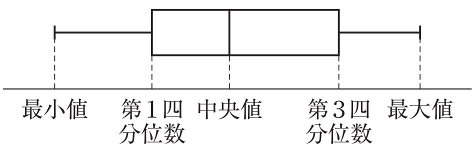
よって,

中央値は 77 (点), 第 1 四分位数は 65 (点), 第 3 四分位数は 87 (点),
最小値は 45 (点), 最大値は 94 (点)

したがって, 箱ひげ図は①である. ……イ

(箱ひげ図について)

箱ひげ図は次のような値を表している.



104 変量 y についての n 個のデータ

$y_k=k \quad (k=1, 2, \cdots, n)$

と変量 z についての n 個のデータ

$z_k=ck \quad (k=1, 2, \cdots, n)$

の間には,

$z_k=cy_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)$

の関係があるので，

$(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ の分散$)=c^2(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散$)$

が成り立つ．

したがって，$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散が $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ の分散より大きくなる条件は，

$c^2<1$

よって，

$\boldsymbol{-1<c<1}$

105-1 $f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\ \left(=\dfrac{1}{n}\{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2\}\right)$

$$=\frac{1}{n}\{na^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)a+{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2\}$$

$$=\left(a-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2+\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}$$

↑ a に関して平方完成

したがって，$f(a)$ を最小にする a は

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

つまり，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均値であり，そのときの最小値は

$$\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

すなわち，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である．

参考 $a=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ (=\overline{x})$ のとき，$f(a)=f(\overline{x})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$ で，これは分散の定義式そのものである．これより，$f(a)$ の最小値は，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である，と述べてもよい．

105-2 (1) 3つの正の数 $a,\ b,\ c$ の平均値が 14 であるから，

$$\frac{1}{3}(a+b+c)=14$$

よって，

$a+b+c=42$ ……①

また，標準偏差が 8 であるから，分散は 8^2 であり

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-14^2=8^2$$

よって，

$a^2+b^2+c^2=\mathbf{780}$ ……ア ……②

等式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

に①，②を代入して

$42^2=780+2(ab+bc+ca)$

よって，

$ab+bc+ca=\mathbf{492}$ ……イ

(2)　集団全体の平均値は，

$$\frac{16\times20+12\times60}{80}=\mathbf{13} \qquad \cdots\cdots ウ$$

Aグループの 20 個のデータの 2 乗の合計を K_A

Bグループの 60 個のデータの 2 乗の合計を K_B

とする．

Aグループの 20 個のデータの平均値が 16，分散が 24 であることから

$$\frac{K_A}{20}-16^2=24$$

よって，

$$K_A=5600$$

Bグループの 60 個のデータの平均値が 12，分散が 28 であることから

$$\frac{K_B}{60}-12^2=28$$

よって，

$$K_B=10320$$

したがって，集団全体の分散は，

$$\frac{K_A+K_B}{80}-13^2=\frac{5600+10320}{80}-169$$
$$=\mathbf{30} \qquad \cdots\cdots エ$$

106　$\bar{x}=\frac{1}{n}\{100+99\times(n-1)\}$

$$=\frac{99n+1}{n}$$

$$v=\frac{1}{n}\{100^2+99^2(n-1)\}-\left(\frac{99n+1}{n}\right)^2$$ ⬅(分散)＝(2 乗の平均値)－(平均値)^2

$$=\frac{99^2n+199}{n}-\frac{(99n+1)^2}{n^2}$$
$$=\frac{n-1}{n^2}$$

よって，

$$(\bar{x},\ v)=\left(\boldsymbol{\frac{99n+1}{n}},\ \boldsymbol{\frac{n-1}{n^2}}\right) \qquad \cdots\cdots ア$$

また，

$$t_1=50+\frac{10\left(100-\frac{99n+1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}}$$
$$=50+\frac{10(n-1)}{\sqrt{n-1}}$$
$$=50+10\sqrt{n-1}$$

よって，$t_1 \geqq 100$ となる条件は

$$50+10\sqrt{n-1} \geqq 100$$

したがって，

$$\sqrt{n-1} \geqq 5$$

これをみたす最小の n は，**26** である．　　　……イ

107 (1) $\overline{x}=\dfrac{1}{4}\{0+1+a+(a+1)\}=\boldsymbol{\dfrac{a+1}{2}}$

$$\overline{y}=\frac{1}{4}(0+0+1+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $s_x{}^2=\dfrac{1}{4}\{0^2+1^2+a^2+(a+1)^2\}-\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$

$$=\frac{2a^2+2a+2}{4}-\frac{a^2+2a+1}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{a^2+1}{4}}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{4}(0^2+0^2+1^2+1^2)-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) $s_{xy}=\dfrac{1}{4}\left\{\left(0-\dfrac{a+1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{a+1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)\right.$

$$\left.+\left(a-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(a+1-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a+1}{4}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{4}}$$

(4) $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$$=\frac{\frac{a}{4}}{\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$$

108 (1) $w_i=ax_i+b$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるから

$$\overline{w}=\boldsymbol{a\overline{x}+b}$$

であり，w_1，w_2，$\cdots$，w_n の分散 $s_w{}^2$ は，

$$s_w{}^2=a^2s_x{}^2$$　　⬅標問 104 参照

よって

$$s_w=\sqrt{a^2s_x{}^2}$$

$$=|a|s_x$$

$=\boldsymbol{as_x}$　($a>0$ より)

(2)　x と y の共分散を s_{xy}，w と y の共分散を s_{wy} とすると

$$s_{wy}=\frac{1}{n}\{(w_1-\overline{w})(y_1-\overline{y})+(w_2-\overline{w})(y_2-\overline{y})+\cdots+(w_n-\overline{w})(y_n-\overline{y})\}$$

であり，

$$w_i-\overline{w}=(ax_i+b)-(a\overline{x}+b)$$
$$=a(x_i-\overline{x})$$

であるから

$$s_{wy}=\frac{1}{n}\{a(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+a(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+a(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$
$$=a\times\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$
$$=as_{xy}$$

したがって，w と y の相関係数を r_{wy}，x と y の相関係数を r_{xy} とすると

$$r_{wy}=\frac{s_{wy}}{s_w s_y}=\frac{as_{xy}}{as_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=r_{xy}$$

109　(1)　$\overline{x}=\frac{1}{10}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})=\frac{55}{10}=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=\frac{75}{10}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

$z_i=2x_i+3$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$) であるから

$\overline{z}=2\overline{x}+3=\boldsymbol{14}$　　⬅標問 **104** 参照

$w_i=y_i-4$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$) であるから

$$\overline{w}=\overline{y}-4=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(2)　$s_x{}^2=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2\}$

$$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$$
$$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2\cdot 10\overline{x}\cdot\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$$
$$=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2$$

したがって，

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2=10\{s_x{}^2+(\overline{x})^2\}$$

また，

$$s_{xy}=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_{10}-\overline{x})(y_{10}-\overline{y})\}$$
$$=\frac{1}{10}\{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{y}$$
$$-(y_1+y_2+\cdots+y_{10})\overline{x}+10\overline{x}\overline{y}\}$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-10\overline{x}\cdot\overline{y}-10\overline{y}\cdot\overline{x}+10\overline{x}\overline{y})$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\overline{y}$$

したがって，

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}=10(s_{xy}+\overline{x}\overline{y})$$

(3)　$s_{xy}=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\overline{y}$

$$=\frac{445}{10}-\frac{11}{2}\times\frac{15}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{13}{4}}$$

また，

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2$$

$$=\frac{385}{10}-\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$=\frac{33}{4}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{10}(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)-(\overline{y})^2$$

$$=\frac{645}{10}-\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$=\frac{33}{4}$$

したがって，

$$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

$$=\frac{\frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{33}{4}}\sqrt{\frac{33}{4}}}$$

$$=\mathbf{\frac{13}{33}}$$

$z_i=2x_i+3$，$w_i=y_i-4$（$i=1$，2，$\cdots$，10）であるから

$s_{zw}=2\cdot 1s_{xy}$　　　⬅標問 **108** 参照

$$=2\times\frac{13}{4}=\mathbf{\frac{13}{2}}$$

z，w の分散，標準偏差をそれぞれ $s_z{}^2$，$s_w{}^2$，s_z，s_w とおくと

$s_z{}^2=2^2s_x{}^2$，$s_w{}^2=1^2s_y{}^2$ より

$$s_z=2s_x,\quad s_w=s_y$$

したがって，

$$r_{zw}=\frac{s_{zw}}{s_zs_w}=\frac{2s_{xy}}{2s_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=r_{xy}=\mathbf{\frac{13}{33}}$$