数学Ⅲ・C標準問題精講［四訂版］

木村光一著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

第1章 数列の極限と無限級数

1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

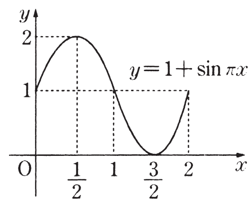
2 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n}-n^{\frac{3}{2}})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n^2+1}-n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\boldsymbol{0}$

3-1 (1) グラフより

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=\begin{cases}\mathbf{1} & (\boldsymbol{x=0,\ 1,\ 2})\\ \boldsymbol{\infty} & (\boldsymbol{0<x<1})\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{1<x<2})\end{cases}$$



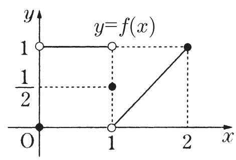
(2) (1)より

$f(0)=0,\quad f(1)=\dfrac{1}{2},\quad f(2)=1$

$0<x<1$ のとき，$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{x-1}{(1+\sin\pi x)^n}}{1+\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}}=1$

$1<x<2$ のとき，$f(x)=x-1$

以上から，$y=f(x)$ のグラフは右図.



3-2 $\displaystyle f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}(\sin^{2n}a+1)}{1+a^{2n}}$ とおく.

(i) $|a|<1\ \left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$|\sin a|<1$ より，$f(a)=\mathbf{0}$

(ii) $|a|=1$ のとき，$a^{2n}=1$，$|\sin a|<1$ より，$f(a)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(iii) $|a|>1$ のとき，

$a=\dfrac{\pi}{2}+m\pi$（mは整数）ならば，

$$\sin^{2n}a=1 \text{ より，} f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{2n}}{1+a^{2n}}=\mathbf{2}$$

$a\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ ならば，

$$|\sin a|<1 \text{ より，} f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{2n}a+1}{\dfrac{1}{a^{2n}}+1}=\mathbf{1}$$

4-1 (1) 自然数 $n\,(>1)$ に対して，$\sqrt[n]{n}>1$ であるから，

$\sqrt[n]{n}=1+h_n$ とおくと，$h_n>0$ であり，

$$n=(1+h_n)^n\geqq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2>\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2$$

$$\therefore\quad h_n{}^2<\frac{2}{n-1}\qquad\therefore\quad 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

(2) (1)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$　ゆえ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=\mathbf{1}$

4-2 $a\geqq b$ のとき，$\sqrt[n]{a^n}\leqq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqq\sqrt[n]{a^n+a^n}$ より，$a\leqq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqq a\cdot 2^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\boldsymbol{a}$$

$a\leqq b$ のとき，同様にして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\boldsymbol{b}$

5-1 (1) $a_n>0$ ゆえ，$a_n{}^p a_{n-1}{}^q=a$ の対数をとると

$$p\log a_n+q\log a_{n-1}=\log a \text{ より，}\qquad \log a_n=-\frac{q}{p}\log a_{n-1}+\frac{\log a}{p}$$

$$\log a_n-\frac{\log a}{p+q}=-\frac{q}{p}\left(\log a_{n-1}-\frac{\log a}{p+q}\right)$$

$$\log a_n-\frac{\log a}{p+q}=\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\left(\log a_1-\frac{\log a}{p+q}\right)=-\frac{\log a}{p+q}\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

$$\log a_n=\frac{\log a}{p+q}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=a^{\frac{1}{p+q}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}}$$

(2) $p>q>0$ より，$\left|-\dfrac{q}{p}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{a^{\frac{1}{p+q}}}$$

5-2 $a_{n+1}-3=\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}-3=\dfrac{2(a_n-3)}{a_n+3}$，　$a_{n+1}+1=\dfrac{6(a_n+1)}{a_n+3}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\frac{2}{6}\cdot\frac{a_n-3}{a_n+1}=\frac{1}{3}b_n\qquad\therefore\quad b_n=b_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+b_n}{1-b_n}=\mathbf{3}$

5-3 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ より，$a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{2-a_n}$

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{-(a_n-1)+1}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}-(n-1)=\frac{1}{c-1}-(n-1)$$

$$\therefore\quad a_n=1+\frac{c-1}{1-(c-1)(n-1)}\to 1\quad (n\to\infty)$$

6 (1) $0<a_1<1$ である．次に，ある n に対して $0<a_n<1$ と仮定すると

$$a_{n+1}=\frac{na_n{}^2+2n+1}{a_n+3n}>0$$

$$1-a_{n+1}=\frac{a_n+n-na_n{}^2-1}{a_n+3n}=\frac{(1-a_n)\{n(1+a_n)-1\}}{a_n+3n}>0 \qquad \cdots\cdots①$$

したがって，$0<a_{n+1}<1$ となり，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$0<a_n<1$

(2) ①：$1-a_{n+1}=\dfrac{n(1+a_n)-1}{a_n+3n}(1-a_n)$ において，$0<a_n<1$ より，

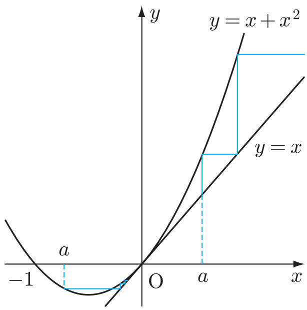
$n(1+a_n)-1<2n-1<2n$，$a_n+3n>3n$ であるから，

$$0<\frac{n(1+a_n)-1}{a_n+3n}<\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}\qquad \therefore\quad 0<1-a_{n+1}<\frac{2}{3}(1-a_n)$$

$$\therefore\quad 0<1-a_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)=0$ ゆえ，$\lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{1}$

7 $x_{n+1}=x_n+x_n{}^2 \qquad \cdots\cdots①$



(1) $x_{n+1}-x_n=x_n{}^2>0$ より，$x_{n+1}>x_n$ であるから

$$x_{n+1}-x_n=x_n{}^2>x_1{}^2=a^2$$

ゆえに，$n\to\infty$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)>a+(n-1)a^2\to\infty$$

(2) $-1<a<0$ より，$-1<x_1<0$

次に，$-1<x_k<0$ と仮定すると，

$x_{k+1}=x_k+x_k{}^2=\left(x_k+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ より

$-\dfrac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$．ゆえに，$-1<x_n<0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つ．

(3) $-\dfrac{1}{x_n}=y_n$ とおくと，(2)より $y_n>1 \quad \cdots\cdots②$ である．①より

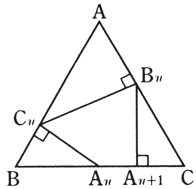
$$-\frac{1}{y_{n+1}}=-\frac{1}{y_n}+\frac{1}{y_n{}^2}\qquad \therefore\quad \frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_n{}^2}=\frac{y_n-1}{y_n{}^2}$$

$$\therefore\quad y_{n+1}=\frac{{y_n}^2}{y_n-1}=y_n+1+\frac{1}{y_n-1}>y_n+1\quad (②による)$$

よって，$y_n>y_1+n-1\to\infty\,(n\to\infty)$ となるから，$x_n=-\dfrac{1}{y_n}\to\mathbf{0}\ (n\to\infty)$.

注 $y=x+x^2$ の原点における接線は $y=x$ である．

9-1 $\mathrm{BA}_n=x_n$ とおく．



$$\mathrm{AC}_n=a-\frac{1}{2}\mathrm{BA}_n=a-\frac{1}{2}x_n$$

$$\mathrm{CB}_n=a-\frac{1}{2}\mathrm{AC}_n=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}x_n$$

$$\mathrm{BA}_{n+1}=a-\frac{1}{2}\mathrm{CB}_n=\frac{3}{4}a-\frac{1}{8}x_n=x_{n+1}$$

$x_{n+1}-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{2}{3}a\right)$ より，

$$x_n-\frac{2}{3}a=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}a\right)\to 0\quad (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

9-2 (1) A→D→A または A→B→A と移動する確率だから

$$a_1=\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 2=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$$

(2) 偶数回後にはQはAかCにあるから，$2n+2$ 回後にAにあるのは，$2n$ 回後にAにあって，(1)と同じように 2 回でAにもどるときか，または $2n$ 回後にCにあって，C→D→A またはC→B→A と移動するときである．

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{5}{18}a_n+\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}(1-a_n)=\boldsymbol{-\frac{4}{9}a_n+\frac{13}{18}}$$

(3) $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{4}{9}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$a_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

10 (1) $x+3=A(x+1)+Bx$ より

$$A=\mathbf{3},\qquad B=\mathbf{-2}$$

(2) $a_n=\dfrac{n+3}{n(n+1)}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n+1}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=3\left\{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}3\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}=\mathbf{2}$$

11-1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=0$ のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})$ とおくと

$$S_n=a_1-a_2+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+(n-1)(a_{n-1}-a_n)$$

$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}-(n-1)a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_n$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}na_n=1$$

11-2 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ より

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1\to\infty\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

注 標問 **80** の評価法を使えばもっと自然に証明できる．

次に，$\dfrac{1}{\sqrt{2k+2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ より （気づくかどうかは経験の問題）

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{1}{a_n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

12-1 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{-\frac{1}{3^2}}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=\boldsymbol{-\frac{1}{10}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

12-2 S と T の収束条件は

$\left|\dfrac{a}{2}\right|<1$，$\left|-\dfrac{1}{2-a}\right|<1$ より，$|a|<2$，$|a-2|>1$ $\quad\therefore\quad -2<a<1$ ……①

このとき，$S=T$ より

$$S-T=\frac{1}{1-\frac{a}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2-a}}=\frac{2+2a-a^2}{(2-a)(3-a)}=0$$

$\therefore\quad a^2-2a-2=0\qquad\therefore\quad a=1\pm\sqrt{3}$ ……②

①，②より，

$a=\mathbf{1-\sqrt{3}}$

12-3 初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n} \quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}} \quad\cdots\cdots②$$

①－②より

⬅ $\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$ 型の定石

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{3^n}$$

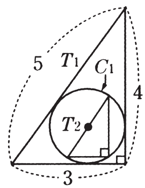
$$\therefore\quad S_n=\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$ であるから，求める和は $\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{\frac{3}{4}}$

13-1 T_1，T_2，…はすべて直角三角形である．よって，T_2 の斜辺は円 C_1 の直径と一致する．そこで，円 C_1 の半径を r とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}(3+4+5)r$$

$\therefore\quad S_1=6,\ r=1$



面積比は，斜辺の比の 2 乗に等しいから

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{\infty}S_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^{i-1}S_1=\frac{6}{1-\frac{4}{25}}=\mathbf{\frac{50}{7}}$$

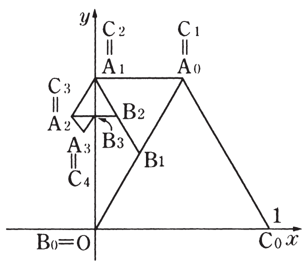
13-2 (1) 図のように座標軸を設定すると

$$\overrightarrow{C_0C_3}=\overrightarrow{C_0C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{9}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$



$\therefore\quad |\overrightarrow{C_0C_3}|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\sqrt{(\sqrt{3}\,)^2+1^2}=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$

(2) $\overrightarrow{C_{k+3}C_{k+4}}=-\dfrac{1}{8}\overrightarrow{C_kC_{k+1}}$ より

$$\overrightarrow{C_0C_{3n}}=\sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{C_{3k}C_{3k+1}}+\overrightarrow{C_{3k+1}C_{3k+2}}+\overrightarrow{C_{3k+2}C_{3k+3}})$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^k(\overrightarrow{C_0C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_3})=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^k\overrightarrow{C_0C_3}$$

$\therefore\quad |\overrightarrow{C_0C_{3n}}|=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^k|\overrightarrow{C_0C_3}|$

$\therefore\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{C_0C_{3n}}|=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$

13-3 (1) A_n の各辺は A_{n+1} の 4 辺になるから，$a_{n+1}=4a_n$.

$a_1=3$ であるから

$$a_n=\mathbf{3\cdot 4^{n-1}}$$

(2) A_n につけ加える小三角形の 1 辺の長さは A_1 の 1 辺の長さの $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 倍だから，その面積は $S_1\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}^2=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$ である．つけ加える個数は a_n だから

$$S_{n+1}=S_n+\left(\frac{1}{9}\right)^n a_n=S_n+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$\therefore\quad S_n=S_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1}-S_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$$

⬅ A_1 の外接円の面積は $\dfrac{4\sqrt{3}\,\pi}{9}$ (≒2.4)

14-1 $Q=a_1\cdots a_m.b_1\cdots b_n$ (有限小数) とすると

$$Q=\frac{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n}{10^n}=\frac{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n}{2^n\cdot 5^n}$$

ゆえに，約分すると分母は 2 または 5 の素因数だけからなる．

逆に，$Q=\dfrac{q}{2^\alpha\cdot 5^\beta}$ とすると，分母，分子に 2 あるいは 5 を適当に掛けて

$Q=\dfrac{q'}{2^n\cdot 5^n}=\dfrac{q'}{10^n}$ とすることができる．したがって，Q は有限小数.

14-2 $1\leqq b<a\leqq 9,\qquad \dfrac{b}{a}\leqq 0.\dot{b}\dot{a}\quad\cdots\cdots①$

$c=0.\dot{b}\dot{a}$ とおく．$100c=ba.\dot{b}\dot{a}$ との差をとり

$$99c = ba \qquad \therefore \quad c = \frac{10b + a}{99} \quad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\frac{b}{a} \leqq \frac{10b + a}{99} \qquad \therefore \quad b \leqq \frac{a^2}{99 - 10a} \quad (= f(a) \text{ とおく})$$

$f(a)$ は a の増加関数であり

$$f(6) = \frac{36}{39} < 1,\ f(7) = \frac{49}{29} = 1.\cdots,\ f(8) = \frac{64}{19} = 3.\cdots,\ f(9) = 9$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{a = 7} \text{ **のとき，** } \boldsymbol{b = 1} \\ \boldsymbol{a = 8} \text{ **のとき，** } \boldsymbol{b = 1,\ 2,\ 3} \\ \boldsymbol{a = 9} \text{ **のとき，** } \boldsymbol{b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8} \end{cases}$$

第2章 微分法とその応用

15 $x=-t$ とおくと

$$与式=\lim_{t\to\infty}(-3t+1+\sqrt{9t^2-4t+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t-1}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

17-1 (1) 余弦定理により，$2^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$

$\therefore\ x^2-2x\cos\theta-3=0 \qquad \therefore\ x=\boldsymbol{\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}$

(2) (1)より，$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})\sin\theta$ となるから

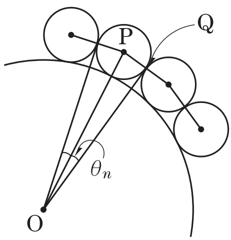
$$\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})\frac{\sin\theta}{\theta}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(3) $\mathrm{CD}=3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}=\dfrac{(3-\cos\theta)^2-(\cos^2\theta+3)}{3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}$

$$=\frac{6(1-\cos\theta)}{3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}=\frac{6\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{6}{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

17-2 半径1の円の中心をO，半径 $\dfrac{1}{n}$ の小円の中心をP，Oから小円に引いた接線の接点をQ，$\angle\mathrm{POQ}=\theta_n$ とすると，a_n の定義より



$$\frac{2\pi}{2\theta_n}-1<a_n\leqq\frac{2\pi}{2\theta_n}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}\leqq\frac{\pi}{n\theta_n}\quad\cdots\cdots①$$

$\sin\theta_n=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ であるから

$$n\theta_n=n\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}$$

$$\to1\quad(n\to\infty)\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

①，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\boldsymbol{\pi}$

⬅ $n\theta_n$ の極限を直接求めることはできないから，$\sin\theta_n$ を媒介して考える．直感的には n が十分大きいとき，$\theta_n\fallingdotseq\sin\theta_n$ とみてよいから $\left(なぜなら\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1\right)$

$n\theta_n\fallingdotseq n\sin\theta_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\to1$

注 本問のように**過不足があるときは不等式を用いる**ことになるが，この原則を使いこなすには“慣れ”が必要である．

18-1　(1)　$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおく．自然対数をとると，$\log f(x)=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$

$\log(1+x)=h$ とおくと，$x=e^h-1$，$h\to 0\ (x\to 0)$ であるから

$$\lim_{x\to 0}(\log f(x))=\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1 \qquad \therefore\quad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\log f(x)}=\boldsymbol{e}$$

(2)　$\dfrac{1}{n}=x$ とおくと，(1)より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\boldsymbol{e}$$

(3)　$\dfrac{a}{n}=x$ とおくと，(1)より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^a=\boldsymbol{e^a}$$

18-2　(1)　各砂粒が区間 $[0,\ 1)$ に落ちる確率は $\dfrac{1}{n}$，それ以外の区間に落ちる確率は

$1-\dfrac{1}{n}$ であるから

$$P_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\boldsymbol{1}$$　⬅ k は一定であることに注意！

これをヒントとみると

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

右辺の最終因子は，演習問題 18-1 (3)の $a=-1$ の場合であるから

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=1\cdot\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot e^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{k!e}}$$

19　(1)　$y'=2\sin x\cos x\cdot\cos x+\sin^2 x(-\sin x)$

$$=2\sin x(1-\sin^2 x)-\sin^3 x=\boldsymbol{2\sin x-3\sin^3 x}$$

(2)　$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\boldsymbol{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$$

(3)　$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

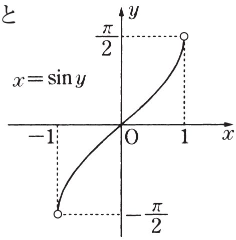
(4)　$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sin x}}$$

(5)　$y=x^a$ の自然対数をとり，$\log y=a\log x$．x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{a}{x} \qquad \therefore\quad y'=\frac{a}{x}y=\boldsymbol{ax^{a-1}}$$

(6) $y=x^x$ の自然対数をとり，$\log y=x\log x$．x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\log x+1 \qquad \therefore \quad y'=\boldsymbol{x^x(\log x+1)}$$



(7) $x=\sin y\ \left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

20
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+(\sin\theta+\theta\cos\theta)=\theta\cos\theta\\[2mm] \dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-(\cos\theta-\theta\sin\theta)=\theta\sin\theta\end{cases}$$

ゆえに，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\boldsymbol{\tan\theta}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\theta\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{1}{\theta\cos^3\theta}}$$

注 曲線の形については，演習問題 **29** を参照せよ．

21-1 $f(0)=0$，かつ $f'(0)$ が存在するから

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$$

21-2 (1) 前問の考え方を使って微分係数の定義に帰着させる．

$f(x)=\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$ とおくと，$f(0)=0$ だから

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$f'(x)=\dfrac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\dfrac{a^x\log a+b^x\log b+c^x\log c}{3}$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=\frac{\log a+\log b+\log c}{3}=\boldsymbol{\log\sqrt[3]{abc}}$$

(2) (1)より

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=e^{\log\sqrt[3]{abc}}=\boldsymbol{\sqrt[3]{abc}}$$

22 (1) 区間 $(0,\ 1)$ において，つねに $f(x)=x$ であるとする．$f(0)=0$，$f(1)=1$ と合わせて区間 $[0,\ 1]$ で $f(x)=x$，したがって　$f'(x)=1$．

これは $f'(x)$ が定数でないことに反する．

(2) $f(a)>a$ なる a が $(0,\ 1)$ に存在するとき

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=f'(b),\ 0<b<a$$

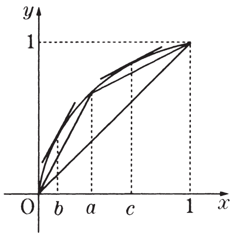
なる b が存在し，

$f(a)>a>0$ より $f'(b)>1$．すなわち，$f'(b)>1$ なる b が $(0,\ 1)$ に存在する．また，

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{1-f(a)}{1-a}=f'(c),\ a<c<1$$

なる c が存在し，$f(a)>a$ より，$1-f(a)<1-a$，かつ $1-a>0$ であるから，$f'(c)<1$．すなわち，$f'(c)<1$ なる c が $(0,\ 1)$ に存在する．

$f(a)<a$ なる a が $(0,\ 1)$ に存在するときも同様である．



23-1 $f(x)=x+a\cos x\ (a>1)$

$$f'(x)=1-a\sin x=a\left(\frac{1}{a}-\sin x\right)$$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$0<\dfrac{1}{a}<1$ ゆえ，$\sin\alpha=\dfrac{1}{a}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ なる α がただ1つ存在し，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ において表のように増減する．

極小値：$f(\pi-\alpha)=\pi-\alpha-a\cos\alpha=0$ より，$\alpha+a\cos\alpha=\pi$ であるから

極大値：$f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha=\boldsymbol{\pi}$

23-2 (1) $f'(x)=\dfrac{-4x^2+2ax+4}{(x^2+1)^2}$．分子$=0$ の2解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$ とおいて増減を調べると，$x=\beta$ で極大となる．よって

$$-4\beta^2+2a\beta+4=0,\quad \frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=1$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\beta^2-a\beta-2=0,\quad a=-\beta^2+4\beta-1$$

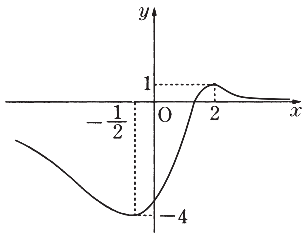
a を消去して解くと，$\beta=2$

$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$

(2) $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1},\quad f'(x)=\dfrac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$

そこで，増減を調べて，$\displaystyle\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$ に注意するとグラフは図のようになる．

$\therefore\ \boldsymbol{-4\leqq f(x)\leqq 1}$



24 $y'=-\dfrac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}x}\sin x+e^{-\frac{3}{4}x}\cos x$

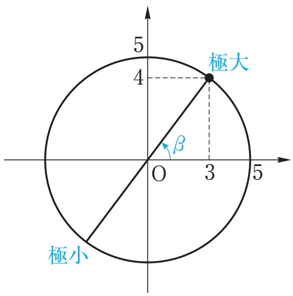
$$=-\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}x}(3\sin x-4\cos x)$$

$$=-\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{4}x}\sin(x-\beta)$$

$\sin(x-\beta)$ の係数が負であることに注意すると y が極小となるのは

$$x=\beta+(2n+1)\pi\quad(n\text{ は整数})$$

となるときである．ゆえに



$$\tan\alpha=\tan\{\beta+(2n+1)\pi\}=\tan\beta=\frac{4}{3}$$

$$\sin\alpha=\sin\{\beta+(2n+1)\pi\}=-\sin\beta=-\frac{4}{5}$$

25 (1) $f(x)=e^{ax}\sin ax$

$$f'(x)=ae^{ax}\sin ax+ae^{ax}\cos ax=ae^{ax}(\sin ax+\cos ax)$$
$$=\sqrt{2}\,ae^{ax}\sin\left(ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

同様にして

$$f''(x)=\boldsymbol{2a^2e^{ax}\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)}$$

(2) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ のとき $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$ であるから，$x=\frac{\pi}{4}$ で極小値をとる条件は，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ かつ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$，すなわち

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad\cdots\cdots\text{①},\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{2}\right)>0 \quad\cdots\cdots\text{②}$$

①より，$\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{4}=m\pi \quad \therefore\ a=4m-1 \quad\cdots\cdots$③

②より，$2n\pi<\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{2}<(2n+1)\pi \quad \therefore\ 8n-2<a<8n+2 \quad\cdots\cdots$④

ただし，m，n は整数である．③を④に代入すると

$$8n-2<4m-1<8n+2 \quad \therefore\ 2n-\frac{1}{4}<m<2n+\frac{3}{4}$$

したがって，$m=2n$ となるから，求める a は

$\boldsymbol{a=8n-1}$ （**n は整数**）

26-1 (1) $y=xe^{-x}$ より，

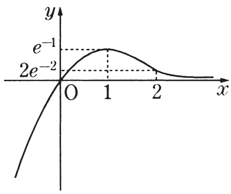
$y'=(1-x)e^{-x}$

$y''=(x-2)e^{-x}$

さらに，

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘	0



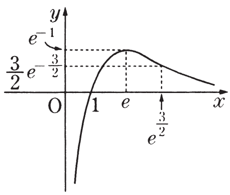
(2) $y=\frac{\log x}{x}$ より，$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$，$y''=\frac{2\log x-3}{x^3}$

$y\to-\infty\ (x\to+0)$，

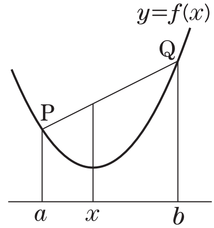
$\log x=t$ とおくと，

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

x	$+0$	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	0



26-2 P, Q の x 座標をそれぞれ a, b $(a<b)$ とし



$$F(x)=\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}-f(x)$$

とおくと，証明すべきことは

$$f''(x)>0 \Longrightarrow F(x)>0\ (a<x<b)$$

である．まず，平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$$

を満たす c が存在する(実はただ1つであることが以下でわかる)から

$$F(x)=\{f'(c)(x-a)+f(a)\}-f(x)$$

と表せる．

$$F'(x)=f'(c)-f'(x),\ F''(x)=-f''(x)<0\ (a<x<b)$$

したがって，$F'(x)$ は単調に減少し，$F'(c)=0$ である．

$$\therefore\ \begin{cases} F'(x)>0\ (a<x<c) \\ F'(x)<0\ (c<x<b) \end{cases}$$

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$F'(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$	0	↗		↘	0

ゆえに，$F(x)$ は表のように増減するから

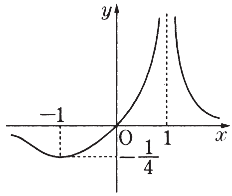
$$F(x)>0\ (a<x<b)$$

27 (1) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to1}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=0$

すなわち，直線 $x=1$ と x 軸は漸近線である．

$$y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

も考えてグラフは右図．



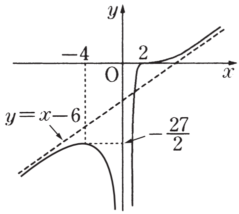
(2) $y=\dfrac{(x-2)^3}{x^2}=x-6+\dfrac{12x-8}{x^2}$ より

$$\lim_{x\to0}y=-\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-6)\}=0$$

ゆえに，y 軸と直線 $y=x-6$ は漸近線．また

$$y'=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x^3}$$

も考えてグラフは右図．



28-1 $f(x)=cx^{\frac{3}{2}}$，$g(x)=\sqrt{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{3c}{2}\sqrt{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=g(x)$，$x\neq0$ より，$x=\dfrac{1}{c}$．ゆえに，点Pでの $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接線が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α，$\beta\,(\alpha>\beta>0)$ とすれば

$$\tan\alpha=f'\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{3\sqrt{c}}{2},\quad \tan\beta=g'\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{\sqrt{c}}{2}$$

$\alpha-\beta=30^\circ$ より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{c}}{1+\dfrac{3c}{4}}=\frac{4\sqrt{c}}{4+3c}$$

$\therefore\quad 3c-4\sqrt{3}\sqrt{c}+4=(\sqrt{3c}-2)^2=0 \qquad \therefore\quad c=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

28-2 2曲線 $y=cx^2$ と $y=\log x$ は，$\mathrm{P}(a,\ b)$ において接線を共有するから

$$b=ca^2 \quad\cdots\cdots①,\qquad b=\log a \quad\cdots\cdots②,\qquad 2ca=\frac{1}{a}\quad\cdots\cdots③$$

①と③より，$b=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$．②より，$a=\boldsymbol{\sqrt{e}}$．③より，$c=\boldsymbol{\frac{1}{2e}}$

29 $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$，$y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=a\theta\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=a\theta\sin\theta$ より，P での法線の方程式は

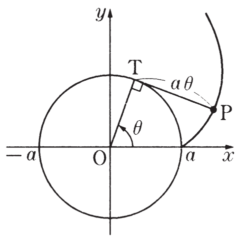
$$a\theta\cos\theta\{x-a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\}+a\theta\sin\theta\{y-a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\}=0$$

$\therefore\quad h：\boldsymbol{x\cos\theta+y\sin\theta=a}$

(2) (原点から法線 h に下ろした垂線の長さ)$=\dfrac{|a|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=a$ となるので，法線 h は円：$x^2+y^2=a^2$ に接する．

注 この曲線 C は，原点を中心とする半径 a の円に糸を巻き，その先端 P を点 $(a,\ 0)$ からほぐすとき，点 P が描く軌跡である．事実，図の θ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+a\theta\begin{pmatrix}\cos(\theta-90^\circ)\\ \sin(\theta-90^\circ)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\\ a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{pmatrix}$$



30 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$ $(\cos\theta\sin\theta\neq 0)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ゆえに，$(x_0,\ y_0)=(a\cos^3\alpha,\ a\sin^3\alpha)$ での接線の方程式は

$$y=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-a\cos^3\alpha)+a\sin^3\alpha \qquad \therefore\quad y=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x+a\sin\alpha$$

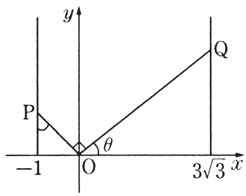
したがって，　$\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ a\sin\alpha)$

$\therefore\quad \mathrm{PQ}^2=a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=a^2 \qquad \therefore\quad \mathrm{PQ}=\boldsymbol{a}$ (一定)

32-1 直線 OQ が x 軸となす角を θ とおくと，

$\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\sin\theta}$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}$ であるから

$$f(\theta)=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$



$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(\tan^3\theta-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

したがって，$f(\theta)$ は右表のように増減し，最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2+3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{8}$$

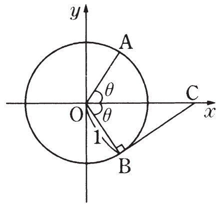
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$		$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

32-2 △OBC において，$\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta$，$\overline{\mathrm{CO}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ であるから

$$L(\theta)=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CO}}=\boldsymbol{2\pi-2\theta+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}}$$
$$L'(\theta)=-2+\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)}{\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$L'(\theta)$ の符号は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ の前後で負から正に変わるから，ここで最小である．最小値は

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}}$$



34-1 $x^p+y^q=1$　$(x>0,\ y>0)$　……①

$z=xy$ と $z^q=x^qy^q$ は同時に最大になる．①より，$y^q=1-x^p\ (0<x<1)$ ゆえ

$$z^q=x^q(1-x^p)\ (=f(x)\ とおく)$$
$$f'(x)=qx^{q-1}(1-x^p)-px^{p-1}x^q$$
$$=x^{q-1}\{q-(p+q)x^p\}$$

$f(x)$ は右表のように増減するので，

x	0	$\cdots$	$\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$$(z\ の最大値)=\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}}=\boldsymbol{\frac{p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p}}}{(p+q)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}}$$

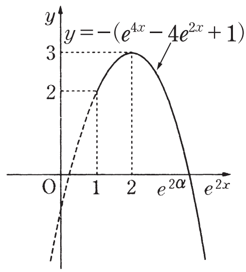
34-2 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3}$ より

$$f'(x)=\frac{-2e^{-2x}(e^{4x}-4e^{2x}+1)}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$f(x)\leqq0\ (x\leqq0)$ ゆえ，$x\geqq0$ で考えれば十分．

$f'(x)=0$ より，$e^{2x}=2+\sqrt{3}$

右図より，$\alpha=\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$ の前後で，$f'(x)$ の符号は正→負となるから，$f(x)$ は $x=\alpha$ で最大となる．



$$e^{\alpha}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\quad e^{-\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad e^{\alpha}+e^{-\alpha}=\sqrt{6},\ e^{\alpha}-e^{-\alpha}=\sqrt{2}$$

よって　$(最大値)=f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{6}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{18}}$

34-3 $\log x \leqq x-1$ $\cdots\cdots$①

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i}$ ← ①を適用する

$\displaystyle\leqq \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{q_i}{p_i}-1\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ ← $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

$\displaystyle\therefore\quad \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$ $\cdots\cdots$②

(2) $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，②より ← ここが急所

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq -\log n \sum_{i=1}^{n} p_i = -\log n$

等号は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ のとき成り立つから，F の最小値は $\boldsymbol{-\log n}$ である．

35-1 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ での接線の方程式は，$\dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = 1$

したがって，両座標軸との交点は，

$\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{b}{\sin\theta}\right)$ $\quad\therefore\quad L(\theta) = \sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2\theta} + \dfrac{b^2}{\sin^2\theta}}$

$\sin^2\theta = t$ $(0<t<1)$ とおくと

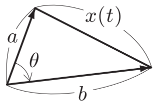
$\{L(\theta)\}^2 = \dfrac{a^2}{1-t} + \dfrac{b^2}{t}$ $(=f(t)$ とする$)$

$f'(t) = \dfrac{a^2}{(1-t)^2} - \dfrac{b^2}{t^2} = \dfrac{\{at+b(1-t)\}\{(a+b)t-b\}}{(1-t)^2t^2}$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{b}{a+b}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$\therefore\quad$ (最小値)$=\sqrt{f\left(\dfrac{b}{a+b}\right)} = \boldsymbol{a+b}$

35-2 時刻 t に短針から長針に向けて測った角を θ とすると



$\theta = \left(2\pi - \dfrac{2\pi}{12}\right)t = \dfrac{11\pi}{6}t$．一方，余弦定理により

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$．両辺を t で微分すると

$$2x\frac{dx}{dt} = 2ab\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{11\pi}{6}\cdot 2ab\sin\theta$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2\frac{\sin^2\theta}{x^2} = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

$\cos\theta = u$ $(|u|\leqq 1)$ とおき，$f(u) = \dfrac{1-u^2}{a^2+b^2-2abu}$ とすると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2 f(u)$$

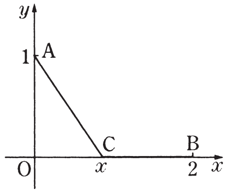
$$f'(u) = \frac{2(au-b)(bu-a)}{(a^2+b^2-2abu)^2}\quad(0<a<b)$$

u	-1	$\cdots$	$\dfrac{a}{b}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗		↘	

ゆえに，$u = \cos\theta = \boldsymbol{\dfrac{a}{b}}$ のとき，

$\left|\dfrac{dx}{dt}\right|$ の最大値$=\dfrac{11\pi ab}{6}\sqrt{f\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \boldsymbol{\dfrac{11\pi a}{6}}$

36　C$(x,\ 0)$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ として，折れ線 ACB 上を運動する場合を考えれば十分である．このときの所要時間を $f(x)$ とすると



$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{2-x}{a}$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{a}=\frac{ax-\sqrt{x^2+1}}{a\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{(a^2-1)\left(x+\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)}{a\sqrt{x^2+1}\left(ax+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} \geqq 2$，すなわち $1<a \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$f'(x) \leqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ であるから

$$(\text{最短時間})=f(2)=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} \leqq 2$，すなわち $a \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$f'(x)$ の符号は $x=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ の前後で負→正となるから

$$(\text{最短時間})=f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{a^2-1}}{a}}$$

37　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a(\cos\alpha-1),\ b\sin\alpha)$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a(\cos\beta-1),\ b\sin\beta)$

$$S=\frac{ab}{2}|(\cos\alpha-1)\sin\beta-\sin\alpha(\cos\beta-1)|$$

$$=\frac{ab}{2}|\sin\alpha-\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)|$$

$$=\frac{ab}{2}|\sin\alpha-\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)|$$

(2)　(1)より，$S=\dfrac{ab}{2}\left|\sin\alpha-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|$

$0<\alpha \leqq \pi$ で α を固定すると，$\sin\alpha \geqq 0$，かつ

$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\dfrac{\alpha}{2}<\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ であるから，$\beta-\dfrac{\alpha}{2}=\pi$ すなわち $\beta=\dfrac{\alpha}{2}+\pi$ のとき，S の最大値は，$F(\alpha)=\boldsymbol{\dfrac{ab}{2}\left(\sin\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

(3)　$F'(\alpha)=\dfrac{ab}{2}\left(\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$$=ab\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$F'(\alpha)$		$+$		$-$	
$F(\alpha)$		↗		↘	

$$\therefore\quad (F(\alpha)\text{ の最大値})=F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}ab}$$

38　(1)　$f(x)=\tan x-x$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって，$f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$ だから，$f(x)>0$．ゆえに

$$x<\tan x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)　$g(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

したがって，$g(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．

(i)　$x\geqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x+\sqrt{1+x^2}>x+\sqrt{x^2}=2x$ より，$g(x)>\log 2x$．よって

$$g(x)\geqq g\left(\frac{\pi}{2}\right)>\log\pi>\log e=1\geqq\sin x$$

(ii)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$h(x)=g(x)-\sin x$ とおくと

$$h'(x)=g'(x)-\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\cos x$$

⬅ $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ を使うと(1)との関係がつく

ここで，(1)より

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

であるから，$h'(x)>0$．さらに，$h(0)=g(0)=0$ であるから

$$g(x)>\sin x$$

(i)，(ii)より，$\log(x+\sqrt{1+x^2})>\sin x$ $(x>0)$ となる．

39　(1)　$\log x=t$ $(x=e^t)$ とおくと，$P=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{\frac{t}{n}}}$

さらに，$\dfrac{t}{n}=s$ とおくと，$P=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{ns}{e^s}=n\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s}{e^s}=\mathbf{0}$

(2)　$-\log x=t$ $(x=e^{-t})$ とおくと，$Q=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t}{e^{\frac{t}{n}}}$

さらに，$\dfrac{t}{n}=s$ とおくと，$Q=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{-ns}{e^s}=-n\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s}{e^s}=\mathbf{0}$

40　$y=e^x$ の $x=t$ での接線 $y=e^t(x-t)+e^t$ が，点 $(a,\ b)$ を通る条件は

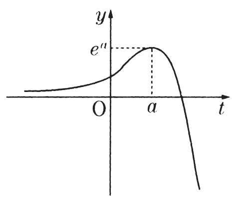
$$b=e^t(a-t)+e^t \quad (=f(t) \text{ とおく})$$

したがって，点 $(a,\ b)$ から引きうる接線の本数は，t の方程式 $b=f(t)$ の異なる実数解の個数に等しい．$f(t)=(a-t+1)e^t$ より

$$f'(t)=(a-t)e^t,\qquad \lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$$

$t=-u$ とおくと

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{u\to\infty}\frac{a+u+1}{e^u}=0$$



$y=f(t)$ と $y=b$ の共有点の数を調べて

$b>e^a$ のとき，0 本；　$0<b<e^a$ のとき，2 本
$b=e^a$ または $b\leqq 0$ のとき，1 本

41-1　(1)　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$　$(x>0)$　右側の不等式だけを示す．

$f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}>0$

かつ $f(0)=0$ であるから，$f(x)>0$ $(x>0)$

(2)　(1)の不等式で $x=0.1$ とおくと

$$0.095=0.1-\frac{0.01}{2}<\log 1.1<0.1-\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}=0.095\dot{3}$$

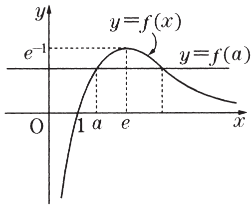
よって，**0.095**

41-2　(1)　$\log x<\sqrt{x}$　$(x>0)$ より，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　$(x>1)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ゆえ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$．グラフの概形は，演習問題 **26-1** (2)参照．

(2)　$a^x=x^a \iff x\log a=a\log x$

$$\iff \frac{\log a}{a}=\frac{\log x}{x}\quad (=f(x)\ とおく)$$



$y=f(x)$ と $y=f(a)$ の共有点の個数を調べて，

$0<a\leqq 1$ または $a=e$ のとき，1 個
$1<a<e$ または $a>e$ のとき，2 個

(3)　$f(x)$ は $x\geqq e$ で減少し，$\pi>e$ であるから

$$\log e^{\pi}-\log\pi^{e}=\pi\log e-e\log\pi=\pi e\left(\frac{\log e}{e}-\frac{\log\pi}{\pi}\right)>0$$

$\therefore$　$\boldsymbol{e^{\pi}>\pi^{e}}$

42　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{1}$

$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$　より，$f'(\pi)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\pi}}$

$f'(x)$ の符号は，$g(x)=x\cos x-\sin x$ の符号と一致する．

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0\quad (0<x<\pi)$$

よって，$g(x)$ は減少し，$g(0)=0$ であるから，$g(x)<0$

$\therefore$　$\boldsymbol{f'(x)<0\ (0<x\leqq\pi)}$

(2)　差をとって微分する方法は十分練習したので，ここでは $\sin x\leqq x$ $(x\geqq 0)$ を認めて，標問 **76** で学ぶ基本事項：

$$f(x)\leqq g(x)\ (a\leqq x\leqq b)\ ならば\ \int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$

をもとに積分を用いて証明する．

$$\int_0^x \sin t\,dt\leqq\int_0^x t\,dt\qquad \therefore\ 1-\cos x\leqq\frac{x^2}{2}\qquad \therefore\ 1-\frac{x^2}{2}\leqq\cos x\leqq 1$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt\leqq\int_0^x\cos t\,dt\leqq\int_0^x dt$

$\therefore$　$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x$　　　　………①

ゆえに　$\displaystyle\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{6}\right)dt \leqq \int_0^x \sin t\,dt \leqq \int_0^x t\,dt$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24} \leqq 1-\cos x \leqq \dfrac{x^2}{2}$

$\therefore\ 1-\dfrac{x^2}{2} \leqq \cos x \leqq 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ………②

(3)　$g(x)=x\cos x-\sin x$ を①，②を用いて評価する．

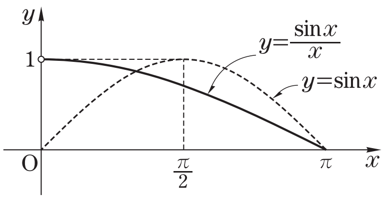
$$x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-x \leqq g(x) \leqq x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$$

$$-\frac{x^3}{2} \leqq g(x) \leqq -\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{24}$$

$$-\frac{x}{2} \leqq f'(x)=\frac{g(x)}{x^2} \leqq -\frac{x}{3}+\frac{x^3}{24}$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)=\mathbf{0}$

以上から，$y=\dfrac{\sin x}{x}$ $(0<x\leqq\pi)$ のグラフの概形は次図．



43　a を変数とみて，$f(x)=2^{c-1}(x^c+b^c)-(x+b)^c$ $(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=c\{(2x)^{c-1}-(x+b)^{c-1}\}$$

x	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$c>1$ ゆえ，$f'(x)$ の符号は $2x-(x+b)=x-b$ の符号と一致する．ゆえに，

$$f(x) \geqq f(b)=2^{c-1}\cdot 2b^c-(2b)^c=0$$

$\therefore\ f(a)=2^{c-1}(a^c+b^c)-(a+b)^c \geqq 0$ **(等号は $\boldsymbol{a=b}$ のとき成立)**

注　不等式の両辺を b^c で割って，

$\left(\dfrac{a}{b}+1\right)^c \leqq 2^{c-1}\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^c+1\right\}$ とし，$\dfrac{a}{b}$ を変数とみて証明してもよい．

44　$f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+ax^3-\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{x^2\{3ax-(1-3a)\}}{1+x}$

$a \leqq 0$ のとき，$f'(x)<0$ $(x>0)$，$f(0)=0$ ゆえ不適．

$0<a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$f'(x)<0$ $\left(0<x<\dfrac{1-3a}{3a}\right)$，$f(0)=0$ ゆえ不適．

$a \geqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$f'(x)>0$ $(x>0)$，$f(0)=0$ ゆえつねに $f(x) \geqq 0$

$\therefore\ \boldsymbol{a \geqq \dfrac{1}{3}}$

45　(1)　$g(x)=x-f(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$ とおく．$g'(x)=1+\frac{1}{2}\sin x \geqq \frac{1}{2}$ より

$g(x)$ は単調増加で，$g(0)=-\frac{1}{2}<0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$ となるから，$g(x)=0$，すなわち $x=f(x)$ はただ1つの解をもつ．

(2)　$x=y$ のときは明らかであるから，$x \neq y$ とする．平均値の定理（標問 **22**）より

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ を満たす c が，x と y の間に存在する．$f'(c)=-\frac{1}{2}\sin c$ ゆえ，

$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{2}|\sin c||x-y| \leqq \frac{1}{2}|x-y|$

(3)　(1)の解を α とする．$a_n=f(a_{n-1})$ と $\alpha=f(\alpha)$ の差をとり(2)を用いると

$$0 \leqq |a_n-\alpha|=|f(a_{n-1})-f(\alpha)| \leqq \frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$$

ゆえに，$a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$

46　t 秒後の綱の長さを y，船と岸壁の距離を x とおくと

$$y=58-4t, \quad x^2=y^2-30^2 \qquad \cdots\cdots①$$

ゆえに，$t=2$ のとき，$y=50$，$x=40$．①を t で微分すると

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}=-8y \qquad \therefore \quad x\frac{dx}{dt}=-4y \qquad \cdots\cdots②$$

さらに t で微分して

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x\frac{d^2x}{dt^2}=-4\frac{dy}{dt}=16 \qquad \therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{x}\left\{16-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} \qquad \cdots\cdots③$$

②，③で $t=2$ とおくと

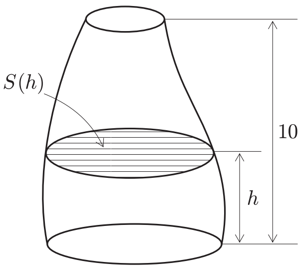
$$\frac{dx}{dt}=-4\cdot\frac{50}{40}=\mathbf{-5\ m/s}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{16-(-5)^2}{40}=\mathbf{-\frac{9}{40}\ m/s^2}$$

47-1　水を注入しはじめてから時間 t が経過したときの水面の高さを h，水面の面積を $S(h)$，容器の中の水の量を V とすると

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=vt$$

これを t で微分して，$S(h)\frac{dh}{dt}=v$．ここで，条件より

$\frac{dh}{dt}=\frac{\sqrt{2+h}}{\log(2+h)}$ であるから，$S(h)=v\frac{\log(2+h)}{\sqrt{2+h}}$．



$$S'(h)=v\frac{\frac{1}{2+h}\sqrt{2+h}-\log(2+h)\frac{1}{2\sqrt{2+h}}}{2+h}$$

$$=v\frac{2-\log(2+h)}{2(2+h)\sqrt{2+h}}$$

h	0	$\cdots$	e^2-2	$\cdots$	10
$S'(h)$		$+$		$-$	
$S(h)$		↗		↘	

よって，$S(h)$ は右表のように増減し，$h=\boldsymbol{e^2-2}$ のとき最大となる．

47-2 (1) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$(\text{速さ})=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\left|\frac{dx}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

ゆえに，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\mathbf{1}$

よって，$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=t+C$

$t=0$ のとき $x=0$ であるから，$C=0$

$$\therefore\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=t$$

$$\therefore\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}=\sqrt{1+t^2}$$

(標問 **35** 参照)

辺々加えて，$e^x=t+\sqrt{1+t^2}$

$$\therefore\quad x=\boldsymbol{\log(t+\sqrt{1+t^2})}$$

(2) $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ での接線は，$Y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}(X-x)+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$Y=0$ とおくと，(1)より

$$X=x-\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\log(t+\sqrt{1+t^2})-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}$ となるから，$t=2$ のとき，$\left|\dfrac{dX}{dt}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **毎秒**

第3章 積分法とその応用

50 (1)　$$与式=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

(2)　$$与式=\frac{1}{2}\int_0^1\{\log(1+x^2)\}'\log(1+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\{\log(1+x^2)\}^2\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\log 2)^2}$$

51 (1)　$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

とおいて a，b，c を定めると，$a=1$，$b=-1$，$c=1$．ゆえに

$$与式=\int_{-1}^0\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right\}dx$$

$$=\left[\log|x-1|-\log|x-2|-\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^0$$

$$=\left[\log\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^0$$

$$=\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\log\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}$$

(2)　$$\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

とおいて a，b，c を定めると，$a=3$，$b=-2$，$c=0$．ゆえに

$$与式=\int_0^1\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\Big[3\log(x+1)-\log(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$=3\log 2-\log 2=\boldsymbol{2\log 2}$$

52　$e^x=t$ とおくと，$x=\log t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$，すなわち $dx=\dfrac{1}{t}dt$ だから

$$与式=\int\frac{1}{t^2+3t+2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt$$

← $\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t+1}+\dfrac{c}{t+2}$ とおいて a，b，c を定める

$$=\int\left\{\frac{1}{2t}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2(t+2)}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\log t-\log(t+1)+\frac{1}{2}\log(t+2)+C$$

← $t>0$

$$=\log\frac{\sqrt{t(t+2)}}{t+1}+C$$

$$=\boldsymbol{\log\frac{\sqrt{e^x(e^x+2)}}{e^x+1}+C}$$

53 (1) 与式$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx=\left[x^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$=-\left\{\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

$$=-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ 与式$=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3-\dfrac{\pi}{8}=\boldsymbol{\dfrac{\pi(\pi^2-6)}{48}}$

(2) 与式$=\displaystyle\int_0^1 (x)'\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

$$=\Big[x\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^1-\int_0^1 x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

⬅ $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1}$$

54 (1) $A=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi} e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$$=\left[\frac{1}{2}e^x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$$

において，$B=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$ とおくと

$$B=\left[e^x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin 2x\,dx$$

⬅ 右辺第 1 項は 0

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left[e^x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{e^{\pi}-1}{4}-\frac{1}{4}B \qquad \therefore\quad B=\frac{e^{\pi}-1}{5}$$

ゆえに

$$A=\frac{e^{\pi}-1}{2}-\frac{e^{\pi}-1}{10}=\boldsymbol{\frac{2(e^{\pi}-1)}{5}}$$

(2) (1)より，$A>8$ は

$$e^{\pi}>21$$

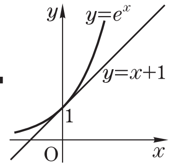
と同値である．$y=e^x$ の $x=0$ での接線を考えると

$$e^x \geqq 1+x$$

が成り立つから，これを用いて近似計算すると

$$\begin{aligned} e^{\pi} &> e^3 \cdot e^{0.14} \\ &> (2.71)^3 \cdot (1.14) \\ &= 22.6\cdots \end{aligned}$$

ゆえに，$A>8$ である．



← $(2.7)^3 \cdot (1.1)$ でも十分

注 もし接線でもダメなら標問 **39** (1)の不等式を使う．それでもダメなら標問 **39** 研究 の不等式による．これを無限にくり返して近似精度をどんどん上げていくと，ついには等号が成り立つと予想される．

55-1 $\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，研究 で述べたことより，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

$d\theta=\dfrac{2}{1+t^2}dt$，$\theta:\dfrac{\pi}{3}\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t:\dfrac{1}{\sqrt{3}}\to 1$ であるから

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{t}dt$$

$$=\Big[\log t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=-\log\frac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3}$$

55-2 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

← 指示された置換では原始関数が求まらない特殊な積分．演習問題 55-1 の方法を適用できるが，計算は大変

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

よって，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ とおくと，$I=J$ かつ

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\quad I=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

56-1 $b_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

において，$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$b_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n t(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=a_n$$

したがって，標問 **56** (2)と同じ結果を得る．

56-2 (1) $I_{n+2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan^2 x+1)\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan x)'\,dx$$

$$=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

(2) (1)より，$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$ かつ

$I_0=\dfrac{\pi}{4}$，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\log 2$ であるから，

$$I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2}$$

$$I_6=\frac{1}{5}-I_4=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}-I_2\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+(1-I_0)=\boldsymbol{\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}}$$

57 (1) $\displaystyle\int_0^m e^{-x}x^n\,dx=\Big[-e^{-x}x^n\Big]_0^m-\int_0^m(-e^{-x})\cdot nx^{n-1}\,dx$

$$=-e^{-m}m^n+n\int_0^m e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$m\to\infty$ とするとき，$e^{-m}m^n\to 0$ であるから，$F(n)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ が存在すれば，$F(n+1)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ も存在して，$F(n+1)=nF(n)$ が成り立つ．

(2) $F(1)=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_0^m e^{-x}\,dx=\lim_{m\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^m=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^m}\right)=1$ であるから，(1)より，

$F(2)$ も存在して，$F(2)=1F(1)=1$

以下同様にして，

$$F(3)=2F(2)=2!,\ F(4)=3F(3)=3!,\ \cdots,\ F(n+1)=n!$$

58 $\displaystyle\int_\alpha^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_\alpha^0 f(x)\,dx+\int_0^{np}f(x)\,dx+\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx$

$$=-\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx+\int_0^{np}f(x)\,dx$$

右辺第 2 項で，$x-np=t$ とおくと

$$\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_0^\alpha f(t+np)\,dt=\int_0^\alpha f(t)\,dt=\int_0^\alpha f(x)\,dx$$

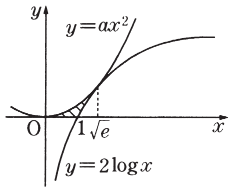
$$\therefore\ \int_\alpha^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_0^{np}f(x)\,dx$$

59-1 (1)　2 曲線が $x=t$ で接するとすると

$$2\log t = at^2,\quad \frac{2}{t} = 2at$$

$at^2=1$ より，$t=\sqrt{e}$

$$\therefore\quad a=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}},\qquad \text{接点}\ (\sqrt{\boldsymbol{e}},\ \mathbf{1})$$



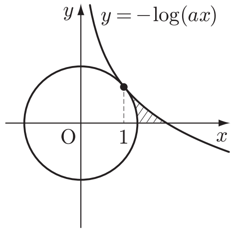
(2)　$S=\displaystyle\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{e}\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}2\log x\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^{\sqrt{e}}-2\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}=\frac{\mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{e}}}{\mathbf{3}}-\mathbf{2}$$

59-2 (1)　円の方程式を $y=\sqrt{r^2-x^2}$ とおく．

$y=-\log(ax)$ より，$y'=-\dfrac{a}{ax}=-\dfrac{1}{x}$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$ より，$y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$



両者が $x=1$ で接する条件は

$$-\log a=\sqrt{r^2-1},\quad -1=-\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}$$

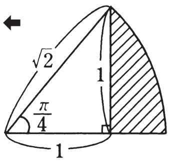
$$\therefore\quad \sqrt{r^2-1}=1,\ \log a=-1$$

$$\therefore\quad r=\sqrt{2},\ a=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}$$

(2)　$S=\displaystyle\int_1^{e}(1-\log x)\,dx-\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$　←

$$=\Big[x-(x\log x-x)\Big]_1^{e}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

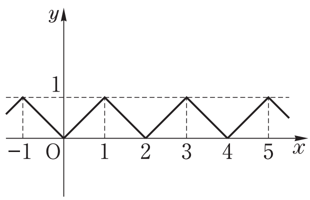
$$=\boldsymbol{e}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$



60 (1)　$|x-1|=\begin{cases}1-x & (x\leqq 1)\\ x-1 & (x\geqq 1)\end{cases}$ より

$$f(x)=1-|x-1|=\begin{cases}x & (0\leqq x\leqq 1)\\ 2-x & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

さらに $f(x)$ は 2 を周期とするから，グラフは右図のようになる．



(2)　$S_n=\displaystyle\int_{2n-2}^{2n}e^{-2x}f(x)\,dx$ において，$x-(2n-2)=t$ とおくと

$$S_n=\int_0^2 e^{-2(t+2n-2)}f(t+2n-2)\,dt$$

$$=e^{-4n+4}\int_0^2 e^{-2t}f(t)\,dt$$

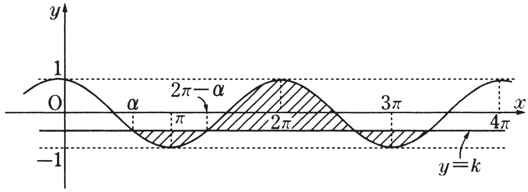
← $f(x)$ は 2 を周期とするから $f(t+2n-2)=f(t)$

ここで

$$\int_0^2 e^{-2t}f(t)\,dt=\int_0^1 te^{-2t}dt+\int_1^2(2-t)e^{-2t}dt$$
$$=\left[t\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)dt+\left[(2-t)\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2\left\{-\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right\}dt$$
$$=-\frac{e^{-2}}{2}+\left[-\frac{e^{-2t}}{4}\right]_0^1+\frac{e^{-2}}{2}+\left[\frac{e^{-2t}}{4}\right]_1^2$$
$$=\frac{1-e^{-2}}{4}+\frac{e^{-4}-e^{-2}}{4}=\frac{e^{-4}-2e^{-2}+1}{4}$$
$$\therefore\quad S_n=\frac{\boldsymbol{(e^{-2}-1)^2}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{(e^{-4})^{n-1}}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{(e^{-2}-1)^2}{4}\cdot\frac{1}{1-e^{-4}}=\frac{(e^2-1)^2}{4(e^4-1)}=\frac{\boldsymbol{e^2-1}}{\boldsymbol{4(e^2+1)}}$

61 $\cos\alpha=k$ $(0<\alpha<\pi)$ とすると，



$$S=2\left\{\int_\alpha^{2\pi-\alpha}(k-\cos x)\,dx-\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}(k-\cos x)\,dx\right\}$$
$$=2\left\{\Big[kx-\sin x\Big]_\alpha^{2\pi-\alpha}-\Big[kx-\sin x\Big]_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\right\}$$
$$=(4\pi-6\alpha)k+6\sin\alpha=(4\pi-6\alpha)\cos\alpha+6\sin\alpha$$
$$\therefore\quad \frac{dS}{d\alpha}=-6\cos\alpha-(4\pi-6\alpha)\sin\alpha+6\cos\alpha=6\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\alpha$$

$\sin\alpha>0$ ゆえ，$\dfrac{dS}{d\alpha}$ の符号は $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ の前後で負→正と変化し，S はここで最小となる．このとき，

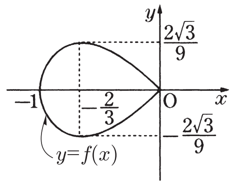
$$k=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$$

62-1 $x=t^2-1$ ……①，　$y=t(t^2-1)$ ……②

$|t|\leqq1$ より $-1\leqq x\leqq0$，①より $t=\pm\sqrt{x+1}$ ……③

②，③より，$y=\pm x\sqrt{x+1}$

$f(x)=x\sqrt{x+1}$ とおく．（もう一方は x 軸に関して対称）



$$f'(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}},\quad \lim_{x\to-1+0}f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-0}f'(x)=1$$

よって，グラフは図のようになる．この曲線が囲む図形の面積は，

$$S=2\int_{-1}^0(-f(x))\,dx=-2\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx$$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x=t^2-1$ であるから

$$S=-2\int_0^1(t^2-1)t\cdot2t\,dt=-4\int_0^1(t^4-t^2)\,dt=-4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{15}}$$

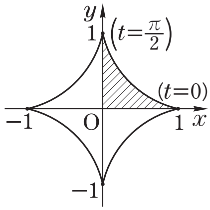
62-2 この閉曲線（標問 **30** 参照）は，両座標軸に関して対称であるから

$$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\,dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)\,dt \quad (\text{標問 } \mathbf{56} \text{ 参照})$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$$



63 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ が x 軸の正の向きとなす角はそれぞれ

$$\frac{\pi}{2}-t,\ \left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\frac{\pi}{2}=\pi-t$$

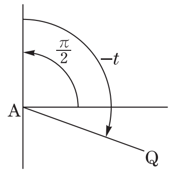
であり，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\overset{\frown}{\mathrm{QB}}=t$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

$$=(0,\ 1)+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)$$

$$+t(\cos(\pi-t),\ \sin(\pi-t))$$

$$=(\boldsymbol{\sin t-t\cos t,\ 1+\cos t+t\sin t})$$



(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ が x 軸に達する点は $(\pi,\ 0)$ である．$x:0\to\pi$ のとき，$t:0\to\pi$ だから，求める面積は

$$S=\int_0^\pi y\,dx=\int_0^\pi y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^\pi (1+\cos t+t\sin t)t\sin t\,dt$$

← $t^2\sin^2 t=t^2\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$=\int_0^\pi\left(t\sin t+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{t^2}{2}\cos 2t+\frac{t^2}{2}\right)dt$$

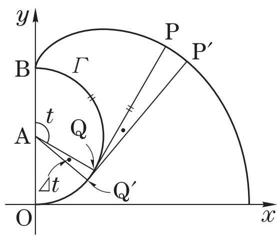
部分積分法を用いて各項ごとに積分すると

$$S=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}}$$

別解 t が微小角 Δt だけ変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Q'P'}}$ のなす角は Δt である．したがって，QP が描く図形（QQ′ は円弧 Γ の一部）は，半径 $\mathrm{QP}=t$，中心角 Δt の扇形で近似できる．よって，研究 で説明したことから

$$S=(\Gamma\text{ と }y\text{ 軸が囲む半円})+\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\,dt$$

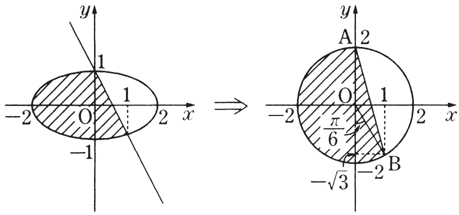
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{6}$$



この方法だと計算量を大幅に軽減することができる．しかし，最初の方針で計算をやりぬく腕力も大切である．

64-1 楕円と直線の交点は

$(0,\ 1),\ \left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



領域を y 軸方向に2倍すると

$2S=$(扇形 OAB)$+$(三角形 OAB)

$=\dfrac{2^2}{2}\cdot\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{2\cdot1}{2}=\dfrac{7\pi}{3}+1$

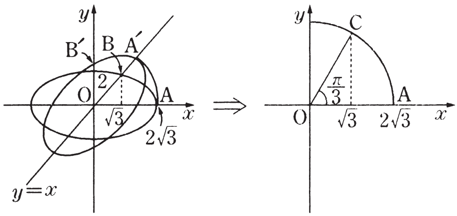
$\therefore\ \ S=\boldsymbol{\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{1}{2}}$

64-2 第1象限にある領域の面積は,

$S=$(扇形 OAA′)$+$(図形 OA′B′)

$=$(扇形 OAA′)$+$(図形 OAB)

図形 OAB を y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍すると扇形 OAC になるので



$S=$(扇形 OAA′)$+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$(扇形 OAC)

$=\dfrac{(2\sqrt{3})^2}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\dfrac{(2\sqrt{3})^2}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right\}$

$=\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\pi}$

65 $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ ……① とおくと, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ……②

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ……③

②, ③より

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\,dt$$

$$=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}+\frac{1}{2}t+C$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}t+C$$

ここで, ①, ③より

$x+\sqrt{x^2+1}=e^t \qquad \therefore\ \ t=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

ゆえに

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}+C}$$

66 (1) $f(x)=\sin x-nx^2+x$ より

$f'(x)=\cos x-2nx+1 \qquad \therefore\ \ f''(x)=-\sin x-2n<0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって，$f'(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で減少して，

$$f'(0)=2>0,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+1<0$$

よって，$f'(\alpha)=0$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なる α がただ1つ存在して，

$f(x)$ は右表のように増減する．このとき

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=1-\frac{\pi^2}{4}n+\frac{\pi}{2} \\ &\leqq 1-2\cdot\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2} \\ &<1-\frac{3^2}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{3}{2}<0 \end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つの解をもつ．

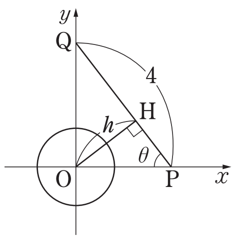
(2) $\sin x_n-nx_n{}^2+x_n=0$ より

$$0<x_n{}^2=\frac{\sin x_n+x_n}{n}<\frac{1}{n}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\to 0\ (n\to\infty)$$

$\therefore\quad x_n\to 0\ (n\to\infty)$

$\therefore\quad nx_n=\dfrac{\sin x_n+x_n}{x_n}=\dfrac{\sin x_n}{x_n}+1\to \mathbf{2}\ (n\to\infty)$

67 図の $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と h に対して



$h=\mathrm{OP}\sin\theta=(4\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore\quad h=2\sin 2\theta$

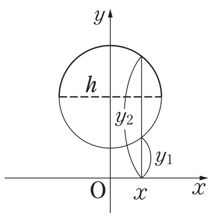
条件より，$h>1$ であるから

$1<h\leqq 2$ ……①

Vは，$x^2+(y-h)^2=1$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積に等しい．

$y=h\pm\sqrt{1-x^2}$

であるから

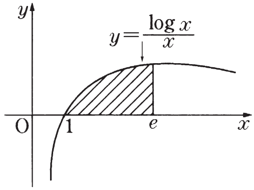


$$\begin{aligned} V&=\pi\int_{-1}^{1}(y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx \\ &=\pi\int_{-1}^{1}\{(h+\sqrt{1-x^2})^2-(h-\sqrt{1-x^2})^2\}\,dx \\ &=4\pi h\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \text{⬅ 積分は上半円板の面積} \\ &=4\pi h\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2 h \qquad \cdots\cdots② \end{aligned}$$

①，②より，$h=2$，つまり $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$ **のとき**

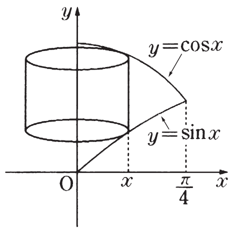
（Vの最大値）$=\mathbf{4\pi^2}$

68-1 グラフは図のようになるから，(演習問題 **26-1** (2))



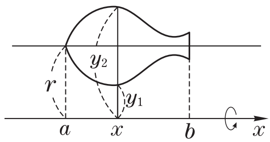
$$V=\pi\int_1^e\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^2dx$$
$$=\pi\left[-\frac{(\log x)^2}{x}\right]_1^e+\pi\int_1^e\frac{2\log x}{x^2}dx$$
$$=-\frac{\pi}{e}+2\pi\left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^e+2\pi\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$$
$$=-\frac{\pi}{e}-\frac{2\pi}{e}+2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=\boldsymbol{\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi}$$

68-2 年輪法による．



$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=2\pi\Big[x(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}-2\pi\Big[\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}-2\pi}$$

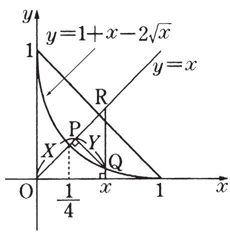
68-3 図で $\dfrac{y_1+y_2}{2}=r$ であるから



$$V=\pi\int_a^b(y_2{}^2-y_1{}^2)dx$$
$$=2\pi\int_a^b\frac{y_1+y_2}{2}\cdot(y_2-y_1)dx$$
$$=2\pi r\int_a^b(y_2-y_1)dx=2\pi rS$$

注 Vは底面がF，高さが$2\pi r$の柱状体の体積と一致する．

69 直円錐の体積Vから，曲線と直線 $x+y=1$ が囲む図形の回転体の体積Wを除く．



$$Y=\frac{\mathrm{QR}}{\sqrt{2}}=\frac{x-(1+x-2\sqrt{x})}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}$$
$$X=\mathrm{OR}-Y=\sqrt{2}\,x-\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad W=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}Y^2dX=\pi\int_{\frac{1}{4}}^1Y^2\frac{dX}{dx}dx$$
$$=\pi\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{(2\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}dx \quad (2\sqrt{x}-1=t\ \text{とおく})$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^1 t^3\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}$$

ゆえに，

$$V-W=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{48}}$$

注 曲線を原点のまわりに $-45°$ 回転すると，放物線の一部 $y^2=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}$，$x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．本問の場合はこれを利用するのもよい方法である．

70 立体の平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ による断面は

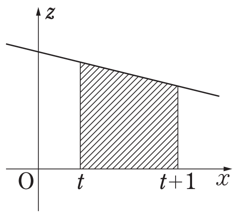
← 複雑な変数を固定すれば断面が簡単になる

$$\begin{cases} t\leqq x\leqq t+1 \\ 0\leqq z\leqq (1-3t)x+3t^2+t+1 \ (=f(x)\ \text{とおく}) \end{cases}$$

$$f(t)=(1-3t)t+3t^2+t+1$$
$$=2t+1>0$$
$$f(t+1)=(1-3t)(t+1)+3t^2+t+1$$
$$=-t+2>0$$

よって，断面は台形でありその面積は

$$\frac{1}{2}\{f(t)+f(t+1)\}=\frac{1}{2}(t+3)$$



ゆえに，求める体積は

$$V=\frac{1}{2}\int_0^1(t+3)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+3\right)=\boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

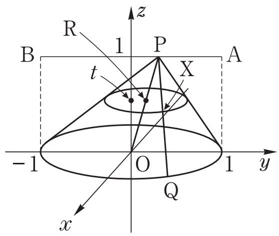
71 Pを固定しQを動かしてできる円錐を K_P とすると，K は K_P の描く立体である．よって，K の $z=t$ による断面は，K_P の断面 C_P の描く図形である．C_P と直線 OP の交点をRとすると

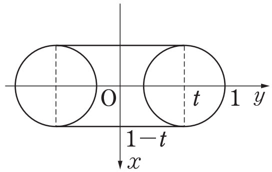
$$\text{OR}:\text{RP}=t:1-t$$

よって，C_P はRを中心とする半径 $1-t$ の円　……(＊)

である．ゆえに

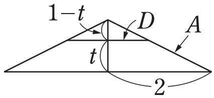
$$S(t)=\pi(1-t)^2+4t(1-t)$$
$$=\boldsymbol{\pi(1-t)^2+4(t-t^2)}$$
$$V=\int_0^1\{\pi(1-t)^2+4(t-t^2)\}dt$$
$$=\frac{\pi}{3}+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi+2}{3}}$$

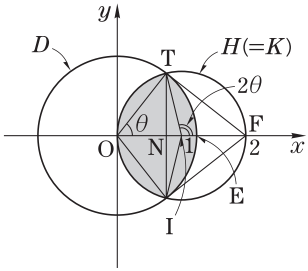




注 とくにQが D の周上を動くとき，直線 PQ と平面 $z=t$ の交点をXとすると，つねに RX$=1-t$ である．よって，(＊) が成り立つ．

72 (1)





円錐 A の平面 $z=t$ による切り口は，半径 $2(1-t)$ の円 D であるから

$$\cos\angle\mathrm{FOT}=\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OF}}=1-t=\cos\theta$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{FOT}=\theta \qquad \therefore\quad \angle\mathrm{FIT}=2\theta$$

ゆえに

$$\begin{aligned}S(t)&=2\{\text{扇形 OET}-\triangle\mathrm{ONT}+(\text{扇形 IOT}-\triangle\mathrm{INT})\}\\&=2(\text{扇形 OET}+\text{扇形 IOT}-\triangle\mathrm{OIT})\\&=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi-2\theta)\right\}\\&=\boldsymbol{4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta}\end{aligned}$$

(2) $1-\cos\theta=t$ であるから，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t)\frac{dt}{d\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta)\sin\theta\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\sin\theta\,d\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)'d\theta\\&=\left[\theta\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\sin\theta\,d\theta&=\Big[(\pi-2\theta)(-\cos\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2)(-\cos\theta)\,d\theta\\&=\pi-2\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

となるので

$$V=\frac{8}{9}+\pi-2-\frac{2}{3}=\boldsymbol{\pi-\frac{16}{9}}$$

73-1 (1) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\quad l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{8}$$

(2) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2=9\sin^2\theta\cos^2\theta$

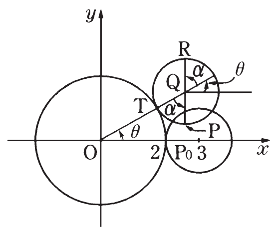
$$\therefore\quad l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\left[6\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{6}$$

73-2 $\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TP_0}}$ より，$\alpha=2\theta$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{QR}}=3\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos 3\theta\\ \sin 3\theta\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\begin{pmatrix}3\cos\theta-\cos 3\theta\\ 3\sin\theta-\sin 3\theta\end{pmatrix}}$$



$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とおくと，$x(-\theta)=x(\theta)$，$y(-\theta)=-y(\theta)$ より，曲線 C は x 軸対称であることに注意する．

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=(-3\sin\theta+3\sin 3\theta)^2+(3\cos\theta-3\cos 3\theta)^2$$

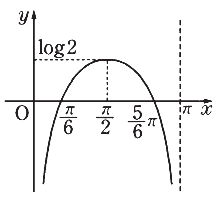
$$=18-18(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)$$

$$=18\{1-\cos(3\theta-\theta)\}=36\sin^2\theta$$

$$\therefore\quad l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=12\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\boldsymbol{24}$$

74-1 $f(x)=\log(2\sin x)$ より，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

したがって，グラフの概形は右図のようになる．



$1+f'(x)^2=1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ より，$y\geqq 0$ の部分の長さ l は

$$l=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{\sin x}\,dx\quad（標問 \mathbf{55}(6)）$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\boldsymbol{2\log(2+\sqrt{3})}$$

74-2 $s(x)=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ とおくと

$$S=\int_0^{s(1)}2\pi x\,ds=\int_0^1 2\pi x\frac{ds}{dx}dx=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{\pi}{6}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi}$$

注 直感的に

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

より，$S=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ としてもよい．

75-1 $\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n-1)(3n)}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}$ より

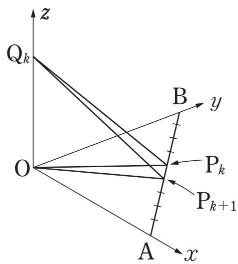
$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1\log(2+x)\,dx-\int_0^1\log(1+x)\,dx=\log\frac{27}{16}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{27}{16}}$$

75-2 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) とする．P_1, P_2, ……, P_{n-1} は線分 BA を n 等分するから



$$\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}=\frac{1}{n}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2n}$$

また，$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=1$ より

$$\mathrm{OQ}_k{}^2=1-\mathrm{OP}_k{}^2$$

$$=1-\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right\}=2\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\quad V_k=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot\mathrm{OQ}_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

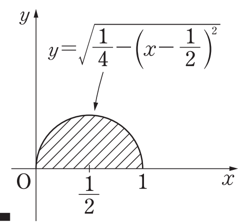
ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{48}\pi}$$



75-3 $\log P_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)$. 標問 **41**，(1)の不等式

$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x\quad(x>0)$ において $x=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}<\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)<\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について各辺の和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}<\log P_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\quad(x=2\sin\theta\ とおく)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-k^2}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n^2-n^2}=\frac{1}{3n}\to 0\ (n\to\infty)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\log P_n=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\boldsymbol{e^{\frac{\pi}{6}}}$

76 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくと

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\qquad\cdots\cdots①$$

(1) $\tan x>0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$I_n>0$ ゆえ，$0<I_n<I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2})$ ⬅ ①で $n=2k$ とおく

$=(I_0+I_2)-(I_2+I_4)+(I_4+I_6)-\cdots+(-1)^n(I_{2n}+I_{2n+2})$

$=I_0+(-1)^nI_{2n+2}=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^nI_{2n+2}$ であるから，(1)より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4}+(-1)^nI_{2n+2}\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}=2\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+2}=2\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k+1}+I_{2k+3})$ ⬅ ①で $n=2k+1$ とおく

$=2\{(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-\cdots+(-1)^n(I_{2n+1}+I_{2n+3})\}$

$=2\{I_1+(-1)^nI_{2n+3}\}$

かつ

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\log 2$ であるから，(1)より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}2\left\{\frac{1}{2}\log 2+(-1)^n I_{2n+3}\right\}=\mathbf{\log 2}$$

77 (1) $1\leqq x\leqq e$ のとき，$0\leqq\log x\leqq 1$ より

$$0\leqq(\log x)^n\leqq 1$$

$$\therefore\quad 0\leqq\int_1^e\frac{1}{n!}(\log x)^n dx\leqq\frac{1}{n!}\int_1^e dx=\frac{e-1}{n!}$$

$$\therefore\quad 0\leqq a_n\leqq\frac{e-1}{n!}$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^e(x)'(\log x)^n dx$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\Big[x(\log x)^n\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=\frac{e}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\int_1^e(\log x)^{n-1}dx$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{e}{n!}-a_{n-1}$$

(3) $a_1=\displaystyle\int_1^e\log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e=1$．また，(2)より

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{e}(a_{n-1}+a_n)$$

であるから

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(a_{k-1}+a_k)$$

$$=\frac{1}{e}\{a_1+a_2-(a_2+a_3)+(a_3+a_4)-\cdots+(-1)^n(a_{n-1}+a_n)\}$$

$$=\frac{1}{e}\{a_1+(-1)^n a_n\}=\boldsymbol{\frac{1}{e}+(-1)^n\frac{a_n}{e}}$$

(1)より，$a_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

78 $\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x\leqq x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$e^{-x}\leqq e^{-\sin x}\leqq e^{-\frac{2}{\pi}x}$

$$\therefore\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}x}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}dx=1-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}>1-\frac{1}{e}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}x}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

ゆえに

$$1-\frac{1}{e}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin x}dx\leqq\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

79 b を変数とみて，$g(t)=\displaystyle\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx\ (a\leqq t\leqq b)$ とおく．

$$g'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,dx-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,dx \quad \cdots\cdots(*)$$

$f(t)$ が微分可能という条件がないので $g''(t)$ は考えられない．そこで

$$g'(t)=\frac{1}{2}\int_a^t f(t)\,dx-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^t (f(t)-f(x))\,dx$$

← x の積分に関して，$f(t)$ は定数とみなせるから，$\int_a^t f(t)\,dx=(t-a)f(t)$

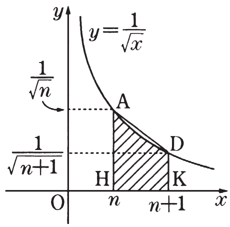
とすると，$f(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で増加するから，
$a\leqq x\leqq t$ より $f(t)\geqq f(x)$．したがって，$g'(t)\geqq 0$．
すなわち，$g(t)$ は単調増加で $g(a)=0$ であるから，

$$g(t)\geqq 0 \ (a\leqq t\leqq b) \qquad \therefore\ g(b)=\int_a^b xf(x)\,dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$$

注 標問 **85** の「積分に関する平均値の定理」を用いてもよい．
$\int_a^t f(x)\,dx=(t-a)f(c)$，$a<c<t$ を満たす c が存在するから，$f(c)\leqq f(t)$ に注意すると，(*) より $g'(t)=\dfrac{t-a}{2}\{f(t)-f(c)\}\geqq 0$．以下同様である．

80-1 (斜線部分)<(台形 AHKD) より

$$\int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$



上式を $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 99$ に対して辺々加えると

$$\int_1^{100}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

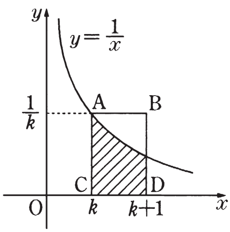
ゆえに $S>\displaystyle\int_1^{100}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{100}}=18+\frac{11}{20}$ となり，
③の左側が改良される．

80-2 (長方形 ABDC)>(斜線部分) より

$\dfrac{1}{k}>\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$．両辺を $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ ゆえ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$



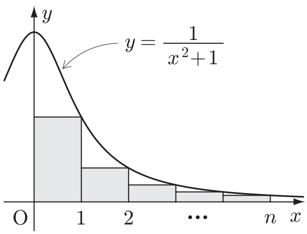
81 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$

であるから，証明すべき不等式は

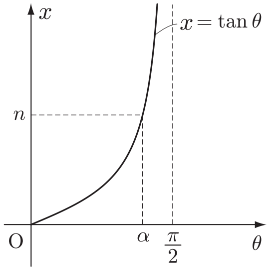
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5} \quad \cdots\cdots①$$

と同値である．右図より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}=(\text{網目部分の面積})<\int_0^n\frac{1}{x^2+1}\,dx$$



定積分において，$x=\tan\theta$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．



$n=\tan\alpha$ とすると，$x:0\to n$ のとき，
$\theta:0\to\alpha$ であるから

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^\alpha\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^\alpha d\theta=\alpha<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}$$

よって，示された．

注 ①を見ると，n に関する数学的帰納法では証明できないことが分かる．

82 (1) $a\leqq0$ のとき，$F(a)=\displaystyle\int_0^1 e^x(x-a)dx=(1-e)a+1$

$0\leqq a\leqq1$ のとき，$F(a)=-\displaystyle\int_0^a e^x(x-a)dx+\int_a^1 e^x(x-a)dx$
$$=2e^a-(e+1)a-1$$

$a\geqq1$ のとき，$F(a)=-\displaystyle\int_0^1 e^x(x-a)dx=(e-1)a-1$

$F(a)$ は $a\leqq0$ で減少し，$a\geqq1$ で増加するから，$0\leqq a\leqq1$ で考えれば十分．

$F'(a)=2e^a-(e+1)$ より，$F'(a)$ の符号は $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ の前後で負→正と変化するから，最小値は，

$$F\left(\log\frac{e+1}{2}\right)=\boldsymbol{e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}}$$

注 答が標問 **82** と一致したのは偶然ではない．標問 **82** で x を a とおくと

$$f(a)=\int_1^e|\log t-a|dt$$

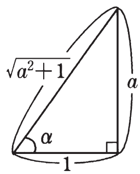
次に $\log t=x$ とおくと，$t=e^x$ より，$dt=e^x dx$ であるから

$$f(a)=\int_0^1|x-a|e^x dx$$

したがって，実は $f(a)=F(a)$ である．

(2) $a\cos\alpha=\sin\alpha$，すなわち $\tan\alpha=a$ を満たす α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在するから

$$g(a)=\int_0^\alpha(a\cos x-\sin x)dx-\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x-\sin x)dx$$
$$=2(a\sin\alpha+\cos\alpha)-1-a \quad \cdots\cdots①$$
$$=2\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}-a-1=2\sqrt{a^2+1}-a-1$$



$$\therefore\quad g'(a)=\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}-1=\frac{3a^2-1}{\sqrt{a^2+1}\,(2a+\sqrt{a^2+1}\,)}$$

$a>0$ において，$g'(a)$ の符号は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の前後で負→正と変化するから，最小値は

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{\frac{1}{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}$$

注 ①の後，変数を α にそろえてもよい．

$$g(a)=2(a\sin\alpha+\cos\alpha)-1-a$$
$$=2(\tan\alpha\sin\alpha+\cos\alpha)-1-\tan\alpha \quad (=G(\alpha)\text{ とおく})$$
$$G'(\alpha)=2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\sin\alpha+\tan\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\right)-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{2\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}$$

ゆえに，$\alpha=\frac{\pi}{6}$，つまり $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で $G(\alpha)$，したがって $g(a)$ は最小となる．

83 $F'(a)=e^{(a+1)^3-7(a+1)}-e^{a^3-7a}$ の符号は，e^x が単調増加であるから

$$(a+1)^3-7(a+1)-(a^3-7a)$$
$$=3(a+2)(a-1)$$

の符号と一致する．ゆえに，$F(a)$ が極大となるのは $a=\mathbf{-2}$ のときである．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(a)$	↗		↘		↗

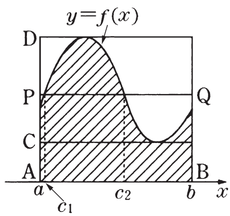
84 被積分関数を奇関数と偶関数に分ける．

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x-ax)+(\cos x-b)\}^2dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x-ax)^2+(\cos x-b)^2\}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2x^2+b^2-2ax\sin x-2b\cos x+1)dx$$
$$=2\left[\frac{a^2}{3}x^3+b^2x+2a(x\cos x-\sin x)-2b\sin x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\pi^3}{12}a^2-4a\right)+(\pi b^2-4b)+\pi$$
$$=\frac{\pi^3}{12}\left(a-\frac{24}{\pi^3}\right)^2+\pi\left(b-\frac{2}{\pi}\right)^2-\left(\frac{48}{\pi^3}+\frac{4}{\pi}\right)+\pi$$

$\therefore\quad a=\boldsymbol{\frac{24}{\pi^3}},\qquad b=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$

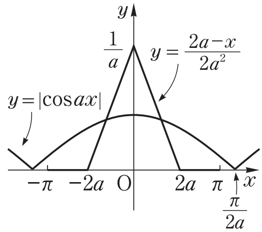
85-1 $a<b$，$f(x)>0$ として説明する．

$\int_a^b f(x)dx$ は斜線部分の面積 S を表す．長方形 ABQP の面積 T は P が C から D まで動くとき，連続的に増加し，P=C のとき，$T<S$；P=D のとき，$T>S$ であるから，$T=S$ なる点 P が C と D の間に存在する．このとき，線分 PQ と連続関数 $y=f(x)$ のグラフは必ず共有点をもつから（複数のこともある），その x 座標を c とすれば，



$$\int_a^b f(x)dx=S=T=(b-a)f(c),\qquad a<c<b$$

85-2 $0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$2a<\pi<\dfrac{\pi}{2a}$ であるから



$$\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)|\cos ax|\,dx=2\int_0^{\pi} f_a(x)|\cos ax|\,dx$$

$$=2\int_0^{2a}\frac{2a-x}{2a^2}\cos ax\,dx=\frac{1-\cos 2a^2}{a^4}$$

$$=2\frac{\sin^2 a^2}{a^4}=2\left(\frac{\sin a^2}{a^2}\right)^2$$

部分積分

$$\therefore\quad \lim_{a\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x)|\cos ax|\,dx=2\lim_{a\to 0}\left(\frac{\sin a^2}{a^2}\right)^2=\mathbf{2}$$

86-1 研究 から

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

となるはずである．

$nx=t$ とおくと

$$I_n=\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|\,dx=\int_0^{n\pi}\left(\frac{t}{n}\right)^2|\sin t|\frac{dt}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\int_0^{n\pi} t^2|\sin t|\,dt=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} t^2|\sin t|\,dt$$

次に，$t-k\pi=u$ とおくと $\sin(u+k\pi)=(-1)^k\sin u$ であるから

$$I_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\sin(u+k\pi)|\,du$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k^2\pi^2+2\pi ku+u^2)\sin u\,du$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin u\,du=2$ であるから，$\displaystyle\int_0^{\pi} u\sin u\,du=a$，$\displaystyle\int_0^{\pi} u^2\sin u\,du=b$ とおくと

$$I_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(2\pi^2k^2+2\pi ak+b)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left\{2\pi^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+2\pi a\frac{n(n-1)}{2}+bn\right\}$$

中括弧の中の各項は，n に関して順に 3 次，2 次，1 次であるから

$$\lim_{n\to\infty} I_n=2\pi^2\cdot\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{2\pi^2}{3}}$$

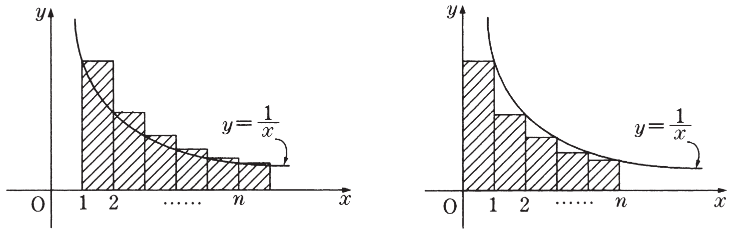
86-2 (1) $\displaystyle I_{k+1}-I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\geqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx=\frac{2}{(k+1)\pi}$

同様に

$$I_{k+1}-I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}\,dx=\frac{2}{k\pi}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{(k+1)\pi}\leqq I_{k+1}-I_k\leqq\frac{2}{k\pi}$$

(2)



$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を図の斜線部分の面積とみると

$$\int_1^n\frac{dx}{x}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\int_1^n\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad \log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\log n$$

(3)　(1)の不等式を $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ について加えると，$I_1=0$ ゆえ

$$\frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)\leqq I_n\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

したがって，(2)より

$$\frac{2}{\pi}(\log n-1)\leqq I_n\leqq\frac{2}{\pi}(\log n+1)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{\log n}\right)\leqq\frac{I_n}{\log n}\leqq\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\log n}=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

87-1　$g(x)=\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt+\frac{e^x}{e-2}\int_0^1 f(t)\,dt$ となるので

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=a \qquad \cdots\cdots①$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt=b \qquad \cdots\cdots②$$

とおくと

$$g(x)=a+\frac{be^x}{e-2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\cos\pi x+\int_0^x\left(a+\frac{be^t}{e-2}\right)dt=\cos\pi x+ax+\frac{b(e^x-1)}{e-2} \qquad \cdots\cdots③$$

③を①，②に代入すると

$$\begin{cases} a=\displaystyle\int_0^1\left\{t\cos\pi t+at^2+\frac{bt(e^t-1)}{e-2}\right\}dt=-\frac{2}{\pi^2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2(e-2)} \\ b=\displaystyle\int_0^1\left\{\cos\pi t+at+\frac{b(e^t-1)}{e-2}\right\}dt=\frac{a}{2}+b \end{cases}$$

$$\therefore\quad a=0,\qquad b=\frac{4(e-2)}{\pi^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=\cos\pi x+\frac{4}{\pi^2}(e^x-1)}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{4}{\pi^2}e^x}$$

87-2 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\sin t\,dt=a_n$ とおくと

$$f_n(x)=\cos x+\frac{1}{4}a_{n-1}x$$

したがって

$$a_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\sin t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t+\frac{1}{4}a_{n-1}t\right)\sin t\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(a_0-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \quad f_n(x)=\boldsymbol{\cos x+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)x}$$

88 (1) 右辺の積分で $x-t=u$ とおくと

$$f(x)=\sin x+\int_x^0 f(u)\sin(x-u)(-du)=\sin x+\int_0^x f(u)\sin(x-u)\,du$$

$$=\sin x+\int_0^x f(u)(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,du$$

$$=\sin x+\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du \qquad \cdots\cdots①$$

$$f'(x)=\cos x+\left\{\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+f(x)\sin x\cos x\right\}$$

$$+\left\{\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du-f(x)\sin x\cos x\right\}$$

$$=\cos x+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du$$

$$\therefore \quad f(0)=\boldsymbol{0}, \qquad f'(0)=\boldsymbol{1}$$

(2) $\displaystyle f''(x)=-\sin x-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du+f(x) \qquad \cdots\cdots②$

①+② より

$$f(x)+f''(x)=f(x)$$

$$\therefore \quad f''(x)=\boldsymbol{0}$$

(3) (2)より，$f'(x)=a$

$$\therefore \quad f(x)=ax+b$$

(1)より，$a=1$，$b=0$

$$\therefore \quad f(x)=\boldsymbol{x}$$

89 $f(x+y)=f(x)f(y)$ ……①

(1) ①で $x=y=0$ とおいて，$f(0)=\{f(0)\}^2$

$\therefore$ $f(0)=0$ または $f(0)=1$

$f(0)=0$ とすると，①で $y=0$ とおくことにより，任意の x に対して

$f(x)=f(x)f(0)=0$ $\therefore$ $f'(0)=0$

これは $f'(0)=a\neq 0$ に反する．

$\therefore$ $\boldsymbol{f(0)=1}$ ……②

(2) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$ ⬅ ①による

$=\dfrac{f(h)-1}{h}f(x)=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}f(x)$ ⬅ ②による

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$ であるから，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=af(x)$

ゆえに，$f(x)$ はすべての x で微分可能で

$f'(x)=af(x)$ ……③

(3) $g(x)=e^{-ax}f(x)$ とおくと，③より

$g'(x)=-ae^{-ax}f(x)+e^{-ax}f'(x)=e^{-ax}\{f'(x)-af(x)\}=0$

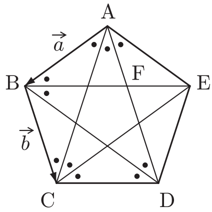
$\therefore$ $g(x)=e^{-ax}f(x)=C$ (一定)

(4) (3)より $f(x)=Ce^{ax}$ となる．②より $C=1$ であるから

$\boldsymbol{f(x)=e^{ax}}$

第4章 平面上のベクトル

90 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-(\vec{a}+\vec{b})$



同じ長さの弧（弦でも同じ）に対する円周角は等しいから

$\angle ACB=\angle CAD\ (=36^\circ)\qquad \therefore\quad AD /\!/ BC$

一方，AD と BE の交点を F とすると，2 つの二等辺三角形 DAB と BAF は相似であるから

$DA:AB=BA:AF$

$AD=x$ とおくと，$FD=FB=AB=1$ であるから

$$x:1=1:(x-1)\qquad \therefore\quad x^2-x-1=0\qquad \therefore\quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}}$

注 計算だけで x を求められる．$\theta=36^\circ$ とおくと，$x=2\cos\theta$，$5\theta=180^\circ$．

$3\theta=180^\circ-2\theta$ より

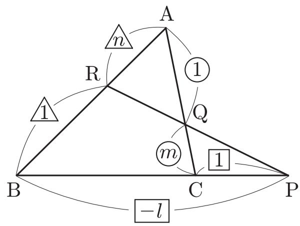
$\sin 3\theta=\sin(180^\circ-2\theta)=\sin 2\theta$，$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta$ で割ると

$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta\qquad \therefore\quad 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\qquad \therefore\quad x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

91-1 (1) $\overrightarrow{AR}=n\overrightarrow{RB}$ より，$\vec{r}=n(\vec{b}-\vec{r})$



$\therefore\qquad \vec{b}=\dfrac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{n}}\vec{r}\qquad\cdots\cdots$①

$\overrightarrow{CQ}=m\overrightarrow{QA}$ より，$\vec{q}-\vec{c}=-m\vec{q}$

$\therefore\qquad \vec{c}=(\boldsymbol{m+1})\vec{q}\qquad\cdots\cdots$②

(2) $\overrightarrow{BP}=l\overrightarrow{PC}$ より，$\vec{p}-\vec{b}=l(\vec{c}-\vec{p})$ だから

$\vec{p}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{l+1}}\vec{b}+\dfrac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l+1}}\vec{c}\qquad\cdots\cdots$③

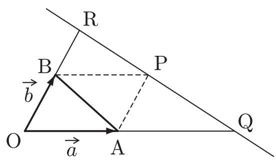
(3) ①，②を③に代入すると，$\vec{p}=\dfrac{n+1}{(l+1)n}\vec{r}+\dfrac{l(m+1)}{l+1}\vec{q}$

⬆(3)で $l<0$，$m>0$，$n>0$ の場合の図

P が直線 QR 上にある条件は，$\dfrac{n+1}{(l+1)n}+\dfrac{l(m+1)}{l+1}=1\qquad \therefore\quad \boldsymbol{lmn=-1}$

注 本問はメネラウスの定理の，ベクトルを用いた証明になっている．うまい補助線を見付ける必要がないことに注目．

91-2 (1) $\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{OR}=y\vec{b}$ より



$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{OQ}+\dfrac{1}{y}\overrightarrow{OR}$

よって，P，Q，R が同一直線上にある条件は

$\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}+\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{1}$

(2) $k=x+y$ とおく．(1)より，$y=\dfrac{x}{x-1}$ ゆえ，$k=x+\dfrac{x}{x-1}$

そこで，$x-1=t\ (>0)$ とおくと，相加平均と相乗平均の不等式より

$$k=t+1+\frac{t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+2\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+2=4$$

等号は，$t=\dfrac{1}{t}$，すなわち $t=1\ (x=y=2)$ のとき成り立つ．ゆえに

$(k$ の最小値$)=\mathbf{4}$

注 $\dfrac{dk}{dx}$ あるいは $\dfrac{dk}{dt}$ を計算して，増減を調べてもよい．

92 (1) CD は ∠C を二等分するから

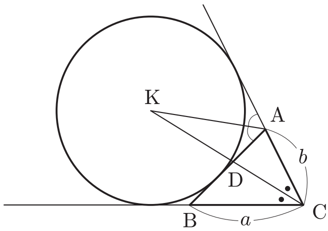
$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\mathrm{CA}:\mathrm{CB}=b:a$ ……①

$\therefore\ \mathrm{AD}=\dfrac{b}{b+a}\mathrm{AB}=\boldsymbol{\dfrac{bc}{a+b}}$

AK は ∠A の外角を二等分するから

$\mathrm{CK}:\mathrm{DK}=\mathrm{AC}:\mathrm{AD}=b:\dfrac{bc}{a+b}=(\boldsymbol{a+b}):\boldsymbol{c}$

……②



(2) ①より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{b+a}$．②より，K は CD を $(a+b):c$ に外分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{-c\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(a+b)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+b-c}=\boldsymbol{\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b-c}}$$

注 単位ベクトルの和を利用する別解を与える．ただし，標問 **93** で学ぶベクトルの1次独立性を先取りして使う．

CK は ∠C を二等分するから，実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=x\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}\right) \quad \cdots\cdots③$$

と表せる．AK は ∠A の外角を二等分するから，実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CK}}&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AK}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+y\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}\right)\\&=\left(1+\frac{y}{b}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{y}{c}(\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}})\\&=\left\{1+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)y\right\}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{y}{c}\overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad \cdots\cdots④\end{aligned}$$

と表せる．$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は1次独立であるから係数を比較して

$$\frac{1}{b}x=1-\frac{b-c}{bc}y,\quad \frac{1}{a}x=\frac{1}{c}y \qquad \therefore\quad x=\frac{ab}{a+b-c}$$

これを③に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{b}{a+b-c}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+\frac{a}{a+b-c}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b-c}$$

94-1 (1) $p=-3,\ q=5$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$k(1,\ -3)+l(3,\ -1)=(5,\ -2)$$

$$\iff \begin{cases} k+3l=5 \\ -3k-l=-2 \end{cases} \qquad \therefore\ k=\frac{1}{8},\ l=\frac{13}{8}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{13}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ p)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -1-p)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(q-3,\ -1)$

$q=3$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ -1)$ は平行でないから，$q\neq3$ である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直な条件は，各々の傾きの積が -1 に等しいことより

$$\frac{-1-p}{2}\cdot\frac{-1}{q-3}=-1 \qquad \therefore\ p=5-2q \qquad \cdots\cdots①$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直なとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が平行なことは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直なことと同値．よって

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{-1-p}{2}=-1$$

$$p^2+p-2=0$$

$$(p+2)(p-1)=0 \qquad \therefore\ p=1,\ -2$$

これらを①に代入して，$(p,\ q)=\boldsymbol{(1,\ 2),\ \left(-2,\ \frac{7}{2}\right)}$

94-2 $\vec{p}=(1-t)(1,\ 1)+t(2,\ -1)$

$$=(1+t,\ 1-2t)$$

よって，

$$|\vec{p}|^2=(1+t)^2+(1-2t)^2=5t^2-2t+2$$

$$=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5} \quad (0\leqq t\leqq1)$$

$|\vec{p}|^2$ は $t=1$ のとき最大値 5 をとり，$t=\frac{1}{5}$ のとき最小値 $\frac{9}{5}$ をとる．

ゆえに，$|\vec{p}|$ の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{5}}$，最小値は $\sqrt{\frac{9}{5}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{5}}}$ である．

注 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，次に学ぶように点Pは線分 AB 上を動く．このことから図形的に解いてもよい．

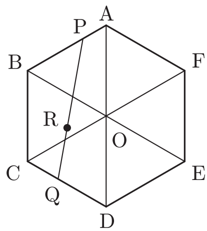
95-1 正六角形の中心をOとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0\leqq t\leqq1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0\leqq s\leqq1)$$



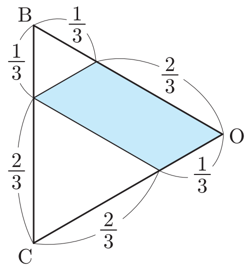
と表せる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

したがって，R の動く範囲は図の網目部分の平行四辺形を $-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だけ平行移動したものである（標問 **95**，(1)），ゆえに，その面積は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

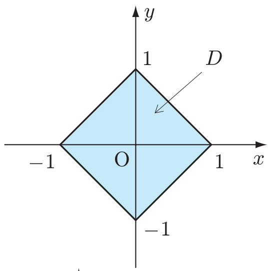


注 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ としても同じことである．ただ，解答の方がいくらか見やすい．

95-2 (1)　領域 $D:|x|+|y|\leqq 1$ は x 軸，y 軸に関して対称で，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき $x+y\leqq 1$ であるから図の網目部分(境界を含む)である．

$-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ とおくと，Q′ も D 上を動く．

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ で Q′ をいったん固定すると，R は領域 D を $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ だけ平行移動した範囲を動く．次に，Q′ を動かすと，R は領域 D を 2 倍に拡大した図形を描く．



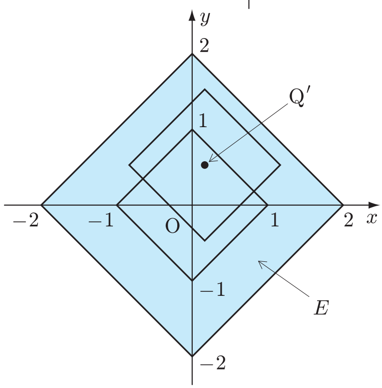
(2)　$F:|x-a|+|y-b|\leqq 1$

点 $(a,\ b)$ を A，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT'}}$ とおくと S，T が F 上を動くとき，S′，T′ は D 上を動く．

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AS}})-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AT}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OS'}}-\overrightarrow{\mathrm{OT'}}$$

ゆえに，U が動く範囲 G は E と一致する．



96 研究，㋒より

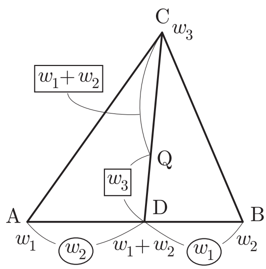
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{w_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+w_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+w_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{w_1+w_2+w_3}\quad\cdots\cdots①$$

一方，$w_1\overrightarrow{\mathrm{DA}}+w_2\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{0}$ より

$$w_1(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})+w_2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\vec{0}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{w_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+w_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{w_1+w_2}\quad\cdots\cdots②$$

この結果を重み付き線分 CD に適用すると



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{(w_1+w_2)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+w_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(w_1+w_2)+w_3}$$

⬅ ②を代入する

$$=\frac{w_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+w_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+w_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{w_1+w_2+w_3} \quad \cdots\cdots③$$

①，③より，P＝Q である．

注 w_1，w_2，w_3 は 0 あるいは負でもよい．

$$w_1+w_2+w_3\neq 0 \quad \cdots\cdots④$$

であれば任意の実数でよい．④が成り立つとき，w_1+w_2，w_2+w_3，w_3+w_1 のうち少なくとも 1 つは 0 でないから，例えば $w_1+w_2\neq 0$ とすると上の証明がそのまま通用して P＝Q となる．

$w_1w_2>0$ の場合，D は AB の内分点であるが，$w_1w_2<0$ のときは外分点であることを注意しておく．

97 $l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ ……① より

$l\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+n(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

∴ $(l+m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(i) $l+m+n\neq 0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{l+m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{n}{l+m+n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，

点 P の位置はただ 1 つに定まる．

(ii) $l+m+n=0$ のとき，$m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立ゆえ

$m=n=0$ ∴ $l=0$

よって，任意の点 P が①を満たす．

(i)，(ii)より，必要十分条件は $l+m+n\neq 0$ である．

98 $3\vec{a}-2\vec{b}$ と $15\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるから

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(15\vec{a}+4\vec{b})=0$

$45|\vec{a}|^2-18\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$

$45-18\vec{a}\cdot\vec{b}-72=0$

⬅ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ のなす角が θ のとき

$\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

とくに

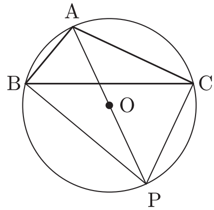
$\theta=\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=0$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{1\cdot 3}=-\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$．

99-1 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおくと，$|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$



(1) $|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{6}$ の両辺を 2 乗して

$$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=6$$

$$4-2\vec{b}\cdot\vec{c}+1=6 \qquad \therefore \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおける．AP は △ABC の外接円の直径だから，$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CP}$ である．$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BP}$ より

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=0$$

$$\vec{b}\cdot\{(s-1)\vec{b}+t\vec{c}\}=0$$

$$(s-1)|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

⬅ (1)の結果を代入

$$s-1-\frac{1}{2}t=0$$

$$\therefore \quad t=2s-2 \qquad \cdots\cdots①$$

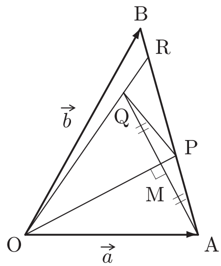
$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CP}$ より，同様にして

$$-s+8t=8 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，$s=\dfrac{8}{5}$, $t=\dfrac{6}{5}$ ゆえに，

$$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{\frac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}}$$

99-2 (1) OP と AQ の交点を M とする．



$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^2}\overrightarrow{OP}$$

において，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ であるから

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{9}(4+2+2)=\frac{8}{9}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OM}=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{5}{16}(2\vec{a}+\vec{b})$$

$\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\overrightarrow{OM}$ であるから

$$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}-\vec{a}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}-\vec{a}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}}$$

次に，実数 k を用いて，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}=\dfrac{k}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5k}{8}\overrightarrow{OB}$ とおくと，R は直線 AB 上にあるから

$$\frac{1}{4}k+\frac{5}{8}k=1 \qquad \therefore \quad k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OR}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{b}}$$

(2)　(1)より，OQ：QR＝7：1 であるから

$$\triangle PQR=\frac{1}{7}\triangle OPQ=\frac{1}{7}\triangle OPA$$

← $\triangle OPQ\equiv\triangle OPA$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\triangle OAB\right)=\frac{1}{21}\triangle OAB$$

ここで，$\angle AOB=\theta$ とおくと

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

← **公式**として使ってよい

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 2-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore\quad \triangle PQR=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{84}}$$

100-1　K，L の方程式はそれぞれ

$$x^2+y^2-x+\frac{1}{\sqrt{3}}y=0\quad\cdots\cdots①,\qquad x^2+y^2+x-\sqrt{3}\,y=0\quad\cdots\cdots②$$

①−② より，$-2x+\dfrac{4}{\sqrt{3}}y=0.$　　$\therefore\quad y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$　……③

③を①に代入して

$$x^2+\frac{3}{4}x^2-x+\frac{1}{2}x=0\qquad\therefore\quad\frac{7}{4}x^2-\frac{1}{2}x=0$$

$x\neq 0$ であるから，$x=\dfrac{2}{7}.$　　$\therefore\quad y=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

$$\therefore\quad \mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{2}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{7}}\right)$$

100-2　$|\overrightarrow{OP}|=3|\overrightarrow{AP}|$ より，

$$|\overrightarrow{OP}|^2=9|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2$$
$$|\overrightarrow{OP}|^2=9(|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OA}|^2)$$
$$8|\overrightarrow{OP}|^2-18\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+9|\overrightarrow{OA}|^2=0$$
$$|\overrightarrow{OP}|^2-\frac{9}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+\frac{9}{8}|\overrightarrow{OA}|^2=0\quad\cdots\cdots①$$

これから

$$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{9}{8}\overrightarrow{OA}\right|^2=\frac{81}{64}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{9}{8}|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=\frac{9}{64}|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$\therefore\quad\left|\overrightarrow{OP}-\frac{9}{8}\overrightarrow{OA}\right|=\frac{3}{8}|\overrightarrow{OA}|$$

ゆえに，$\dfrac{9}{8}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ とおくと，点Pは**Cを中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{3}{8}|\overrightarrow{OA}|}$ の円を描く．**

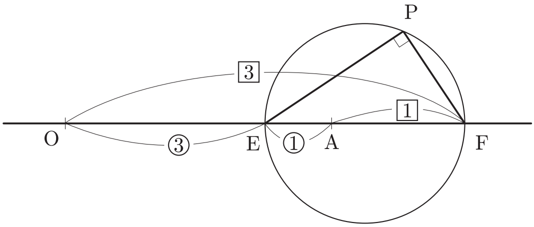
別解 ①から後は次のようにしてもよい．

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}})=0 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{EP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}=0$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{EPF}=\frac{\pi}{2}$$



したがって，点PはOAを3：1に内分する点Eと3：1に外分する点Fを直径の両端とする円を描く．

注 本問は一般化できる．2点O，Aに至る距離の比が $m:n\ (m\neq n)$ である点P，すなわち

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|:|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=m:n \qquad \therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{m}{n}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

を満たす点Pは，線分OAを $m:n$ の比に内分する点と，外分する点を直径の両端とする円を描く．この円を**アポロニウスの円**という．各自計算してみよ．

この結果は記憶する価値がある．

100-3 $\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$ ……① より

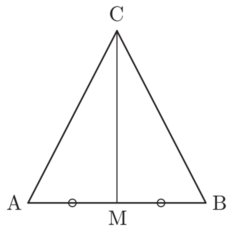
$$2\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\therefore\quad (\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

ABの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=0 \qquad \therefore\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{CM}$$

ゆえに，△ABC は **AC＝BC なる二等辺三角形**



注 後出し気味の 別解

①より

$$\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

両辺に $\vec{c}\cdot\vec{c}$ を加えると

$$\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$\therefore\quad |\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2 \qquad \therefore\quad \mathrm{AC}=\mathrm{BC}$$

101 $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ ……①

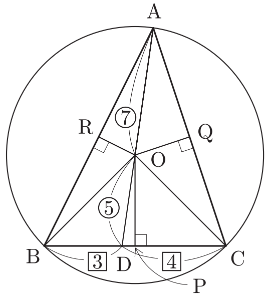


図 1

(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}$,

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

を①に代入して

$$\mathbf{5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}} \quad \cdots\cdots②$$

(2) ②より

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{5}=-\frac{7}{5}\cdot\frac{4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{7}$$

よって，辺 BC を 3：4 に内分する点をDとすると

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{OD} \quad \cdots\cdots③$$

ゆえに，外心Oの位置は図 1 のようになる．とくに，O は △ABC の内部の点であるから，$\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC$ である．

△ABC の外接円の半径を r とすると，②より

$$|4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}|^2=|-5\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\therefore\ 16r^2+9r^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=25r^2 \qquad \therefore\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

すなわち，$\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\angle A=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ となる．

注 1° ②から外心Oの △ABC における位置を知るには，演習問題 **96** の考え方が有効である．この方法だとOの位置が図のようになることが，②の係数の配列を見ただけで分かる．

2° 本問では，O が △ABC の内部にあることが重要である．例えば①を

$$-6\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OQ}+2\overrightarrow{OR}=\vec{0}$$

に変更すると，②は

$$-5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

となる．そこで，解答と同様にすれば，

$\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$ は同じである．しかし，O は BC に関してAと反対側にあるので

$$\angle A=\frac{1}{2}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

となる．

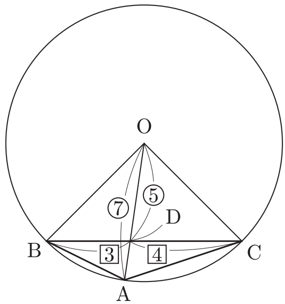


図 2

この場合は，③が

$\overrightarrow{OA}=\dfrac{7}{5}\overrightarrow{OD}$ となる

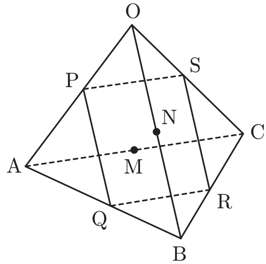
第5章 空間におけるベクトル

102 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{OQ}=(1-q)\vec{a}+q\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$ より

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(1-p-q)\vec{a}+q\vec{b}$

$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}=(1-r)\vec{b}+(r-s)\vec{c}$



四角形 PQRS が平行四辺形となる条件は，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ である．$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は1次独立であるから，両辺の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の係数を比較して

$$1-p-q=0,\quad q=1-r,\quad r-s=0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{q=1-p,\ r=s=p}$

(2) 平行四辺形の対角線は互いに他を2等分するから

$$\overrightarrow{OT}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}}{2}=\frac{1}{2}\{p\vec{a}+(1-r)\vec{b}+r\vec{c}\}$$

⬅ (1)の結果を適用

$$=\frac{1}{2}\{p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\}=p\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-p)\frac{\vec{b}}{2}$$

ゆえに，AC と OB の中点をそれぞれ M，N とすれば

$$\overrightarrow{OT}=p\overrightarrow{OM}+(1-p)\overrightarrow{ON},\quad 0<p<1$$

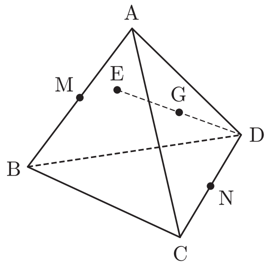
したがって，T は線分 MN 上にある．

103 (1) $(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DG})+(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG})+(t-2)(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DG})-t\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}-2t\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

$t\neq 0$ であるから

$$\overrightarrow{DG}=\frac{\boldsymbol{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}}}{\boldsymbol{2t}}\quad\cdots\cdots①$$



(2) 実数 k を用いて

$$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DG}=\frac{k}{2t}\overrightarrow{DA}+\frac{k}{2t}\overrightarrow{DB}+\frac{k(t-2)}{2t}\overrightarrow{DC}$$

と表せる．E は平面 ABC 上にあるから

$$\frac{k}{2t}+\frac{k}{2t}+\frac{k(t-2)}{2t}=1\qquad\therefore\quad k=2$$

⬅ 標問 **96**，(1)

$\therefore$ $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DG}$

ゆえに，G は線分 DE の中点である．

(3) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DC}=\dfrac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}}{2}-\overrightarrow{DC}$

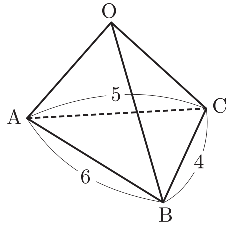
一方，①より

$$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}}{2t}-\frac{1}{t}\overrightarrow{DC}$$

したがって，$\overrightarrow{NG}=\dfrac{1}{t}\overrightarrow{CM}$

ゆえに，G はNを通り $\overrightarrow{CM}$ に平行な直線上にある．

104-1 四面体の各面は合同な三角形であるから



BC$=4$，CA$=5$，AB$=6$ より

OA$=4$，OB$=5$，OC$=6$

θ の定義より

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{4\cdot4}$$

$$=\frac{1}{16}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})\qquad\cdots\cdots①$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$5^2=4^2+6^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{27}{2}$$

同様に，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{2}$ を得る．これらを①に代入して

$$\cos\theta=\frac{1}{16}\left(\frac{27}{2}-\frac{5}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{11}{16}}$$

104-2 P$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，Q$(-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0)$ とおけて

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta-1,\ -1)\\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(-\cos\theta-1,\ -\sin\theta-1,\ -1)\end{cases}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=1-\cos^2\theta+(1-\sin^2\theta)+1=2$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=4-2(\cos\theta+\sin\theta)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=4+2(\cos\theta+\sin\theta)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{16-4(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{12-8\sin\theta\cos\theta}$$
$$=2\sqrt{3-\sin2\theta}$$

(1) $\cos\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3-\sin2\theta}}$ であるから，$\cos\angle\mathrm{PAQ}$ は

$\sin2\theta=-1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$，$\sin2\theta=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．ゆえに，

$\angle\mathrm{PAQ}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ である．

(2) $\triangle\mathrm{PAQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2}$

$$=\sqrt{2-\sin2\theta}$$

よって，面積は $\sin2\theta=-1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$，$\sin2\theta=1$ のとき最小値 **1** をとる．

105-1　m を含み l と平行な平面を π とする．l の π 上への正射影を l'，m と l' の交点をKとする．

Kで立てた π の垂線と l との交点をHとすると

← 対応 K→H は正射影の逆対応

$$\mathrm{HK}\perp m \quad \cdots\cdots ⑥$$

かつ，$l /\!/ \pi$ より

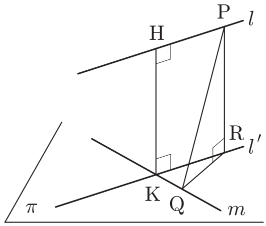
$$\mathrm{HK}\perp l \quad \cdots\cdots ⑦$$

である．

点Pの π 上への正射影をRとすると，Rは l' 上にあり PR⊥QR であるから

$$\mathrm{PQ} \geqq \mathrm{PR} = \mathrm{HK} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑥，⑦，⑧より，PQ が最小となるとき，P=H，Q=K である．



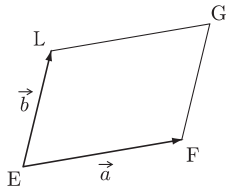
105-2　標問 **105** の解答①，②の１つ前の式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=(-1,\ 0,\ 1)+s\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)+t\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

ただし，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ である．よって，

$$\mathrm{E}(-1,\ 0,\ 1),\ \vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \vec{b}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

とおくと，Mは右図の**平行四辺形 EFGL の周および内部を動く**．(標問 **95**，(1)と演習問題 **95-1** 参照)



$$S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{11}{4}\cdot\frac{5}{4}-\frac{1}{16}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{4}}$$

105-3　Aから l に下ろした垂線 AH の長さが分かればよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$=(-1,\ 3,\ -2)+t(2,\ -1,\ 3)$$

とおける．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(-9,\ -2,\ -4)+t(2,\ -1,\ 3)$$

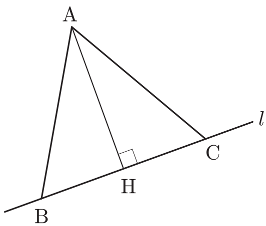
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より

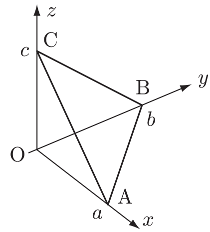
$$-18+2-12+t(4+1+9)=0$$

$$14t-28=0 \qquad \therefore\quad t=2 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-5,\ -4,\ 2)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{25+16+4}=3\sqrt{5} \text{ より}\quad \mathrm{BH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AH}=\sqrt{15}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}=\boldsymbol{15\sqrt{3}}$$





↖ xy 平面上の直線 AB の方程式が $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ であることと類似

106-1 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}=\boldsymbol{\dfrac{abc}{6}}$

平面 ABC の方程式は，各座標軸との交点を考えて

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad \therefore\quad bcx+cay+abz-abc=0$$

よって，点と平面の距離の公式より

$$d=\frac{|bc\cdot0+ca\cdot0+ab\cdot0-abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}}$$

$V=\dfrac{1}{3}Sd$ より $S=\dfrac{3V}{d}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

注 d より先に S を計算してもよい．

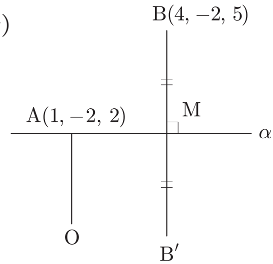
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

これから，$d=\dfrac{3V}{S}$ が求まる．

106-2 (1) BB′ の中点を M とすると，実数 t を用いて



$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4+t,\ -2-2t,\ 5+2t)$

とおける．一方，平面 α の方程式は

$1\cdot(x-1)-2(y+2)+2(z-2)=0$

$\therefore\quad x-2y+2z-9=0$

M は α 上の点だから

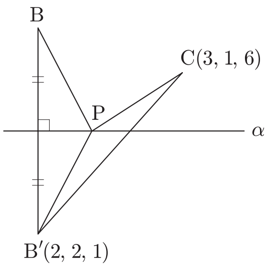
$4+t-2(-2-2t)+2(5+2t)-9=0$

$\therefore\quad 9t+9=0 \qquad \therefore\quad t=-1 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=(3,\ 0,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(3,\ 0,\ 3)-(4,\ -2,\ 5) \qquad \therefore\quad \mathrm{B'}(\boldsymbol{2,\ 2,\ 1})$

(2) 2 点 B，C は平面 α に関して同じ側にある．



BP＝B′P であるから

BP＋PC＝B′P＋PC≧B′C

ゆえに，BP＋PC の最小値は

$\mathrm{B'C}=\sqrt{1^2+1^2+5^2}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

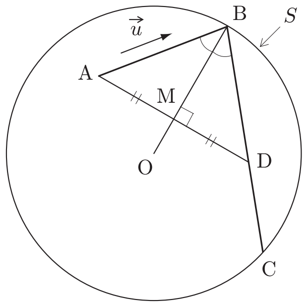
注 標問 **99**，研究 で説明したベクトルの正射影を使って(1)の別解を与える．

$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-3,\ 0,\ -3)$ の直線 OA への正射影であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{-9}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ -2)$$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BM}}=(2,\ 2,\ 1)$

107 $S:x^2+y^2+z^2=5$ ……①



実数 $t\,(>0)$ を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{u}$

$\quad=(1,\ 1+t,\ 1-t)$

と表せる．①に代入して

$$1+(1+t)^2+(1-t)^2=5$$

$$2t^2+3=5 \qquad \therefore\quad t>0 \text{ より } t=1$$

$\therefore\quad \mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$

直線 OB に関してAと対称な点を D，AD の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(0,\ -1,\ 1)$ の直線 OB への正射影であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{2}{5}(1,\ 2,\ 0)$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BM}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\frac{4}{5}(1,\ 2,\ 0)-(0,\ -1,\ 1)=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -1\right)$$

よって，実数 $s\,(>0)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(1-\frac{4}{5}s,\ 2-\frac{3}{5}s,\ -s\right)$$

とおける．①に代入すると，

$$\left(1-\frac{4}{5}s\right)^2+\left(2-\frac{3}{5}s\right)^2+(-s)^2=5 \qquad \therefore\quad 2s^2-4s=0$$

$s>0$ であるから，$s=2$

よって，$\mathrm{C}\boldsymbol{\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ -2\right)}$

108-1 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OPQ}\cdot\mathrm{OR}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{c^2}{2ab}\cdot\dfrac{c}{c-1}=\dfrac{c^3}{6ab(c-1)}$

α の方程式に点と平面の距離の公式を適用すると

$$d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+(c-1)\cdot 0-c|}{\sqrt{a^2+b^2+(c-1)^2}}=c \quad (\text{①による})$$

$V=\dfrac{1}{3}Sd$ であるから，$S=\dfrac{3V}{d}=\boldsymbol{\dfrac{c^2}{2ab(c-1)}}$

108-2 $f(c)$ の分母，分子を c で割ると

$$f(c)=\frac{1}{3-\left(c+\frac{2}{c}\right)}\geqq\frac{1}{3-2\sqrt{c\cdot\frac{2}{c}}}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$$

等号は，$c=\dfrac{2}{c}$，すなわち $c=\sqrt{2}$ (>1) のとき成立する．ゆえに，

$f(c)$ の最小値は，$\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$

第6章 複素数平面

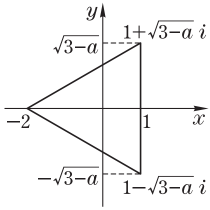
109-1 $x^3+8-a(x+2)=0$ より

$$(x+2)(x^2-2x-a+4)=0$$

$\therefore\quad x=-2,\ 1\pm\sqrt{a-3}$

$a<3$ であることが必要で，このとき三角形は右図のようになるから，その面積が 6 となるのは

$$3\sqrt{3-a}=6 \qquad \therefore\quad a=\mathbf{-1}$$



109-2 注 実数の大小関係は複素数の範囲まで拡張できないことが知られている．したがって，複素数に対する不等式があるとき，**その対象は必ず実数**でなければならない．

$k=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと，与えられた不等式は $1\leqq k\leqq 4$.

$$k=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

は実数であるから

$$y-\frac{y}{x^2+y^2}=0$$

$\therefore\quad y(x^2+y^2-1)=0$

$\therefore\quad y=0$ または $x^2+y^2=1$

(i) $y=0$ のとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ であるから，$1\leqq x+\dfrac{1}{x}\leqq 4$

$x>0$ ゆえ，$x\leqq x^2+1\leqq 4x$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ ゆえ，左側の不等式はつねに成立する．右側は

$$x^2-4x+1\leqq 0 \qquad \therefore\quad 2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$$

ゆえに，$z=x+yi$ の存在範囲は

$$y=0,\ 2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$$

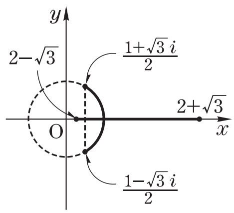
(ii) $x^2+y^2=1$ のとき，$k=2x$ であるから，$1\leqq 2x\leqq 4$

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$

ゆえに，$z=x+yi$ の存在範囲は

$$x^2+y^2=1,\ \frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$$

(i)，(ii)より，z の存在範囲は右図．



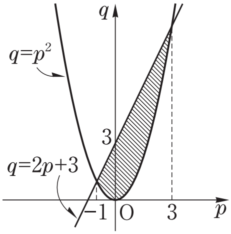
110-1 $x^2-2px+q=0$ ……① の判別式 <0 より

$$p^2-q<0 \qquad \therefore\quad q>p^2 \quad \cdots\cdots②$$

このとき，①の 2 解は z，$\overline{z}$ となるので，解と係数の関係より

$$z+\overline{z}=2p,\ z\overline{z}=q$$

$|z-1|<2$ より $|z-1|^2<4$ であるから



$$(z-1)(\overline{z}-1)<4$$
$$z\overline{z}-(z+\overline{z})+1<4$$
$$q-2p+1<4$$
$$\therefore\quad q<2p+3 \quad \cdots\cdots③$$

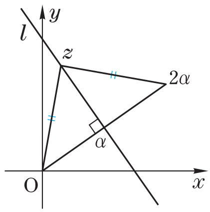
②，③を同時に満たす $(p,\ q)$ の存在範囲は図の斜線部分で境界は含まない．

注 ②のもとで①を解くのもよい方法である．

$$x=p\pm\sqrt{p^2-q}=p\pm\sqrt{q-p^2}\,i$$

したがって

$$|z-1|^2=|p-1\pm\sqrt{q-p^2}\,i|^2$$
$$=(p-1)^2+q-p^2=q-2p+1<4$$
$$\therefore\quad q<2p+3$$



110-2 l は原点と 2α を結ぶ線分の垂直 2 等分線であるから，l 上の点 z は原点と 2α から等距離にある．

$$\therefore\quad |z|=|z-2\alpha|$$

両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}=(z-2\alpha)(\overline{z}-2\overline{\alpha})$$
$$=z\overline{z}-2\overline{\alpha}z-2\alpha\overline{z}+4|\alpha|^2$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

別解 $z\neq\alpha$ のとき $\angle \mathrm{O}\alpha z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\dfrac{z-\alpha}{\alpha}$ は純虚数．よって

$$\frac{z-\alpha}{\alpha}+\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)}=\frac{z-\alpha}{\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}=0$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}(z-\alpha)+\alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})=0$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

← $z=\alpha$ はこれを満たす．以後，この議論はしない

あるいは △Oαz に三平方の定理を適用してもよい．

$$|z|^2=|z-\alpha|^2+|\alpha|^2$$

より

$$|z|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})+|\alpha|^2$$
$$=|z|^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+2|\alpha|^2$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

111 $|\beta|\cdot|\alpha-\gamma|+|\alpha|\cdot|\gamma-\beta|$

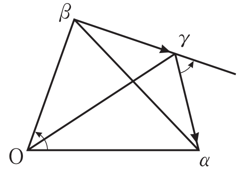
$$=|\beta(\alpha-\gamma)|+|\alpha(\gamma-\beta)|$$
$$\geqq|\beta(\alpha-\gamma)+\alpha(\gamma-\beta)|$$
$$=|\gamma(\alpha-\beta)|$$
$$=|\gamma|\cdot|\alpha-\beta|$$
$$\therefore\quad |\alpha-\beta|\cdot|\gamma|\leqq|\beta|\cdot|\alpha-\gamma|+|\alpha|\cdot|\gamma-\beta|$$

← 証明する不等式の不等号の向きを見て三角不等式を適用す

注 等号の成立条件を標問 **112**, 研究 を用いて調べる.
標問 **111**, (1)より, 等号はある正数 k に対して

$$\beta(\alpha-\gamma)=k\alpha(\gamma-\beta)$$

となるとき成立する. これから



$$\frac{\beta}{\alpha}=k\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\gamma}$$

$$\therefore\quad \arg\beta-\arg\alpha=\arg(\gamma-\beta)-\arg(\alpha-\gamma)$$

$$\therefore\quad \angle\alpha\mathrm{O}\beta+\angle\beta\gamma\alpha=\pi$$

ゆえに, 等号は四角形が円に内接するとき成立する.
このとき成り立つ等式

$$|\gamma|\cdot|\alpha-\beta|=|\beta|\cdot|\alpha-\gamma|+|\alpha|\cdot|\gamma-\beta|$$

を**トレミーの定理**という.

112-1 とくに $n=3$ とすると $e(\theta)^3=e(3\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}&\cos 3\theta+i\sin 3\theta\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+i\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\}\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\{3\sin\theta-4\sin^3\theta\}\end{aligned}$$

実部と虚部を比較して, 次の 3 倍角の公式を得る.

$$\cos 3\theta=\boldsymbol{4\cos^3\theta-3\cos\theta},\quad \sin 3\theta=\boldsymbol{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$

112-2 $n=-m$ (m は正の整数) とおく.

$$|z^n|=|z^{-m}|=\left|\frac{1}{z^m}\right|\underset{(3)}{=}\frac{1}{|z^m|}\underset{(5)}{=}\frac{1}{|z|^m}=|z|^{-m}=|z|^n$$

$$\arg z^n=\arg z^{-m}=\arg\left(\frac{1}{z^m}\right)\underset{(4)}{=}-\arg z^m\underset{(6)}{=}-m\arg z=n\arg z$$

112-3 点 $(x,\ y)$ の表す複素数を $z=x+yi$ とする. z を原点を中心に角 θ だけ回転した点を $w=X+Yi$ とすると

$$\begin{aligned}w&=e(\theta)z=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi)\\&=x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{X=x\cos\theta-y\sin\theta}\\\boldsymbol{Y=x\sin\theta+y\cos\theta}\end{cases}$$

注 これは重要な公式である.

113-1 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^{2n}}+\frac{1}{z^{2(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{z^2}+1+z^2+\cdots+z^{2(n-1)}+z^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-2n}\{z^{2(2n+1)}-1\}}{z^2-1}$$

← 初項 z^{-2n}, 公比 z^2, 項数 $2n+1$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-(2n+1)}\{z^{2(2n+1)}-1\}}{z-z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{2n+1}-z^{-(2n+1)}}{z-z^{-1}}$$

⬅ $z^k-\dfrac{1}{z^k}=2i\sin k\theta$

$$=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

注 **複素数を使わない別解**

$$\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta\right)=\frac{1}{2}\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}\sin\theta\cos 2k\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\{\sin(2n+1)\theta-\sin\theta\}=\frac{1}{2}\sin(2n+1)\theta$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

113-2 $z^3-3z\bar{z}+4=0$ ……① において，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおくと

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-3r^2+4=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\sin 3\theta=0 & \cdots\cdots② \\ r^3\cos 3\theta-3r^2+4=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

②より $\cos 3\theta=\pm 1$ である．

(i) $\cos 3\theta=1$ のとき，$-3\pi<3\theta\leqq 3\pi$ ゆえ，$3\theta=0,\ \pm 2\pi$

$$\therefore\quad \theta=0,\ \pm\frac{2\pi}{3}$$

③より，$r^3-3r^2+4=(r+1)(r-2)^2=0$ $\quad\therefore\quad r=2$

$\therefore\quad z=2$ または $2\left\{\cos\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}=-1\pm\sqrt{3}\,i$ （複号同順）

(ii) $\cos 3\theta=-1$ のとき，$3\theta=\pm\pi,\ 3\pi$ $\quad\therefore\quad \theta=\pm\dfrac{\pi}{3},\ \pi$

③より，$r^3+3r^2-4=(r-1)(r+2)^2=0$ $\quad\therefore\quad r=1$

$\therefore\quad z=-1$ または $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ （複号同順）

(i)，(ii)より①の解は $\boldsymbol{z=-1,\ 2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

注 ①の左辺は z の多項式ではないから，3 個よりも多くの解をもつからといって，標問 **109** 研究 で述べた代数学の基本定理に抵触するわけではない．また，$z=x+yi$ とおいても大した計算にはならない．

114-1 $-8+8\sqrt{3}\,i$ の 4 乗根の 1 つを β とすると，方程式は $\left(\dfrac{z}{\beta}\right)^4=1$ となるので

$$\frac{z}{\beta}=\pm 1,\ \pm i\qquad\therefore\quad z=\beta,\ i\beta,\ -\beta,\ -i\beta$$

一方，

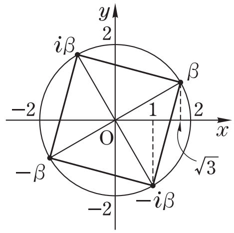
$$-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

であるから，β として

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

がとれる．ゆえに，4 つの解は右図の正方形の頂点をなす．そのうち実数部分が最大であるのは

$$\boldsymbol{\sqrt{3}+i}$$



注 $z^n=1$ の解は，$n=2,\ 3,\ 4,\ 6$ の場合には具体的にわかることに注意する．

$z^n=\gamma\ (\neq 1)$ を解くには本問を真似ればよい．γ の n 乗根の 1 つ β を求めて，方程式を $\left(\dfrac{z}{\beta}\right)^n=1$ と直すと，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ に対して

$$z=\beta,\ \beta\alpha,\ \beta\alpha^2,\ \cdots,\ \beta\alpha^{n-1}$$

114-2 $z^6+z^3+1=0$ ……① は

$$\begin{cases}(z^3-1)(z^6+z^3+1)=0\\ z^3-1\neq 0\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}z^9=1\\ z^3\neq 1\end{cases}$$

と書き直せる．$z^9=1$ の解は

$$z=\cos(40^\circ\times k)+i\sin(40^\circ\times k)\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$$

このうち，$z^3=1$ を満たすのは $k=0,\ 3,\ 6$ の場合であるから，①を満たす z の偏角は次の 6 個である．

40°，80°，160°，200°，280°，320°

注 ①をいったん z^3 について解くのもよい方法である．

$$z^3=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ \text{ または } \cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$$

これを用いても同じ結果を得る．

115-1 (1) $z^n=1$ より

$$1-z^n=(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=0$$

すなわち，$(1-z)S_1=0$ であるから

$$S_1=\begin{cases}\mathbf{0} & (z\neq 1\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{n} & (z=1\ \text{のとき})\end{cases}$$

(2) $z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ であるから

$$S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}(z^k)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right)=\mathrm{Re}(S_1)$$

$$=\begin{cases}\mathbf{0} & (z\neq 1\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{n} & (z=1\ \text{のとき})\end{cases}$$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(n-1)\theta$

$$=\frac{1+1}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 4\theta}{2}+\cdots+\frac{1+\cos 2(n-1)\theta}{2}$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\{1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2(n-1)\theta\}$$

ここで，$w=z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$，$T=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}$ とおくと

$$S_3=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(T)$$

一方，$w^n=z^{2n}=1$ であるから，(1)と同様にして

$$T=\begin{cases}0 & (w\neq 1 \text{ のとき})\\ n & (w=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

したがって

$$1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2(n-1)\theta$$
$$=\mathrm{Re}(T)=\begin{cases}0 & (w\neq 1 \text{ のとき})\\ n & (w=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

ゆえに

$$S_3=\boldsymbol{\frac{n}{2}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{z\neq\pm 1}\textbf{ のとき)},\ S_3=\boldsymbol{n} \quad \textbf{(}\boldsymbol{z=\pm 1}\textbf{ のとき)}$$

115-2 (1) $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく．

← 前問(1)で $\theta=\frac{2\pi}{n}$ とした場合であるが，再度解答する

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}=0 \quad (\because \quad z\neq 1,\ z^n=1)$$

(2) A_0 が x 軸上にのるようにあらかじめ座標軸を回転しておくと，$\mathrm{A}_k(z^k)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ としてよい．

$\mathrm{P}(\alpha)$ とおくと $|\alpha|=\frac{1}{2}$ である．このとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}l_k(\mathrm{P})^2=\sum_{k=0}^{n-1}|z^k-\alpha|^2$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(z^k-\alpha)(\overline{z^k}-\overline{\alpha})$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(|z^k|^2-\overline{\alpha}z^k-\alpha\overline{z^k}+|\alpha|^2)$$
$$=n-\overline{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}z^k-\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z^k}+\frac{1}{4}n$$
$$=\frac{5}{4}n-\overline{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}z^k-\alpha\left(\overline{\sum_{k=0}^{n-1}z^k}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{4}n} \quad (\because \quad (1))$$

これはPの位置に無関係な値である．

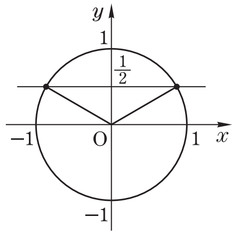
116-1 (1) $z^n=(z-i)^n$ ……① より $|\alpha|^n=|\alpha-i|^n$

$\therefore \quad |\alpha|=|\alpha-i|$

したがって，点 α は 2 点 O，i から等距離にあるので，虚数部分は $\frac{1}{2}$ である．

(2)　$|z|=1$ のとき，(1)の結果と合わせると

$$z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \quad \cdots\cdots②$$



であることが必要である．$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ を①に代入すると

$$(\cos 30°+i\sin 30°)^n=\{\cos(-30°)+i\sin(-30°)\}^n$$

ド・モアブルの定理を適用して，両辺の偏角を比較すると

$$30°\times n=(-30°)\times n+360°\times k \quad (k\text{ は整数})$$

$\therefore$　$\boldsymbol{n=6k}$

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ を①に代入すると

$$(\cos 150°+i\sin 150°)^n=\{\cos(-150°)+i\sin(-150°)\}^n$$

両辺の偏角を比較すると

$$150°\times n=(-150°)\times n+360°\times l \quad (l\text{ は整数})$$

$\therefore$　$5n=6l$

したがって，やはり n は 6 の倍数である．

ゆえに，①が絶対値 1 の解をもつための条件は $\boldsymbol{n=6k}$ であり，このとき絶対値 1 の解は②で与えられる．

116-2　$|z|=|w|=1$　$\cdots\cdots①$　より　$z=\frac{1}{\overline{z}}$，$w=\frac{1}{\overline{w}}$ であるから，これらを

$z^2+w^2=z+w$　$\cdots\cdots②$　に代入すると

$$\overline{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}}=\overline{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}} \qquad \therefore\ \frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$$

$\therefore$　$z^2+w^2=zw(z+w)$　$\cdots\cdots③$　　⬅ ②の反転

③−②より

$$(z+w)(zw-1)=0$$

$z+w=0$ とすると，②より $z=w=0$ となり，①に反する．

$\therefore$　$zw=1$　　$\therefore$　$w=\frac{1}{z}$　$\cdots\cdots④$

④を②に代入すると

$$z^2+\frac{1}{z^2}=z+\frac{1}{z} \qquad \therefore\ z^4+1=z^3+z$$

$\therefore$　$(z-1)^2(z^2+z+1)=0$

$\therefore$　$z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

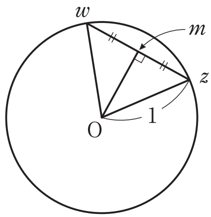
④も考えて

$$(z,\ w)=(\mathbf{1},\ \mathbf{1}),\ \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)$$ **(複号同順)**

注 「円周上の 2 点は，それを結ぶ線分が直径でないとき，その線分の中点で定まる」 ……(＊)

ことを用いてもよい．条件より

$$\frac{z^2+w^2}{2}=\frac{z+w}{2} \quad (=m \text{ とおく})$$



(i) $m=0$ のとき，$z^2+w^2=z+w=0$ から w を消去すると $z^2=0$．これは $|z|=1$ に反する．

(ii) $|m|=1$ のとき，$z=w$ であるから，$z^2=z$．$|z|=1$ ゆえ

$$\therefore \quad z=1 \qquad \therefore \quad (z,\ w)=(1,\ 1)$$

(iii) $0<|m|<1$ のとき，(＊)より $(z^2,\ w^2)=(z,\ w)$ または $(w,\ z)$

(ア) $z^2=z$，$w^2=w$ のとき，$|z|=|w|=1$ より，$z=w=1$．これは $|m|<1$ に反する．

(イ) $z^2=w$，$w^2=z$ のとき，w を消去すると

$$z^4=z \qquad \therefore \quad (z-1)(z^2+z+1)=0$$

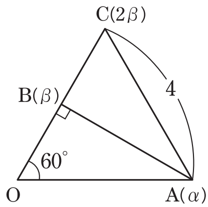
$$\therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

$z=1$ のとき，$w=1$ となり，$|m|<1$ に反する．

$$\therefore \quad (z,\ w)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

117-1 $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ より，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$．解くと $\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}\,i$

$$\therefore \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=\left|\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|=|\pm 60^\circ|=\mathbf{60^\circ}$$



よって，$\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$．したがって，$\mathrm{C}(2\beta)$ とすると $\triangle\mathrm{OAC}$ は正三角形，かつ $\mathrm{AC}=|\alpha-2\beta|=4$ である．ゆえに

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\sin 60^\circ\right)=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

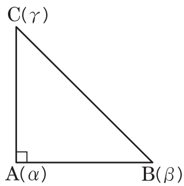
注 C を考えるかわりに，$\alpha=(1\pm\sqrt{3}\,i)\beta$ より

$\alpha-2\beta=(-1\pm\sqrt{3}\,i)\beta$

これと $|\alpha-2\beta|=4$ より $|\beta|=2$ としてもよい．

117-2 (1) $(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$ より

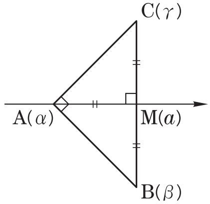
$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1 \qquad \therefore \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boldsymbol{i}$$



このとき，$\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm 90^\circ$ であるから

$\triangle\mathrm{ABC}$ は **$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ の直角二等辺三角形**である．

(2)　$x^3+kx+20=0$　(k は実数)



α, β, γ はすべてが実数ではないから，3 解のうち 1 つが実数，他の 2 つは互いに共役な虚数である．

さらに(1)の結果も合わせると，α は実数，$\gamma=\overline{\beta}$ である．そこで，$\beta=a+bi$, $\gamma=a-bi$ とおく．解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+2a=0 & \cdots\cdots ① \\ 2a\alpha+a^2+b^2=k & \cdots\cdots ② \\ \alpha(a^2+b^2)=-20 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①より $a=-\dfrac{\alpha}{2}$，したがって $b=\pm\mathrm{BM}=\pm\mathrm{AM}=\pm\dfrac{3}{2}\alpha$．これらを③に代入．

$$\alpha\cdot\frac{5}{2}\alpha^2=-20 \qquad \therefore\quad \alpha^3=-8 \qquad \therefore\quad \alpha=\mathbf{-2}$$

このとき，$a=1$, $b=\pm3$

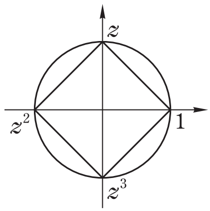
$\therefore$　$\boldsymbol{\beta=1\pm3i}$, $\boldsymbol{\gamma=1\mp3i}$　**(複号同順)**

これらを②に代入して，$k=2(-2)+(1+9)=\mathbf{6}$

117-3　(1)　$|z|=1$ より $z\overline{z}=1$ だから，$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$．したがって

$$\frac{z^3-1}{z^2-z}=\frac{z^2+z+1}{z}=z+\frac{1}{z}+1=(z+\overline{z})+1\ (\text{実数})$$

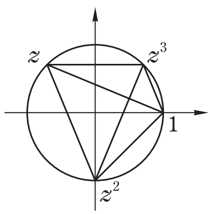
すなわち，1 と z^3, z と z^2 を結ぶ辺は平行である．ゆえに，Q は 1 と z^3 をとなり合う頂点とする台形である．



(2)　(i)　1 と z^2, z と z^3 を結ぶ線分が対角線のとき

$$\frac{z^3-z}{z^2-1}=z\ (\text{純虚数})$$

$|z|=1$, $0<\arg z<\pi$ ゆえ，$z=\boldsymbol{i}$



(ii)　1 と z, z^2 と z^3 を結ぶ線分が対角線のとき

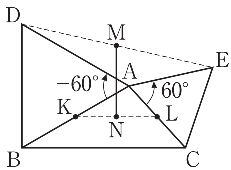
$$\frac{z^3-z^2}{z-1}=z^2\ (\text{純虚数})$$

$\arg z^3>2\pi$ より $\dfrac{2\pi}{3}<\arg z<\pi$，したがって

$\dfrac{4\pi}{3}<\arg z^2<2\pi$ であるから，$z^2=-i$

$$\therefore\quad z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

118　A を原点にとり，それぞれの点を表す複素数を小文字で表す．



$$d=\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}b=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$$

$$e=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)c=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c$$

$$\therefore\quad m=\frac{d+e}{2}=\frac{1}{4}(b+c)+\frac{\sqrt{3}\,i}{4}(c-b)$$

一方，$n=\dfrac{k+l}{2}=\dfrac{b+c}{4}$ であるから，$n-m=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{4}(b-c)$

$$\therefore\quad \frac{n-m}{b-c}=\frac{\sqrt{3}\,i}{4}\quad(純虚数)$$

ゆえに，直線 MN と直線 BC とは垂直である．

119 (1) $w=\dfrac{iz}{z-1}$ ……①．w が実数である条件は $w=\overline{w}$ であるから

$$\frac{iz}{z-1}=\overline{\left(\frac{iz}{z-1}\right)}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}-1}$$

$$z(\overline{z}-1)+\overline{z}(z-1)=0$$

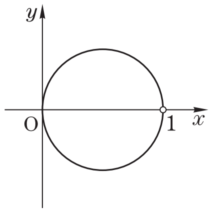
$$z\overline{z}-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\overline{z}=0$$

← ここで $z=x+yi$ とおいてもよい

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

← 左辺$=\left|z-\dfrac{1}{2}\right|^2$

$$\therefore\quad \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$



ゆえに，z の全体は右図の円．ただし，①が定義されない点 1 は除く．

(2) $|w|\leqq a$ より $|z|\leqq a|z-1|$ ……②

← 境界はアポロニウスの円（直線を含む）

となるから，両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}-a^2(z-1)(\overline{z}-1)\leqq 0\qquad \therefore\quad (a^2-1)z\overline{z}-a^2z-a^2\overline{z}+a^2\geqq 0$$

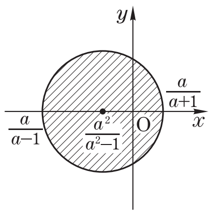
(i) $0<a<1$ のとき，$a^2-1<0$ であるから

$$z\overline{z}-\frac{a^2}{a^2-1}z-\frac{a^2}{a^2-1}\overline{z}+\frac{a^2}{a^2-1}\leqq 0$$

$$\left(z-\frac{a^2}{a^2-1}\right)\left(\overline{z}-\frac{a^2}{a^2-1}\right)\leqq\frac{a^4}{(a^2-1)^2}-\frac{a^2}{a^2-1}$$

$$=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

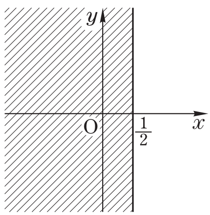
$$\therefore\quad \left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right|\leqq\frac{a}{1-a^2}$$



したがって，z の全体は右上図の円の内部およびその境界．

(ii) $a=1$ のとき，②より $|z|\leqq|z-1|$．

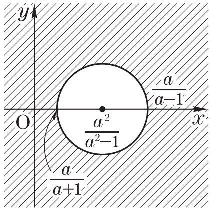
したがって，z の全体は右図の境界を含む左半平面 $x\leqq\dfrac{1}{2}$



(iii)　$a>1$ のとき，$a^2-1>0$ であるから，(i)と同様にして

$$\left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right|\geqq\frac{a}{a^2-1}$$

したがって，z の全体は右図の円の外部およびその境界．



注 問題文下の 注 の立場からみると，場合分けの生じる理由がよくわかる．①の逆変換

$$w=\frac{z}{z-i}\quad\cdots\cdots③$$

の分母が 0 となる点 i が，円板 $|z|\leqq a$ の外部にあるか，境界にあるか，あるいは内部にあるかでそれぞれ(i)，(ii)，(iii)に分かれる．**③によって点 i は無限遠点に移されるとみなされ，無限遠点を通る円は直線と考えられる**からである．

また，(1)は次のようにしても解ける．③で $z=t$（実数）とおくと

$$w=x+yi=\frac{t}{t-i}=\frac{t(t+i)}{(t-i)(t+i)}=\frac{t^2+ti}{t^2+1}$$

$$\therefore\quad x=\frac{t^2}{t^2+1},\ y=\frac{t}{t^2+1}$$

$\frac{x}{y}=t$ と $y(t^2+1)=t$ より t を消去すると

$$x^2+y^2=x\qquad\therefore\quad\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

厳密には
(ア) $t=0$ のとき
$(x,\ y)=(0,\ 0)$
(イ) $t\neq0$ のとき
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，$y\neq0$

120-1　標問 **120** (1)より 2 点 $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ と $\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は，円 C の直径の両端であり $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ を満たす．したがって，b_n が円 C 上にあるとすると

$$\frac{b_n-\beta}{b_n-\alpha}=ti\quad(t\text{ は 0 でない実数})$$

このとき

$$\frac{b_{n+1}-\beta}{b_{n+1}-\alpha}=\frac{1+\frac{1}{b_n}-\beta}{1+\frac{1}{b_n}-\alpha}=\frac{\frac{1}{b_n}+\alpha}{\frac{1}{b_n}+\beta}=\frac{1+\alpha b_n}{1+\beta b_n}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{b_n+\frac{1}{\alpha}}{b_n+\frac{1}{\beta}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{b_n-\beta}{b_n-\alpha}=\frac{\alpha t}{\beta}\cdot i\quad(\text{純虚数})$$

ゆえに，b_{n+1} も円 C 上にある．

注 有理数 p_n，q_n を用いて，$b_n=p_n+q_ni$ と表せる（厳密には数学的帰納法）から，$b_n\neq\alpha$，$b_n\neq\beta$ である．

120-2　(1)　$a_{n+1}=\frac{a_n-5}{1-5a_n}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{-4a_n-4}{6a_n-6}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n+1}{a_n-1}=-\frac{2}{3}b_n\qquad\cdots\cdots①$$

次に，b_n が純虚数であることを示す．$b_1=\dfrac{3+i+(3-i)}{3+i-(3-i)}=-3i$,

$b_n=ti$（t は 0 でない実数）とすると，①より，$b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}ti$.

したがって，数学的帰納法により，b_n は純虚数である．

(2) ①より，$b_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}b_1 \longrightarrow 0$（$n\to\infty$）．よって，$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ より

$a_n=\dfrac{b_n+1}{b_n-1}\to \mathbf{-1}$（$n\to\infty$）

(3) b_n の純虚数であるから，$b_n+\overline{b_n}=0$．よって，

$$\frac{a_n+1}{a_n-1}+\frac{\overline{a_n}+1}{\overline{a_n}-1}=0$$

$$(a_n+1)(\overline{a_n}-1)+(a_n-1)(\overline{a_n}+1)=0 \qquad \therefore\quad |a_n|=1$$

ゆえに，a_n ($n=1$，2，…) は単位円：$|z|=1$ 上にある．

122 (1) $z=1+\cos t+i\sin t=2\cos^2\dfrac{t}{2}+2i\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$$=2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right) \quad \cdots\cdots①$$

$-\pi<t<\pi$ より $2\cos\dfrac{t}{2}>0$ であるから

$$|z|=\mathbf{2\cos\frac{t}{2}},\quad \arg z=\mathbf{\frac{t}{2}}$$

(2) ①と，ド・モアブルの定理より

$$w=\frac{2i}{z^2}=\frac{2i}{4\cos^2\frac{t}{2}}(\cos t-i\sin t)=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}(\sin t+i\cos t)$$

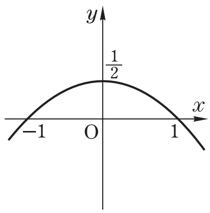
$w=x+yi$ とおくと

$$x=\frac{\sin t}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$$

$$y=\frac{\cos t}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)$$ ← $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

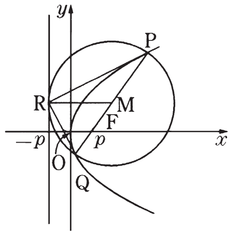
$$=-\frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots②$$

$-\pi<t<\pi$ より，$x=\tan\dfrac{t}{2}$ はすべての実数値をとるから，w は②で表される放物線全体を描く．



第7章 式と曲線

123 (1) $P\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$, $Q\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$, $\alpha\beta \neq 0$



とおく．直線 PQ の方程式は

$$x=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^2}{4p}-\frac{\beta^2}{4p}\right)(y-\alpha)+\frac{\alpha^2}{4p}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{4p}y-\frac{\alpha\beta}{4p}$$

これが $F(p,\ 0)$ を通るから，$p=-\dfrac{\alpha\beta}{4p}$

$\therefore\ \alpha\beta=-4p^2$ ……①

P，Q での接線の方程式は

$$\alpha y=2p\left(x+\frac{\alpha^2}{4p}\right),\ \beta y=2p\left(x+\frac{\beta^2}{4p}\right)$$

連立して解くと，交点Rの座標は

$$R\left(\frac{\alpha\beta}{4p},\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

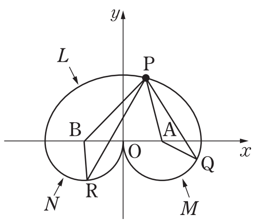
点Pの座標を $(x_P,\ y_P)$ で表す．他も同様とする．すると，①より

$$\begin{cases} x_R=\dfrac{\alpha\beta}{4p}=-p \\ (\text{P，Q での接線の傾きの積})=\dfrac{2p}{\alpha}\cdot\dfrac{2p}{\beta}=-1 \end{cases}$$

ゆえに，P，Q での接線は準線上で直交する．

(2) (1)より，PQ を直径とする円は点Rを通る．さらに，PQ の中点 (円の中心) をMとすると，$y_M=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=y_R$．したがって，RM は準線と垂直だから，PQ を直径とする円は準線と接する．

124-1 M，N の中心をそれぞれ A，B とする．Pを固定して，Q，R を動かすと



$PQ \leqq PA+AQ=PA+1$ ……①

$PR \leqq PB+BR=PB+1$ ……②

①の等号は PQ がAを通るとき，②の等号は PR がBを通るときに成立する．2つの等号が成立するとき，①+②より，

$PQ+PR=(PA+PB)+2$ ……③

L の焦点は $(\pm1,\ 0)$ で A，B と一致するから，L 上の任意の点Pに対して $PA+PB=4$ (楕円の定義) である．これを③に代入すると，$PQ+PR=6$

ゆえに，(求める最大値)$=\mathbf{6}$

124-2 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，Pでの接線の方程式は

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1 \qquad \therefore \quad \mathrm{Q}\left(\frac{a}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right)$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{b}{\sin\theta}=\frac{ab}{\sin 2\theta}$$

S は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小となり

(最小値)$=\boldsymbol{ab}$

124-3 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(1) $\mathrm{OP}=r_{\mathrm{P}}$，$\mathrm{OQ}=r_{\mathrm{Q}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸の正方向となす角を θ とすると

$$\mathrm{P}(r_{\mathrm{P}}\cos\theta,\ r_{\mathrm{P}}\sin\theta)$$

Pは楕円上にあるから

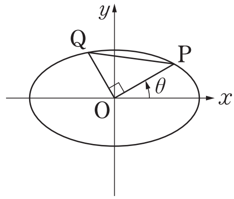
$$r_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2} \qquad \cdots\cdots①$$

θ を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ とおき

$$\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，$\dfrac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}+\dfrac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ （一定） $\cdots\cdots③$



Pと θ の対応関係が楕円の媒介変数表示と異なる点に注意

(2) $S=\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{P}}r_{\mathrm{Q}}$ であるから，相加平均と相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{S}=2\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}}\leqq\frac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}+\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \quad (\because \ ③)$$

等号は $r_{\mathrm{P}}=r_{\mathrm{Q}}$ のとき成り立つから

$$(S\text{の最小値})=\boldsymbol{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

⬅ ①，②より $\cos^2\theta=\sin^2\theta$，すなわち $\tan\theta=\pm1$ のとき

125 (1) 直線 AB の方程式は，その傾きが $\tan\theta$ だから

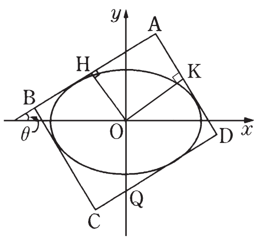
$$y=x\tan\theta+\sqrt{2\tan^2\theta+1}$$

原点からこの直線に下ろした垂線の足をHとすると，点と直線の距離の公式により

$$\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{2\tan^2\theta+1}}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1+\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AD}=2\mathrm{OH}=\boldsymbol{2\sqrt{1+\sin^2\theta}}$$



AD の式で θ を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ に置きかえて

$$\mathrm{AB}=\boldsymbol{2\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

(2) 長方形Rの面積をSとすると，

$$S=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}=4\sqrt{(1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)}=4\sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=4\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$$

したがって，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$，すなわち

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$ のとき，(Sの最大値)$=\boldsymbol{6}$

注 (1)より

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{OK}^2=1+\sin^2\theta+(1+\cos^2\theta)=3$$

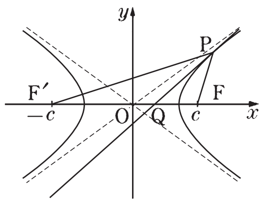
となるから，(1)は実質的に標問 **125** (2)の別解になっている．また，(2)は

$$S=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}\leqq\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AB}^2}{2}=6$$

としてもよい．

126-1 ㋕より $\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right)$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

として一般性を失わない．このとき，㋖より



$$\mathrm{PF}=\frac{c-a\cos\theta}{\cos\theta},\quad \mathrm{PF'}=\frac{c+a\cos\theta}{\cos\theta}$$

一方，P での接線は

$$\frac{\dfrac{a}{\cos\theta}x}{a^2}-\frac{b\tan\theta\cdot y}{b^2}=1$$

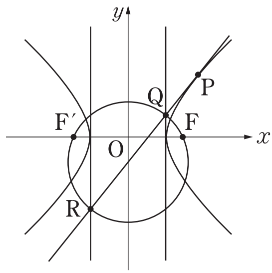
$$\therefore\quad \frac{1}{a\cos\theta}x-\frac{\tan\theta}{b}y=1$$

よって，$\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ 0)$ となるので

$$\mathrm{QF}=c-a\cos\theta,\quad \mathrm{QF'}=a\cos\theta-(-c)=a\cos\theta+c$$

したがって，$\mathrm{PF}:\mathrm{PF'}=\mathrm{QF}:\mathrm{QF'}$ が成立し，接線は $\angle\mathrm{FPF'}$を 2 等分する．

126-2 $\mathrm{P}(a\alpha,\ b\beta)$ $(\alpha^2-\beta^2=1,\ \beta\neq0)$ における接線



$$\frac{\alpha x}{a}-\frac{\beta y}{b}=1$$

と直線 $x=a$，$x=-a$ との交点は，それぞれ

$$\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{b(\alpha-1)}{\beta}\right)$$
$$\mathrm{R}\left(-a,\ -\frac{b(\alpha+1)}{\beta}\right)$$

よって，Cの焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$\mathrm{F'}(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ に対し

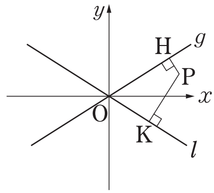
$$\overrightarrow{\mathrm{QF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RF}}=(\sqrt{a^2+b^2}-a)(\sqrt{a^2+b^2}+a)-\frac{b^2(\alpha^2-1)}{\beta^2}$$
$$=b^2-\frac{b^2\beta^2}{\beta^2}=0\qquad(\because\quad \alpha^2-\beta^2=1)$$

同様にして，$\overrightarrow{QF'}\cdot\overrightarrow{RF'}=0$ となるから

$$\angle QFR=\angle QF'R=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに，F，F′ は QR を直径とする円周上にある．

127 g と l のなす角を 2 等分する 2 直線を座標軸にとり，g と l の方程式をそれぞれ



$$g: y=mx, \quad l: y=-mx$$

とおくことができる．ただし，$m>0$ とする．

いま，点 P$(x,\ y)$ から g，l に下ろした垂線の足をそれぞれ H，K とすれば

$$PH=\frac{|mx-y|}{\sqrt{m^2+1}}, \quad PK=\frac{|mx+y|}{\sqrt{m^2+1}}$$

したがって，一定値を $k\,(>0)$ とおくと

$$PH\cdot PK=\frac{|(mx-y)(mx+y)|}{m^2+1}=\frac{|m^2x^2-y^2|}{m^2+1}=k$$

$$\therefore\ |m^2x^2-y^2|=k(m^2+1)$$

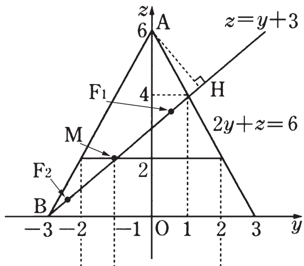
さらに，$k(m^2+1)=a$ $(a>0)$ とおけば　$|m^2x^2-y^2|=a$

したがって

$$m^2x^2-y^2=a \quad \text{または} \quad m^2x^2-y^2=-a$$

これらは，いずれも $y=\pm mx$ を漸近線とする双曲線である．

128 (1) 楕円の中心 M と焦点 F_1，F_2 はいずれも yz 平面上にある．直線 $l: z=y+3$ と $2y+z=6$ の交点は (1, 4)．M はこの点と B$(-3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点だから



$$M(\mathbf{0},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{2})$$

この楕円の長半径を a，短半径を b とすると

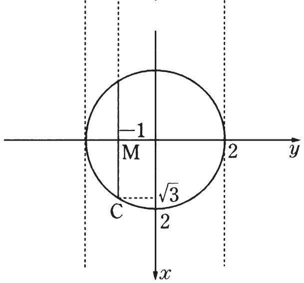
$$a=BM=2\sqrt{2}, \quad b=CM=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ F_1M=F_2M=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに，焦点の座標は，$\vec{l}=(0,\ 1,\ 1)$ として

$$\overrightarrow{OM}\pm\sqrt{5}\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(0,\ -1,\ 2)\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)$$

$$=\left(\mathbf{0},\ \mathbf{-1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}},\ \mathbf{2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}}\right) \text{(複号同順)}$$



(2) 問題の立体は，A を頂点とし切り口を底面とする楕円錐である．

$$\text{(底面積)}=\pi ab=2\sqrt{6}\pi \quad \text{(高さ)}=AH=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

であるから

$$\text{(体積)}=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{6}\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\mathbf{2\sqrt{3}\pi}$$

129 (1) $r>0$ のとき，$r=2a\cos(\theta-\alpha)=2a(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$

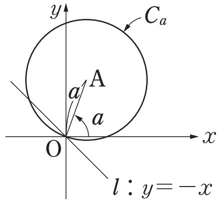
$$\iff r^2=2a(r\cos\theta\cos\alpha+r\sin\theta\sin\alpha)$$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ であるから

$$x^2+y^2=2a\cos\alpha\cdot x+2a\sin\alpha\cdot y$$

$$\therefore\quad (x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2=a^2$$

ゆえに，$r=0$ の場合も含めて C_α は $\mathrm{A}(\boldsymbol{a\cos\alpha},\ \boldsymbol{a\sin\alpha})$ を中心とする半径 $\boldsymbol{a}$ の円である．



(2) C_α は OA を半径とするから，C_α が直線 l : $y=-x$ に接する条件は，$\mathrm{OA}\perp l$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が x 軸の正方向となす角を考え

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{4}+n\pi}$$

$\alpha>0$ より，n は負でない整数である．

130 $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2d\theta$ において

$$\{r(\theta)\}^2=\frac{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}=\frac{9a^2\tan^2\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{(1+\tan^3\theta)^2}$$

⬅ 分母，分子を $\cos^6\theta$ で割った

$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，$t:0\to\infty\ \left(\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$S=\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2}{2(1+t^3)^2}dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt\quad(1+t^3=u\ \text{とおく})$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_1^{1+R^3}\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{u^2}du=\lim_{R\to\infty}\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+R^3}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{3a^2}{2}\left(1-\frac{1}{1+R^3}\right)=\boldsymbol{\frac{3a^2}{2}}$$

注 葉線が直線 $y=x$ に関して対称であることを使えば，ただし書きは不用で

$t:0\to1\ \left(\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$S=2\int_0^1\frac{9a^2t^2}{2(1+t^3)^2}dt=\int_1^2 3a^2\cdot\frac{1}{u^2}du=3a^2\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2=\frac{3a^2}{2}$$

131 極を原点，始線を x 軸の正方向にとる．

$2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$ より

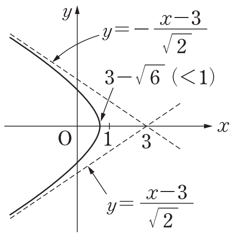
$$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6}\,(1-x)$$

$$\iff\begin{cases}4(x^2+y^2)=6(1-x)^2 & \cdots\cdots①\\ x\leqq1 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より

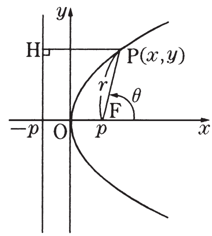
$$(x-3)^2-2y^2=6$$

$$\therefore\quad \frac{(x-3)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1\qquad\cdots\cdots③$$



ゆえに，**極方程式の表す曲線は双曲線③の②の範囲にある部分．**

132 (1)　放物線上の点を P$(r,\ \theta)$ とおき，P から準線 $x=-p$ に下ろした垂線を PH とする．また，P，H の x 座標をそれぞれ x_P，x_H とする．



$$\mathrm{PH}=x_\mathrm{P}-x_\mathrm{H}=(p+r\cos\theta)-(-p)=2p+r\cos\theta$$

PF＝PH より，$r=2p+r\cos\theta$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r=\frac{2p}{1-\cos\theta}}$$

(2)　Q，R，S の偏角は，それぞれ $\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$，$\theta-\dfrac{\pi}{2}$ としてよいから

$$\frac{1}{\mathrm{FP}\cdot\mathrm{FQ}}+\frac{1}{\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}}=\frac{1-\cos\theta}{2p}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2p}+\frac{1+\sin\theta}{2p}\cdot\frac{1-\sin\theta}{2p}$$

$$=\frac{2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{4p^2}=\frac{1}{4p^2}\quad（一定）$$

注　これも円錐曲線全体の性質である．研究 を真似て証明してみよ．

133　$A+B=a+b$ は明らかであるから，$AB-H^2=ab-h^2$ を示す．

$$AB-H^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta\right)^2$$

$$-\left(h\cos2\theta-\frac{a-b}{2}\sin2\theta\right)^2$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left\{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+h^2\right\}=ab-h^2$$

134　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$　……①

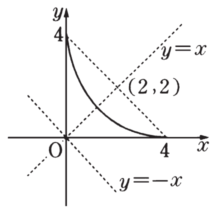
①の両辺は正であるから，２乗して整理すると

$$2\sqrt{xy}=4-(x+y)\quad\cdots\cdots②$$

さらに２乗して

$$4xy=16-8(x+y)+(x+y)^2$$

$$\therefore\quad (x-y)^2-8(x+y)+16=0\quad\cdots\cdots③$$



$$①\iff②\iff\begin{cases}③\\ x+y\leqq4\end{cases}\quad\cdots\cdots④$$

である．

点 $(x,\ y)$ を原点のまわりに $-45°$ 回転した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots⑤$$

$x-y=-\sqrt{2}\,Y$，$x+y=\sqrt{2}\,X$ を③に代入して

$$2Y^2-8\sqrt{2}\,X+16=0\qquad\therefore\quad Y^2=4\sqrt{2}\,(X-\sqrt{2})$$

これは，焦点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，準線 $X=0$ の放物線である．

したがって，③も放物線であり，⑤により

焦点 $(2,\ 2)$，準線 $x+y=0$

ゆえに，①はこの放物線の④を満たす部分．