数学Ⅱ・B＋ベクトル標準問題精講［四訂版］

亀田隆著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

第1章 式と証明

1 (1) 与式を $(x^3)^2-(y^3)^2$ とみると

$$\begin{aligned}&x^6-y^6\\&=(x^3)^2-(y^3)^2\\&=(x^3+y^3)(x^3-y^3)\\&=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)\\&\qquad\times(x^2+xy+y^2)\\&=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)}\\&\qquad\boldsymbol{\times(x^2+xy+y^2)}\end{aligned}$$

別解 与式を $(x^2)^3-(y^2)^3$ とみると

$$\begin{aligned}&x^6-y^6\\&=(x^2)^3-(y^2)^3\\&=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)\\&=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2\}\\&=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)\\&\qquad\times(x^2+xy+y^2)\end{aligned}$$

(2) $X=x-2z,\ Y=y-2z$ とおくと

$$\begin{aligned}&(x-2z)^3+(y-2z)^3-(x+y-4z)^3\\&=X^3+Y^3-(X+Y)^3\\&=(X+Y)\{(X^2-XY+Y^2)\\&\qquad-(X^2+2XY+Y^2)\}\\&=-3XY(X+Y)\\&=\boldsymbol{-3(x-2z)(y-2z)(x+y-4z)}\end{aligned}$$

(3) 公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
を利用する．

$$\begin{aligned}&x^3-27y^3+9xy+1\\&=x^3+(-3y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-3y)\cdot 1\\&=(x-3y+1)\\&\qquad\times(x^2+9y^2+1^2+3xy+3y-x)\\&=\boldsymbol{(x-3y+1)}\\&\qquad\boldsymbol{\times(x^2+3xy+9y^2-x+3y+1)}\end{aligned}$$

2-1 $(a-b)^3(b-c)^4(c-a)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned}&{}_3C_l a^{3-l}(-b)^l\times{}_4C_m b^{4-m}(-c)^m\\&\qquad\times{}_5C_n c^{5-n}(-a)^n\\&={}_3C_l\cdot{}_4C_m\cdot{}_5C_n\cdot(-1)^{l+m+n}\\&\qquad\times a^{3-l+n}b^{4+l-m}c^{5+m-n}\end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{l}l,\ m,\ n \text{ は } 0\leqq l\leqq 3,\ 0\leqq m\leqq 4,\\ 0\leqq n\leqq 5 \text{ をみたす整数}\quad\cdots\cdots(*)\end{array}\right)$

として表すことができる．

a^8b^4 の項が現れるのは

$$\begin{cases}3-l+n=8\\4+l-m=4\\5+m-n=0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}n=l+5\\m=l\end{cases}$$

(*)に注意すると

$(l,\ m,\ n)=(0,\ 0,\ 5)$

よって展開式の a^8b^4 の係数は

${}_3C_0\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_5(-1)^5=\boldsymbol{-1}$

a^5b^6c の項が現れるのは

$$\begin{cases}3-l+n=5\\4+l-m=6\\5+m-n=1\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}n=l+2\\m=l-2\end{cases}$$

(*)に注意すると

$(l,\ m,\ n)=(2,\ 0,\ 4),\ (3,\ 1,\ 5)$

よって展開式の a^5b^6c の係数は

${}_3C_2\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_4(-1)^6+{}_3C_3\cdot{}_4C_1\cdot{}_5C_5(-1)^9$
$=15-4=\boldsymbol{11}$

$a^3b^4c^5$ の項が現れるのは

$$\begin{cases}3-l+n=3\\4+l-m=4\\5+m-n=5\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}n=l\\m=l\end{cases}$$

(*)に注意すると

$(l,\ m,\ n)$
$=(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$

よって，$a^3b^4c^5$ の係数は

${}_3C_0\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_0(-1)^0+{}_3C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_5C_1(-1)^3$
$+{}_3C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_5C_2(-1)^6+{}_3C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_5C_3(-1)^9$
$=1-60+180-40$
$=\boldsymbol{81}$

2-2 $(1+t+\cdots+t^5)(1+t+\cdots+t^5)$
$\times(1+t+\cdots+t^5)$ を展開するとき，第1，

第 2，第 3 因子の中から選ばれる項をそれぞれ t^a，t^b，t^c とすると，得られる単項式は t^{a+b+c} である．ここで，
$0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5$ である．
$a+b+c=4$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$\{0,\ 0,\ 4\},\ \{0,\ 1,\ 3\},\ \{0,\ 2,\ 2\},\ \{1,\ 1,\ 2\}$$

から作られる順列で

$$3+3!+3+3=15 \text{（通り）}$$

ある．ゆえに，t^4 の係数は **15** である．
同様に，$a+b+c=7$ となる $(a,\ b,\ c)$ は

$$\{0,\ 2,\ 5\},\ \{0,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

から作られる順列で

$$3!+3!+3+3!+3+3=27 \text{（通り）}$$

ある．ゆえに，t^7 の係数は **27** である．

別解　上の解答における t^4 の係数は

$$a+b+c=4,\ 0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数である．これは 3 種類のものの中から重複を許して 4 個とる取り方の総数（4 個の球と 2 本の仕切り棒の並べ方の総数）に一致するから

$${}_3H_4={}_6C_4=15$$

同様にして，t^7 の係数は

$$a+b+c=7,\ 0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数である．条件 $0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5$ を無視すると

$${}_3H_7={}_9C_7=36 \text{（通り）}$$

あり，これらから $\{7,\ 0,\ 0\}$，$\{6,\ 1,\ 0\}$ から作られる順列の総数を除けばよいから

$$36-(3+3!)=27$$

3-1　二項定理により

$$\begin{aligned}
&(100.1)^7=(10^2+10^{-1})^7\\
&=(10^2)^7+{}_7C_1(10^2)^6\cdot 10^{-1}+{}_7C_2(10^2)^5\cdot 10^{-2}\\
&\quad+{}_7C_3(10^2)^4\cdot 10^{-3}+{}_7C_4(10^2)^3\cdot 10^{-4}\\
&\quad+{}_7C_5(10^2)^2\cdot 10^{-5}+{}_7C_6\cdot 10^2\cdot 10^{-6}+10^{-7}\\
&=10^{14}+7\cdot 10^{11}+21\cdot 10^8+35\cdot 10^5\\
&\quad+\underline{35\cdot 10^2+21\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-4}}+10^{-7}
\end{aligned}$$

百の位と小数第 4 位の数字を求めるには，波線部分を加えればよい．

$$\begin{aligned}
&35\cdot 10^2+21\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-4}\\
&=3500+2.1+0.0007\\
&=3502.1007
\end{aligned}$$

よって，百の位の数字は **5**，小数第 4 位の数字は **7**

3-2　(1)　$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ は p 個の $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ の積であり，展開したときの各項は p 個の因数それぞれから x_1，x_2，…，x_r のうちの 1 個をとりその積をつくることにより得られる．
とくに $x_1{}^{p_1}x_2{}^{p_2}\cdots x_r{}^{p_r}$ は，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，…，x_r を p_r 個とった積であるから，とり出した p 個の数の並べ方は同じものを含む順列の数だけある．よって，求める係数は

$$\boldsymbol{\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}}$$

(2)　$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$

$$-(x_1{}^p+x_2{}^p+\cdots+x_r{}^p)\ \cdots\cdots(*)$$

を展開したときの単項式 $x_1{}^{p_1}x_2{}^{p_2}\cdots x_r{}^{p_r}$ は，(1)で展開した式から，$x_1{}^p$，$x_2{}^p$，…，$x_r{}^p$ を除いたものであるから

$$p_k<p\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\quad \cdots\cdots①$$

である．また，単項式の係数

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$$

は整数であり，p は素数であるから，①により $p_k!(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ は p と互いに素である．したがって，この係数は p の倍数であり，(*) は p で割り切れる．

(3)　(*)において，$x_k=1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ とすると(2)から

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{r\text{個}})^p-(\underbrace{1^p+1^p+\cdots+1^p}_{r\text{個}})$$

$$=r^p-r$$

は p で割り切れる．
$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$ であり r は p で割り切れないので，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる．

4-1 二項定理を用いる．

$${}_nC_0+3{}_nC_1+3^2{}_nC_2+\cdots+3^n{}_nC_n$$
$$={}_nC_0\cdot3^0\cdot1^n+{}_nC_1\cdot3^1\cdot1^{n-1}+{}_nC_2\cdot3^2\cdot1^{n-2}$$
$$+\cdots+{}_nC_n\cdot3^n\cdot1^0$$
$$=(3+1)^n$$
$$=4^n$$

4-2 $\dfrac{{}_nC_k}{k+1}=\dfrac{n!}{(k+1)\cdot(n-k)!k!}$

$$=\frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{{}_{n+1}C_{k+1}}{n+1}$$

であるから，与式は

$$\frac{{}_nC_0}{2}+\frac{{}_nC_1}{2\cdot2^2}+\frac{{}_nC_2}{3\cdot2^3}+\frac{{}_nC_3}{4\cdot2^4}$$
$$+\cdots+\frac{{}_nC_n}{(n+1)\cdot2^{n+1}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{(k+1)\cdot2^{k+1}}$$

($\sum_{k=0}^{n}a_k$ は $a_0+a_1+\cdots+a_n$ を表す)

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+1}C_{k+1}}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\cdot1^{n-k}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{n+1}-{}_{n+1}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot1^{n+1}\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right\}}$$

5 $t=x-2$ とおくと

$$(\text{左辺})=(t+2)^3+1$$
$$=t^3+6t^2+12t+9$$
$$(\text{右辺})=t^3+at^2+bt+c$$

係数を比較すると

$$a=\mathbf{6},\ b=\mathbf{12},\ c=\mathbf{9}$$

別解 すべての x について成り立つので，左辺と右辺に

$x=2$ を代入して

$$9=c \quad \cdots\cdots①$$

$x=0$ を代入して

$$1=-8+4a-2b+c \quad \cdots\cdots②$$

$x=-1$ を代入して

$$0=-27+9a-3b+c \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$a=6,\ b=12,\ c=9\ (\text{必要})$$

このとき（右辺）$=x^3+1$ となる．（十分）

6 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\ (a\neq0)$

とおく．

$$(x+1)f(x+1)$$
$$=a(x+1)^{n+1}+b(x+1)^n+\cdots$$
$$=ax^{n+1}+\{a(n+1)+b\}x^n+\cdots$$
$$(x-1)f(x-1)$$
$$=a(x-1)^{n+1}+b(x-1)^n+\cdots$$
$$=ax^{n+1}+\{-a(n+1)+b\}x^n+\cdots$$

2 式の差をとると，n 次の項の係数は

$$\{a(n+1)+b\}-\{-a(n+1)+b\}$$
$$=2a(n+1)$$

$a\neq0$ より与式の左辺の最高次数は n である．

ゆえに，与式の右辺の最高次の項と比べて

$$2a(n+1)x^n=x^2$$
$$\therefore\quad n=\mathbf{2},\ a=\frac{1}{6}$$

これより $f(x)=\dfrac{1}{6}x^2+bx+c$ であり

$$(x+1)f(x+1)$$
$$=(x+1)\left\{\frac{1}{6}(x+1)^2+b(x+1)+c\right\}$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+\left(\frac{1}{2}+2b+c\right)x$$
$$+\frac{1}{6}+b+c$$
$$(x-1)f(x-1)$$
$$=(x-1)\left\{\frac{1}{6}(x-1)^2+b(x-1)+c\right\}$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\left(-\frac{1}{2}+b\right)x^2+\left(\frac{1}{2}-2b+c\right)x$$
$$-\frac{1}{6}+b-c$$

ゆえに，

$$(x+1)f(x+1)-(x-1)f(x-1)$$
$$=x^2+4bx+\frac{1}{3}+2c$$

与式の右辺と比べて

$$4b=1,\ \frac{1}{3}+2c=1$$

ゆえに，

$$b=\frac{1}{4},\ c=\frac{1}{3}$$

したがって，

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}$$

このとき，

$$f(0)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

7 (1)

$$\begin{array}{r}
x^3+2x^2+x+3 \\
x^2+4x-1\,\overline{)\,x^5+6x^4+8x^3+5x^2+13x+1} \\
\underline{x^5+4x^4-\ x^3} \\
2x^4+9x^3+5x^2 \\
\underline{2x^4+8x^3-2x^2} \\
x^3+7x^2+13x \\
\underline{x^3+4x^2-\ \ x} \\
3x^2+14x+1 \\
\underline{3x^2+12x-3} \\
2x+4
\end{array}$$

したがって，余りは $\mathbf{2x+4}$

(2) $\alpha=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$$

$\alpha+2=\sqrt{5}$ より

$$(\alpha+2)^2=5$$

$\therefore\ \alpha^2+4\alpha-1=0$

(1)より

$$P(\alpha)=(\alpha^2+4\alpha-1)(\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+3)+2\alpha+4$$

$$=2\alpha+4=2(\sqrt{5}-2)+4=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

8 $f(x)=(x-a)(x-2)^2+(x-b)(x-1)^2+(x-c)x^2$

とおく．$f(x)$ は x についての 3 次式で，x^3 の係数は 3 である．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ると $2x-3$ が余りであるから

$$f(x)=(3x+d)(x-2)^2+2x-3$$

と表される．

$$f(1)=3+d+2-3=1$$

より　$d=-1$

したがって，

$$f(x)=(3x-1)(x-2)^2+2x-3$$
$$=3x^3-13x^2+18x-7$$

一方

$$f(x)=3x^3-(a+b+c+6)x^2+(4a+2b+5)x-4a-b$$

なので，係数を比べて

$$\begin{cases} a+b+c+6=13 \\ 4a+2b+5=18 \\ 4a+b=7 \end{cases}$$

これらを解いて

$$a=\mathbf{\frac{1}{4}},\ b=\mathbf{6},\ c=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

9 (1) $n=5m+r$

$(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ のとき

$$x^n=x^{5m+r}=(x^5)^m x^r$$

$X=x^5-1$ とおくと

$x^n=(X+1)^m x^r$

$=\{(X$ の 1 次以上の整式$)+1\}x^r$

$=X(X$ の整式$)x^r+x^r$

$=(x^5-1)(x$ の整式$)+x^r$

よって，$\boldsymbol{r=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ **のとき**

余りはそれぞれ　$\boldsymbol{x^r}$

$\boldsymbol{r=5}$ **のとき**

$x^n=(x^5-1)(x$ の整式$)+x^5$

$=(x^5-1)(x$ の整式$)+(x^5-1)+1$

$=(x^5-1)\{(x$ の整式$)+1\}+1$

よって，余りは　**1**

(2) (i) $n=5k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$$x^n=x^{5k}=(x^5-1)Q_1(x)+1$$

とおける．

$$x^{2n}=(x^n)^2$$
$$=(x^5-1)^2\{Q_1(x)\}^2+2(x^5-1)Q_1(x)+1$$
$$=(x^5-1)Q_2(x)+1$$

と x の整式 $Q_2(x)$ を用いて表せる．同様に x の整式 $Q_3(x)$，$Q_4(x)$ を用いて

$$x^{3n}=(x^n)^3$$
$$=(x^5-1)Q_3(x)+1$$
$$x^{4n}=(x^n)^4$$

$$=(x^5-1)Q_4(x)+1$$

と表せる．このとき

$$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$$
$$=(x^5-1)\{Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x)$$
$$+Q_4(x)\}+4$$

ここで，x^5-1

$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

であるから，求める余りは 4

(ii) $n=5k+1$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(i)と同様に考えて，x の整式 $R_1(x)$，$R_2(x)$，$R_3(x)$，$R_4(x)$ を用いて

$$x^n=(x^5-1)R_1(x)+x$$
$$x^{2n}=(x^5-1)R_2(x)+x^2$$
$$x^{3n}=(x^5-1)R_3(x)+x^3$$
$$x^{4n}=(x^5-1)R_4(x)+x^4$$

と表せる．このとき

$$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$$
$$=(x^5-1)\{R_4(x)+R_3(x)+R_2(x)$$
$$+R_1(x)\}+\underline{x^4+x^3+x^2+x}$$
$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$\times\{R_1(x)+R_2(x)+R_3(x)+R_4(x)\}$$
$$+(x^4+x^3+x^2+x+1)-1$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\times(x\text{ の整式})-1$$

ゆえに，余りは -1

(iii) $n=5k+2$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(ii)の〜〜〜の部分は

$$x^8+x^6+x^4+x^2$$
$$=(x^5-1+1)x^3+(x^5-1+1)x+x^4+x^2$$
$$=(x^5-1)(x^3+x)+x^4+x^3+x^2+x+1-1$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x\text{ の整式})-1$$

ゆえに，余りは -1

(iv) $n=5k+3$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(ii)の〜〜〜の部分は

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3$$
$$=(x^5-1+1)^2x^2+(x^5-1+1)x^4$$
$$+(x^5-1+1)x+x^3$$
$$=(x^5-1)(x\text{ の整式})$$
$$+x^4+x^3+x^2+x+1-1$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x\text{ の整式})-1$$

ゆえに，余りは -1

(v) $n=5k+4$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

同様に，余りは -1

以上より，求める余りは

$n=5k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき　4

$n=5k+r$ $(k=0, 1, 2, \cdots : r=1, 2, 3, 4)$ のとき　-1

10 (1) (与式)

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\mathbf{0}$$

(2) (与式)

$$=\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-a^2(b-c)+a(b^2-c^2)-bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-\{a^2-a(b+c)+bc\}}{(a-b)(c-a)}$$
$$=\frac{-(a-b)(a-c)}{(a-b)(c-a)}=\mathbf{1}$$

11-1 右辺を通分すると

(右辺)

$$=\frac{a(x-2)^3+bx(x-2)^2+cx(x-2)+dx}{x(x-2)^3}$$
$$=\frac{(a+b)x^3+(-6a-4b+c)x^2+(12a+4b-2c+d)x-8a}{x(x-2)^3}$$

となる．左辺と右辺の分子は等しく

$$2x^3-7x^2+11x-16$$
$$=(a+b)x^3+(-6a-4b+c)x^2$$
$$+(12a+4b-2c+d)x-8a$$

であり，これが恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 6a+4b-c=7 \\ 12a+4b-2c+d=11 \\ 8a=16 \end{cases}$$

$\therefore$　$\boldsymbol{a=2,\ b=0,\ c=5,\ d=-3}$

11-2 与えられた等式は

$$\frac{a(x-2)-(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}=\frac{d}{2x^2+bx+c}$$
$$\therefore\quad \frac{(a-2)x-2a-1}{(2x+1)(x-2)}=\frac{d}{2x^2+bx+c}$$

さらに変形し

$\{(a-2)x-2a-1\}(2x^2+bx+c)$

$=d(2x+1)(x-2)$ ……①

①の左辺の x^3 の係数は $2(a-2)$ であり，右辺の x^3 の項はないから，

$$2(a-2)=0 \qquad \therefore \quad a=2$$

このとき，

$$-5(2x^2+bx+c)=d(2x^2-3x-2)$$

係数を比べて

$$\begin{cases} -10=2d \\ -5b=-3d \\ -5c=-2d \end{cases}$$

これらを解いて

$$a=\mathbf{2},\ b=\mathbf{-3},\ c=\mathbf{-2},\ d=\mathbf{-5}$$

12-1

$$\frac{x}{3(y+z)}=\frac{y}{3(z+x)}=\frac{z}{3(x+y)}=k$$

とおく．このとき

$$x=3(y+z)k$$
$$y=3(z+x)k$$
$$z=3(x+y)k$$

となる．これらを加えると

$$x+y+z=6(x+y+z)k$$
$$\therefore \quad (6k-1)(x+y+z)=0$$

$\therefore \quad k=\dfrac{1}{6}$ または $x+y+z=0$

(i) $k=\dfrac{1}{6}$ となるのは，$\begin{cases} 2x=y+z \\ 2y=z+x \\ 2z=x+y \end{cases}$

より $x=y=z\,(\neq 0)$ のときである．

(ii) $x+y+z=0$ のとき，$y+z=-x$ であるから

$$\frac{x}{3(y+z)}=\frac{x}{3\cdot(-x)}=-\frac{1}{3}$$

同じく

$$\frac{y}{3(z+x)}=\frac{y}{3\cdot(-y)}=-\frac{1}{3}$$
$$\frac{z}{3(x+y)}=\frac{z}{3\cdot(-z)}=-\frac{1}{3}$$

以上より，$k=\mathbf{\dfrac{1}{6}},\ \mathbf{-\dfrac{1}{3}}$

12-2 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$

とおく．このとき

$$b+c=ak$$
$$c+a=bk$$
$$a+b=ck$$

となる．これらを加えると

$$2(a+b+c)=(a+b+c)k$$

$a+b+c\neq 0$ より $k=2$

ゆえに，

$$b+c=2a,\ c+a=2b,\ a+b=2c$$
$$\therefore \quad a=b=c$$

$a=b=c=l\,(\neq 0)$ とおくと

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}{abc}$$

$$=\frac{3l\cdot 3l^2-l^3}{l^3}$$

$=\mathbf{8}$

13-1 $x=a^2+9$ のとき

$$\sqrt{x+6a}=\sqrt{a^2+6a+9}$$
$$=\sqrt{(a+3)^2}=|a+3|$$
$$\sqrt{x-8a+7}=\sqrt{a^2-8a+16}$$
$$=\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|$$

ゆえに，

与式$=|a+3|-|a-4|$

したがって，

$a\leqq-3$ のとき

与式$=-(a+3)-\{-(a-4)\}=\mathbf{-7}$

$-3\leqq a\leqq 4$ のとき

与式$=a+3-\{-(a-4)\}=\mathbf{2a-1}$

$a\geqq 4$ のとき

与式$=a+3-(a-4)=\mathbf{7}$

13-2 $x\leqq 1$ のとき，与えられた不等式は

$$-(x-1)-2(x-3)\leqq 11$$
$$\therefore \quad -3x\leqq 4$$
$$\therefore \quad x\geqq -\frac{4}{3}$$

$x\leqq 1$ とあわせると

$$-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 1 \qquad \cdots\cdots①$$

$1\leqq x\leqq 3$ のとき，与えられた不等式は

$$x-1-2(x-3)\leqq 11$$

$$\therefore\quad -x\leqq 6$$

$$\therefore\quad x\geqq -6$$

$1\leqq x\leqq 3$ をみたす x はすべて不等式をみたす．

$$\therefore\quad 1\leqq x\leqq 3 \qquad \cdots\cdots②$$

$3\leqq x$ のとき，与えられた不等式は

$$x-1+2(x-3)\leqq 11$$

$$\therefore\quad 3x\leqq 18$$

$$\therefore\quad x\leqq 6$$

$3\leqq x$ とあわせると

$$3\leqq x\leqq 6 \qquad \cdots\cdots③$$

求める x の範囲は①，②，③をあわせて

$$\boldsymbol{-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 6}$$

13-3 $0<x<1$ ……①

② $\Longleftrightarrow$ $a-2<x<a+2$

である．よって，

①をみたすどのような x についても

$$a-2<x<a+2$$

がみたされる条件は

$$a-2\leqq 0 \text{ かつ } 1\leqq a+2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1\leqq a\leqq 2}$$

また，①をみたすある x について

$$a-2<x<a+2$$

がみたされる条件は

$$a-2<1 \text{ かつ } 0<a+2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-2<a<3}$$

14-1

$$1-\frac{ab+1}{a+b}=\frac{a+b-ab-1}{a+b}$$

$$=\frac{(1-a)(b-1)}{a+b}$$

ここで，$|a|<1<b$ より

$$-1<a<1 \text{ かつ } 1<b$$

$$\therefore\quad 1-a>0,\ b-1>0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$a+b>0 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\frac{(1-a)(b-1)}{a+b}>0$$

$$\therefore\quad 1>\frac{ab+1}{a+b} \qquad \cdots\cdots(*)$$

また，$\dfrac{ab+1}{a+b}-(-1)=\dfrac{ab+1+a+b}{a+b}$

$$=\frac{(a+1)(b+1)}{a+b}$$

ここで，$a+1>0$，$b+1>2$，$a+b>0$ より

$$\frac{(a+1)(b+1)}{a+b}>0$$

$$\therefore\quad -1<\frac{ab+1}{a+b} \qquad \cdots\cdots(**)$$

(*)と (**) より

$$-1<\frac{ab+1}{a+b}<1$$

14-2 (1) $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ より

$\dfrac{a}{1+a}\geqq\dfrac{a}{1+a+b}$ かつ

$\dfrac{b}{1+b}\geqq\dfrac{b}{1+a+b}$

辺々加えると

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqq\frac{a+b}{1+a+b}$$

(2) $a+b\geqq c$ を仮定して，(1)から

$\dfrac{a+b}{1+a+b}\geqq\dfrac{c}{1+c}$ を証明すればよい．

$$\frac{a+b}{1+a+b}-\frac{c}{1+c}$$

$$=\frac{a+b+ac+bc-c-ac-bc}{(1+a+b)(1+c)}$$

$$=\frac{a+b-c}{(1+a+b)(1+c)}\geqq 0$$

$$(\because\quad a+b\geqq c)$$

ゆえに，

$$\frac{a+b}{1+a+b}\geqq\frac{c}{1+c}$$

したがって，

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqq\frac{c}{1+c}$$

15

右の計算から

　商：$\boldsymbol{x^2+2}$,

　余り：**4**

である.

$$\begin{array}{r} x^2+2 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^4+3x^2+6} \\ \underline{x^4+\ \ x^2} \\ 2x^2+6 \\ \underline{2x^2+2} \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$$

$$=x^2+2+\frac{4}{x^2+1}=1+(x^2+1)+\frac{4}{x^2+1}$$

ここで x が実数全体を動くとき

$$x^2+1>0,\ \frac{4}{x^2+1}>0$$

よって,

$$1+(x^2+1)+\frac{4}{x^2+1}$$

$$\geqq 1+2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}$$

$$=1+4=5$$

等号成立は,

$$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$$

$$\therefore\quad x^2+1=2\ (\because\quad x^2+1>0)$$

すなわち, $x=\pm1$ のときである.

以上より, $x=\pm1$ のとき**最小値 5** をとる.

16 (1) $a>0,\ b>0$ が $abh=k^3$ (h, k は定数) をみたしながら動くときの $a^2+b^2+h^2$ の最小値を求める.

$a^2>0,\ b^2>0$ より,

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\ (\because\quad ab>0)$$

ここで $ab=\dfrac{k^3}{h}$ であるから,

$$a^2+b^2+h^2\geqq\frac{2k^3}{h}+h^2$$

であり, 等号は, $a^2=b^2$ すなわち, $a=b$ のとき成立する.

以上より

$a=b$ のとき, **最小値** $\boldsymbol{\dfrac{2k^3}{h}+h^2}$ をとる.

(2) $a>0,\ b>0,\ h>0$ が $abh=k^3$ (k は定数) をみたしながら動くときの $a^2+b^2+h^2$ の最小値を求める.

$$a^2+b^2+h^2\geqq 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2h^2}$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{(abh)^2}$$

$$=3\cdot\{(k^3)^2\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=3k^2$$

等号成立は $a^2=b^2=h^2$

すなわち, $a=b=h$ のときである.

以上より $a=b=h$ のとき, 対角線の長さは最小となり, このとき直方体は立方体である.

17-1 コーシー・シュワルツの不等式

$$(A^2+B^2+C^2)(X^2+Y^2+Z^2)$$

$$\geqq(AX+BY+CZ)^2$$

において,

$$A=\sqrt{a},\ B=\sqrt{b},\ C=\sqrt{c},$$

$$X=\frac{p}{\sqrt{a}},\ Y=\frac{q}{\sqrt{b}},\ Z=\frac{r}{\sqrt{c}}$$

とおくと,

$$(a+b+c)\left(\frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}\right)\geqq(p+q+r)^2$$

が成立する.

参考 等号の成立条件を確認しておこう.

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c}$$

$$=\frac{p}{\sqrt{a}}:\frac{q}{\sqrt{b}}:\frac{r}{\sqrt{c}}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}:\sqrt{b}=\dfrac{p}{\sqrt{a}}:\dfrac{q}{\sqrt{b}}\\[2ex] \sqrt{b}:\sqrt{c}=\dfrac{q}{\sqrt{b}}:\dfrac{r}{\sqrt{c}}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,p=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,q\\[2ex] \sqrt{\dfrac{c}{b}}\,q=\sqrt{\dfrac{b}{c}}\,r\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}aq=bp\\ br=cq\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}a:b=p:q\\ b:c=q:r\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ a:b:c=p:q:r$$

17-2 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x})+\sqrt{y}$

である.

よって, コーシー・シュワルツの不等式から

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2$$
$$\leqq\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y)$$
$$=\frac{3}{2}(2x+y) \quad \cdots\cdots(*)$$

等号は，$\sqrt{2x}:\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}:1$

すなわち，$y=4x$ のとき成立する．

ここで，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$，$2x+y>0$，$(*)$ より

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}$$

等号は $y=4x$ のとき成立する．

したがって，すべての正の実数 x，y に対し $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k$ が成り立つような実数 k は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq k$$

であり，k の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$ となる．

18 $$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}=x\cdot\frac{a^3}{x^3}+y\cdot\frac{b^3}{y^3}$$
$$=x\left(\frac{a}{x}\right)^3+y\left(\frac{b}{y}\right)^3 \quad \cdots\cdots(*)$$

と変形できる．また，関数 $f(t)=t^3$ のグラフは $t>0$ において下に凸である．

よって，

$$(*)\geqq\left(x\cdot\frac{a}{x}+y\cdot\frac{b}{y}\right)^3$$
$$=(a+b)^3$$

となり成立する．

第2章 複素数と方程式

19 (1)

$$与式=\frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}-\frac{(1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$
$$=\frac{1+3i}{10}-\frac{2-4i}{10}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i}$$

(2) $$(\sqrt{3}+2i)^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\cdot 2i+3\cdot\sqrt{3}\cdot(2i)^2+(2i)^3$$
$$=3\sqrt{3}+18i-12\sqrt{3}-8i$$
$$=\boldsymbol{-9\sqrt{3}+10i}$$

20-1

$$z+\bar{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{-2}{2}=\boldsymbol{-1}$$
$$z\bar{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\boldsymbol{1}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}+z}{z\bar{z}}=\frac{-1}{1}=\boldsymbol{-1}$$

20-2 $\alpha=x+yi$（x，y は実数かつ $y\neq0$）とする．

$\bar{\alpha}=x-yi$

$\alpha^2=x^2-y^2+2xyi$

であるから，$\bar{\alpha}=\alpha^2$ より

$x=x^2-y^2$ かつ $-y=2xy$

$y\neq0$ より，$x=-\dfrac{1}{2}$

よって，$y^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

以上より，$\alpha=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

21-1 $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\omega$ とおくと，

$$\overline{\omega}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

よって，ω，$\overline{\omega}$ は，

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$，$\overline{\omega}^2=\omega$，$\omega^2+\omega+1=0$

をみたす．

$$\begin{aligned}(\text{与式の左辺})&=\{(\overline{\omega})^{3\times7+2}+\omega^{3\times7+2}\}^3\\&=\{(\overline{\omega})^2+\omega^2\}^3\\&=(\omega+\omega^2)^3=(-1)^3=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

21-2 w は $z^3+1=0$ の虚数解の 1 つであるから，次の式をみたす．

$w^3=-1$

$w^2-w+1=0$

これより，$w^2=w-1$ であるから

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(2w)^6+(2w-2)^6+0+(-2)^6\\&\quad+(-2w+2)^6\\&=2^6\cdot(w^3)^2+2^6+2\times2^6(w-1)^6\\&=2\times2^6+2\cdot2^6\times(w^2)^6\\&=4\cdot2^6=\mathbf{256}\end{aligned}$$

22 与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための k の条件は，

$k+7\neq0$ かつ（判別式）>0

である．判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(k+4)^2-(k+7)\cdot2k$$

であるから

$-k^2-6k+16>0$

$\therefore\ (k-2)(k+8)<0$

$\therefore\ -8<k<2$

ここで k は $k\neq-7$ である整数より

$-6\leqq k\leqq1$

よって，k **の最小値は** $\mathbf{-6}$，

最大値は 1

23-1 2 つの解は α，2α とおける．

解と係数の関係より

$\alpha+2\alpha=6$ かつ $\alpha\cdot2\alpha=c$

これより，$\alpha=2$，$c=\mathbf{8}$

23-2 $x^2+ax+b=0$ ……①，

$x^2+bx+a=0$ ……② とおく．

①において，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=b\end{cases}\quad\cdots\cdots③$$

②において，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(\alpha+1)+(\beta+1)=-b\\ (\alpha+1)(\beta+1)=a\end{cases}\quad\cdots\cdots④$$

④に③を代入し，α，β を消去すると，

$$\begin{cases}-a+2=-b\\ b-a+1=a\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}-a+b=-2\\ -2a+b=-1\end{cases}$$

よって，$a=\mathbf{-1}$，$b=\mathbf{-3}$

これを①に代入して，

$x^2-x-3=0$

よって，正の解は $x=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{13}}}{\mathbf{2}}$

24 $ax^2+bx+c=0$ ……①，

$bx^2+cx+a=0$ ……② とおく．

①が 2 つの正の解をもつための a，b，c の条件は，

$$\begin{cases}a\neq0\\ (\text{判別式})\geqq0\\ (\text{2 解の和})>0\\ (\text{2 解の積})>0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}a\neq0\\ b^2-4ac\geqq0\\ -\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases}\quad\cdots\cdots(*)$$

である．また，②が正と負の解をもつための，a，b，c の条件は

$$\begin{cases}b\neq0\\ (\text{2 解の積})<0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}b\neq0\\ \dfrac{a}{b}<0\end{cases}\quad\cdots\cdots(**)$$

よって，「(*)ならば (**)」が成り立つことを示せばよい．

(*)を仮定する．

$-\dfrac{b}{a}>0$ より　$b \neq 0$

さらに，$\dfrac{b}{a}<0$ であるから $\dfrac{a}{b}<0$

よって，$(**)$ が成り立つ．

25-1 $(m-3)x^2+(5-m)x$
$+2(2m-7)=0$ ……$(*)$

$(*)$は 2 次方程式であるから $m-3 \neq 0$

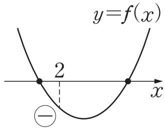
$$f(x)=x^2-\frac{m-5}{m-3}x+\frac{2(2m-7)}{m-3}$$

とおくと

$$(*) \iff f(x)=0$$

$(*)$の解の一方が 2 より大きく他方が 2 より小さくなるための条件は，$f(2)<0$ である．

$$f(2)=4-\frac{m-5}{m-3}\cdot 2+\frac{2(2m-7)}{m-3}=\frac{6m-16}{m-3}$$



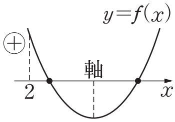
より

$$\frac{2(3m-8)}{m-3}<0$$

$\therefore$ $2(3m-8)(m-3)<0$

$\therefore$ $\dfrac{8}{3}<m<3$

$(*)$の異なる 2 つの実数解がともに 2 より大きくなるための条件は，$f(x)=0$ の判別式を D とすると



$$\begin{cases} D>0 & \cdots\cdots ① \\ 軸の位置：\dfrac{m-5}{2(m-3)}>2 & \cdots\cdots ② \\ 端点の\ y\ 座標の符号：f(2)>0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①：$\left(\dfrac{m-5}{m-3}\right)^2-4\cdot\dfrac{2(2m-7)}{m-3}>0$

$\therefore$ $\dfrac{-15m^2+94m-143}{(m-3)^2}>0$

$\therefore$ $\dfrac{-(3m-11)(5m-13)}{(m-3)^2}>0$

$\therefore$ $\dfrac{13}{5}<m<\dfrac{11}{3}$ $(m \neq 3)$ ……①′

②：$\dfrac{m-5}{2(m-3)}-2>0$

$\therefore$ $\dfrac{-(3m-7)}{2(m-3)}>0$

$\therefore$ $(3m-7)(m-3)<0$

$\therefore$ $\dfrac{7}{3}<m<3$ ……②′

③：$\dfrac{6m-16}{m-3}>0$

$\therefore$ $2(3m-8)(m-3)>0$

$\therefore$ $m<\dfrac{8}{3}$ または $3<m$ ……③′

①′，②′，③′ より $\boldsymbol{\dfrac{13}{5}<m<\dfrac{8}{3}}$

25-2 (1) $\dfrac{(判別式)}{4}$

$=(-4|k-1|)^2-8(8k^2-4k+1)$

$=16(k-1)^2-8(8k^2-4k+1)$

$=-48k^2+8$

より，実数解をもつための k の条件は

$$-48k^2+8 \geqq 0 \qquad \therefore \quad k^2-\frac{1}{6} \leqq 0$$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{6}}{6} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

(2) $f(x)$

$=8x^2-8|k-1|x+8k^2-4k+1$ とおく．

$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，2 つの解が 0 と 1 の間にあるための k の条件は，$y=f(x)$ のグラフの端点の y 座標の符号と軸の位置に着目し

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)>0 \\ 0<\dfrac{|k-1|}{2}<1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 8k^2-4k+1>0 & \cdots\cdots ① \\ 8k^2-4k-8|k-1|+9>0 & \cdots\cdots ② \\ 0<|k-1|<2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

であるから，$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のとき

①，②，③が成り立つことを示せばよい．

$$f(0)=8\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

より①はつねに成り立つ．

また，$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ において，

$|k-1|=1-k$ であるから，

$$\begin{aligned} f(1)&=8k^2+4k+1\\ &=8\left(k+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0 \end{aligned}$$

より②が成り立つ．

$$0<|k-1|=1-k<2$$

より③も成り立つ．

以上より証明された．

26-1 解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4\\ \alpha\beta\gamma=-2 \end{cases}$$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

$$=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-4}{-2}=\mathbf{2}$$

(2) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$

$$\begin{aligned} &=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\ &=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\\ &=\frac{(-4)^2-2(-2)(-3)}{(-2)^2}=\mathbf{1} \end{aligned}$$

26-2 (1) $x+y+z=0$ の辺々を平方すると

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$$

$x^2+y^2+z^2=a$ であるから

$$a+2(xy+yz+zx)=0$$

$$\therefore\quad xy+yz+zx=-\boldsymbol{\frac{a}{2}}$$

(2) 等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

に $x^3+y^3+z^3=3$，$x+y+z=0$ を代入して

$$3-3xyz=0\qquad\therefore\quad xyz=\mathbf{1}$$

別解 $x+y+z=0$ であるから

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3\\ &=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3\\ &=(-z)^3-3xy(-z)+z^3\\ &=3xyz \end{aligned}$$

$x^3+y^3+z^3=3$ であるから

$$3=3xyz\qquad\therefore\quad xyz=1$$

(3) x，y，z は

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ xy+yz+zx=-\dfrac{a}{2}\\ xyz=1 \end{cases}$$

をみたすから，3 次方程式

$$t^3-0\cdot t^2-\frac{a}{2}\cdot t-1=0\quad すなわち$$

$$t^3-\frac{a}{2}t-1=0$$

の解である．辺々に t^2 を掛けると

$$t^5=\frac{a}{2}t^3+t^2$$

であり

$$x^5=\frac{a}{2}x^3+x^2$$

$$y^5=\frac{a}{2}y^3+y^2$$

$$z^5=\frac{a}{2}z^3+z^2$$

が成り立つ．辺々加えると

$$\begin{aligned} &x^5+y^5+z^5\\ &=\frac{a}{2}(x^3+y^3+z^3)+(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

であり，与えられた条件を代入すると

$$15=\frac{a}{2}\cdot3+a$$

$$\therefore\quad a=\mathbf{6}$$

別解 $(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$ を展開すると

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)\\ &=x^5+y^5+z^5+x^2(y^3+z^3)\\ &\qquad+y^2(x^3+z^3)+z^2(x^3+y^3)\\ &=x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)\\ &\qquad+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x) \end{aligned}$$

である．与えられた条件を代入すると

$$\begin{aligned} 3a=15&+x^2y^2(-z)\\ &+y^2z^2(-x)+z^2x^2(-y) \end{aligned}$$

$$3a=15-xyz(xy+yz+zx)$$
$$3a=15-1\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\quad(\because\ (1),\ (2))$$
$$\therefore\quad a=6$$

27-1 (1) $\omega^3-1=0$ であるから
$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$
$\omega-1\neq0$ より，$\omega^2+\omega+1=0$

よって，$\omega^2+\omega=\mathbf{-1}$

(2) $(x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)$
$$=x^2+\{(\omega+\omega^2)a+(\omega+\omega^2)b\}x+\omega^2(a+b\omega)(a\omega+b)$$
$$=x^2-ax-bx+a^2+b^2-ab$$
よって，

(与式の右辺)

$=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$

$=x^3-3abx+a^3+b^3$

$=$(与式の左辺)

となり，等式が成立する．

(3) (2)より，

$ab=2,\ a^3+b^3=6$

となる $a,\ b$ を求めればよい．

$a^3b^3=8$ であるから $a^3,\ b^3$ は 2 次方程式
$$t^2-6t+8=0$$
すなわち $(t-2)(t-4)=0$

の解である．よって，
$$(a,\ b)=(\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2}),\ (\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$$
したがって，

x^3-6x+6

$=(x+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})(x+\sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2)(x+\sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega)$

であるから，求める方程式の解は，
$$x=\boldsymbol{-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{4}\,\omega-\sqrt[3]{2}\,\omega^2,\ -\sqrt[3]{4}\,\omega^2-\sqrt[3]{2}\,\omega}$$

27-2 (1) $u=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}$,
$$v=-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}-1}\quad とおく．$$
$u+v=\alpha$
$$u^3+v^3=\left(\sqrt{\frac{28}{27}}+1\right)-\left(\sqrt{\frac{28}{27}}-1\right)=2$$
$$uv=\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}+1}\right)\cdot\left(-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}-1}\right)$$
$$=-\sqrt[3]{\frac{28}{27}-1}=-\frac{1}{3}$$
$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

であるから，α は，
$$\alpha^3=2+3\left(-\frac{1}{3}\right)\alpha$$
をみたす．

したがって，α は，整数を係数とする 3 次方程式
$$x^3+x-2=0$$
の解である．

(2) $x^3+x-2=0$ を解くと
$$(x-1)(x^2+x+2)=0$$
$$\therefore\quad x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$$
であり，α は実数なので，$\alpha=1$ となる．

すなわち，α は整数 **1** である．

28-1 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44$

$=(x+2)(x-4)\times(x+3)(x-5)-44$

$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44$

$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+120-44$

$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+76$

$=\{(x^2-2x)-4\}\{(x^2-2x)-19\}$

$=(x^2-2x-4)(x^2-2x-19)$

よって，求める解は

$x^2-2x-4=0$ または $x^2-2x-19=0$
$$\therefore\quad x=\mathbf{1\pm\sqrt{5},\ 1\pm2\sqrt{5}}$$

28-2 (1) $X=x+\dfrac{1}{x}$
$$\Longleftrightarrow\ x^2-Xx+1=0$$
$f(x)=x^2-Xx+1$

とおくと，Xは $f(x)=0$ をみたす x に対応して決まるから，Xの値がとり得る範囲を求めるには $f(x)=0$ をみたす実数 x が存在するためのXの条件を求めればよい．

$f(0)=1$ であるから，$f(x)=0$ の判別式をDとおくと，この条件は

$x<0$ のとき

$$\begin{cases} \text{判別式}：X^2-4\geqq 0 \\ y=f(x)\ \text{のグラフの軸の位置}：\dfrac{X}{2}<0 \end{cases}$$

$\therefore\ X\leqq \mathbf{-2}$

$x>0$ のとき

$$\begin{cases} \text{判別式}：X^2-4\geqq 0 \\ y=f(x)\ \text{のグラフの軸の位置}：\dfrac{X}{2}>0 \end{cases}$$

$\therefore\ X\geqq \mathbf{2}$

(2) $x^4+ax^3-x^2+ax+1=0$ ……①

$x=0$ は①の解でないから，①の両辺を x^2 で割ると，

$$x^2+ax-1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

よって，$X^2+aX-\mathbf{3}=0$ ……②

$g(X)=X^2+aX-3$ とおく．

①が $x>0$ において 2 つの実数解（重解を含む）をもつ条件は，(1) より②が $X\geqq 2$ の範囲に 1 つだけ解をもつことである．

$g(0)=-3<0$

であるから，求める条件は

$g(2)\leqq 0\quad \therefore\ 2a+1\leqq 0$

すなわち，$2a\leqq \mathbf{-1}$ である．

①が $x<0$ において 2 つの実数解（重解を含む）をもつ条件は，(1) より②が $X\leqq -2$ の範囲に 1 つだけ解をもつことである．

$g(0)<0$ であるから，求める条件は

$g(-2)\leqq 0\quad \therefore\ -2a+1\leqq 0$

すなわち，$2a\geqq \mathbf{1}$ である．

とくに $2a=1$ のとき，

$$g(X)=(X+2)\left(X-\frac{3}{2}\right)$$

である．$X\leqq -2$ または $X\geqq 2$ に注意すると $g(X)=0$ の解は $X=-2$ であり，(1)で等号の成り立つときである．

このとき

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+2x+1 \\ &=(x+1)^2 \end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解は，$x=\mathbf{-1}$（重解）となる．

29-1 $z^3+az+b=0$

$a,\ b$ が実数であり，$z=1+i$ が解であるから，$\overline{z}=1-i$ もこの方程式の解である．

$z+\overline{z}=2,\ z\overline{z}=2$

であり，もう 1 つの解を α とおくと，

$$\begin{cases} z+\overline{z}+\alpha=0 \\ z\overline{z}+\overline{z}\alpha+\alpha z=a \\ z\overline{z}\alpha=-b \end{cases}$$

が成り立つから

$\alpha=-2$

$a=z\overline{z}+\alpha(z+\overline{z})=2-2\cdot 2=\mathbf{-2}$

$b=(-1)\cdot 2\cdot(-2)=\mathbf{4}$

これより，他の 2 つの解は，$\mathbf{1-i},\ \mathbf{-2}$

29-2 整数係数の 4 次方程式

$f(x)=0$ の虚数解の 1 つを $p+qi$（$p,\ q$ は実数，$q\neq 0$）とすると，$p-qi$ も解となる．

また，2 つの整数解を $m,\ n$ とすると，

$x^4+ax^3+bx^2+cx+1$

$=(x-m)(x-n)(x^2-2px+p^2+q^2)$

係数を比較して，

$a=-(m+n+2p)$ ……①

$b=mn+2(m+n)p+p^2+q^2$ ……②

$c=-\{2mnp+(m+n)(p^2+q^2)\}$ ……③

$1=mn(p^2+q^2)$ ……④

$a,\ b,\ c,\ m,\ n$ は整数であるから①より，$2p$ は整数，②より，p^2+q^2 は正の整数である．

④より，

$mn=1$ ……⑤，$p^2+q^2=1$ ……⑥

⑤より，

$m=n=\pm 1$ ……⑦

また，⑥と $q\neq 0$ より，$-1<p<1$ であるから，$2p$ が整数であることも用いて，

$2p=-1,\ 0,\ 1$ ……⑧

⑥，⑦，⑧を①，②，③に代入し，求める $(a,\ b,\ c)$ は，

$$\begin{aligned}&(a,\ b,\ c)\\&=(-1,\ 0,\ -1),\ (3,\ 4,\ 3),\\&\quad(-2,\ 2,\ -2),\ (2,\ 2,\ 2),\\&\quad(-3,\ 4,\ -3),\ (1,\ 0,\ 1)\end{aligned}$$

30-1 与式を変形して

$$2(x^2+x-2)+(x+1)(x+a)i=0$$

x, a は実数であるから，これは

$$\begin{cases}x^2+x-2=0 & \cdots\cdots①\\(x+1)(x+a)=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

と同値である．

①は $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\quad x=1,\ -2$

であるから

「①かつ②」

$$\iff\begin{cases}x=1\\2(a+1)=0\end{cases}\text{または}\begin{cases}x=-2\\-(a-2)=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=1\\a=-1\end{cases}\text{または}\begin{cases}x=-2\\a=2\end{cases}$$

したがって，$\boldsymbol{a=-1,\ 2}$

30-2 純虚数解を ai (a は実数で $a\neq0$) とおく．

$x=ai$ を与式に代入して

$$(1+i)(-a^2)+(k+i)ai+3-3ki=0$$

これより

$$(-a^2-a+3)+(-a^2+ka-3k)i=0$$

a, k は実数であるから

$$\begin{cases}-a^2-a+3=0 & \cdots\cdots①\\-a^2+ka-3k=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①−② より

$$-(1+k)a+3+3k=0$$

$\therefore\quad (k+1)(3-a)=0$

$\therefore\quad a=3$ または $k=-1$

$a=3$ は①をみたさない．

$k=-1$ のとき，①，②は一致し，①の判別式 $D=1+12=13>0$ であるから a は 0 でない実数である．

$\therefore\quad \boldsymbol{k=-1}$

第3章 図形と方程式

31-1 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$，$(c_1,\ c_2)$ とおく．

$\triangle$ABC の重心の座標が $(1,\ 1)$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}=1\\[2mm]\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}a_1+b_1+c_1=3 & \cdots\cdots①\\a_2+b_2+c_2=3 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

辺 AB の中点の座標が $(3,\ 0)$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+b_1}{2}=3\\[2mm]\dfrac{a_2+b_2}{2}=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}a_1+b_1=6 & \cdots\cdots③\\a_2+b_2=0 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

辺 BC を 1 : 4 に内分する点の座標が $(1,\ 3)$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{4b_1+c_1}{5}=1\\[2mm]\dfrac{4b_2+c_2}{5}=3\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}4b_1+c_1=5 & \cdots\cdots⑤\\4b_2+c_2=15 & \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

①，③，⑤より

$$a_1=4,\quad b_1=2,\quad c_1=-3$$

②，④，⑥より

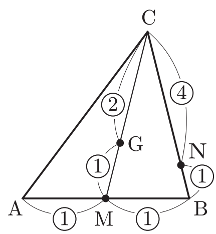
$$a_2=-3,\quad b_2=3,\quad c_2=3$$

よって，求める座標は

$$\mathbf{A(4,\ -3),\ B(2,\ 3),\ C(-3,\ 3)}$$

である．

別解 G$(1,\ 1)$，
M$(3,\ 0)$，
N$(1,\ 3)$
とする．



C$(c_1,\ c_2)$ は線分 GM を 2 : 3 に外分する点であるから

$$c_1=\frac{-3\cdot1+2\cdot3}{2-3}=-3,$$
$$c_2=\frac{-3\cdot1+2\cdot0}{2-3}=3$$
$\therefore$ C$(-3,\ 3)$

B$(b_1,\ b_2)$ は線分 NC を $1:5$ に外分する点であるから
$$b_1=\frac{-5\cdot1+1\cdot(-3)}{1-5}=2,$$
$$b_2=\frac{-5\cdot3+1\cdot3}{1-5}=3$$
$\therefore$ B$(2,\ 3)$

A$(a_1,\ a_2)$ は線分 MB を $1:2$ に外分する点であるから
$$a_1=\frac{-2\cdot3+1\cdot2}{1-2}=4,$$
$$a_2=\frac{-2\cdot0+1\cdot3}{1-2}=-3$$
$\therefore$ A$(4,\ -3)$

である.

31-2 $\mathrm{AC}=\dfrac{m}{m+n}\mathrm{AB}$,

$\mathrm{AD}=\dfrac{m}{m-n}\mathrm{AB}$ より
$$\frac{1}{\mathrm{AC}}+\frac{1}{\mathrm{AD}}$$
$$=\frac{m+n}{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{m-n}{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{\mathrm{AB}}$$
よって, $\dfrac{1}{\mathrm{AC}}+\dfrac{1}{\mathrm{AD}}=\dfrac{k}{\mathrm{AB}}$ をみたす k の値は, $\boldsymbol{k=2}$

32 (1) Cの座標を $(\alpha,\ \beta)$ とすると
$$\begin{cases}\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2\\ \mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2\end{cases} \text{より}$$
$$\begin{cases}(\alpha-1)^2+(\beta+2)^2=2^2+(-4)^2\\ (\alpha+1)^2+(\beta-2)^2=2^2+(-4)^2\end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases}\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta=15 & \cdots\cdots①\\ \alpha^2+\beta^2+2\alpha-4\beta=15 & \cdots\cdots②\end{cases}$$
①$-$② より $\alpha=2\beta$

①に代入して $5\beta^2=15$ $\beta=\pm\sqrt{3}$

Cは第1象限の点であるから, $\beta>0$ であり
$$\beta=\sqrt{3}$$
よって, Cの座標は $(\boldsymbol{2\sqrt{3}},\ \boldsymbol{\sqrt{3}})$

(2) 正方形の中心を C$(\alpha,\ \beta)$ とすると
$$\mathrm{AC}=\frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}} \text{ かつ } \mathrm{BC}=\frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}} \text{ より}$$
$$\begin{cases}(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2=\dfrac{(p+q)^2+(q-p)^2}{2}\\ (\alpha+q)^2+(\beta-p)^2=\dfrac{(p+q)^2+(q-p)^2}{2}\end{cases}$$
$$\therefore\ \begin{cases}\alpha^2+\beta^2-2p\alpha-2q\beta=0 & \cdots\cdots①\\ \alpha^2+\beta^2+2q\alpha-2p\beta=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$
①$-$② より $(p+q)\alpha+(q-p)\beta=0$

(i) $p\neq q$ のとき, $\beta=\dfrac{p+q}{p-q}\cdot\alpha$

これを①に代入すると
$$\frac{2(p^2+q^2)}{(p-q)^2}\cdot\alpha^2-2\cdot\frac{p^2+q^2}{p-q}\cdot\alpha=0$$
$\therefore$ $\alpha=0,\ p-q$

$\therefore$ $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 0)$

または $(p-q,\ p+q)$

(ii) $p=q$ のとき,

$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ より $p+q\neq0$ であり, $\alpha=0$

このとき①は $\beta^2-2q\beta=0$

$\therefore$ $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 0)$ または $(0,\ 2q)$

(ii)は(i)に含まれるので, 中心Cの座標は

$(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0})$ または $(\boldsymbol{p-q},\ \boldsymbol{p+q})$

33 (1) $\begin{cases}a_1:b_1=a_2:b_2\\ a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2\end{cases}$

より $\begin{cases}\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}\\ \boldsymbol{a_1c_2-c_1a_2\neq0}\end{cases}$

(2) $\boldsymbol{a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2}$

(3) ①と②が1点で交わる

$\Longleftrightarrow$ ①と②が平行でない

であるから, $\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2\neq0}$

(4) $\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

34
$$\begin{aligned}&ax+by+c=0 &&\cdots\cdots①\\ &bx+cy+a=0 &&\cdots\cdots②\\ &cx+ay+b=0 &&\cdots\cdots③\end{aligned}$$
まず, ①〆②, ②〆③, ③〆①, すなわち

$ac-b^2\neq 0,\ ab-c^2\neq 0,\ bc-a^2\neq 0$ ……④

が必要である．
次に，④のもとで①と②の交点を求める．
①×c−②×b より

$$(ac-b^2)x+c^2-ab=0$$

①×b−②×a より

$$(b^2-ac)y+bc-a^2=0$$

④より $ac-b^2\neq 0$ なので①と②の交点の座標は

$$\left(\frac{ab-c^2}{ac-b^2},\ \frac{a^2-bc}{b^2-ac}\right) \quad \cdots\cdots ⑤$$

これが③の上にある条件は

$$c\cdot\frac{ab-c^2}{ac-b^2}+a\cdot\frac{a^2-bc}{b^2-ac}+b=0$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

3 直線は一致しないので，$a=b=c$ ではない．したがって，$a+b+c=0$ である．
逆に「$a+b+c=0$」かつ「$a=b=c$ でない」とき

$$\begin{aligned} &ac-b^2\\ &=ac-(-a-c)^2\\ &=-a^2-ac-c^2\\ &=-\left(a+\frac{c}{2}\right)^2-\frac{3}{4}c^2 \end{aligned}$$

$a+\dfrac{c}{2}=0$ かつ $c=0$ とすると $a=c=0$
このとき $b=0$ であり「$a=b=c$ でない」ことに反する．したがって，
$ac-b^2\neq 0$ は成り立つ．
同様に $ab-c^2\neq 0$，$bc-a^2\neq 0$ であり，④をみたす．
よって，求める条件は
「$a+b+c=0$」かつ「$a=b=c$ でない」
$c=-a-b$ を⑤に代入すると，交点の座標は $(\mathbf{1},\ \mathbf{1})$

35 放物線上の点 P$(t,\ -t^2+4t-3)$ と直線 $x-y+2=0$ との距離 h は

$$\begin{aligned} h&=\frac{|t-(-t^2+4t-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}|t^2-3t+5|\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right| \end{aligned}$$

よって，h は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値

$\dfrac{11}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{11\sqrt{2}}{8}}$ をとる．

36
$$4x-3y=14 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x-2y=1 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x-7y=16 \quad \cdots\cdots ③$$

とする．
①と②，②と③，③と①の交点の座標はそれぞれ

$$(5,\ 2),\ (-5,\ -3),\ (2,\ -2)$$

である．これらをすべて x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$$(3,\ 4),\ (-7,\ -1),\ (0,\ 0)$$

となるので，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|3\cdot(-1)-(-7)\cdot 4|=\boldsymbol{\frac{25}{2}}$$

37 A$(-6,\ 0)$，B$(0,\ -8)$，C$(15,\ 28)$

(1) 直線 AB の方程式は

$$y=\frac{-8-0}{0-(-6)}(x+6)+0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{4}{3}x-8}$$

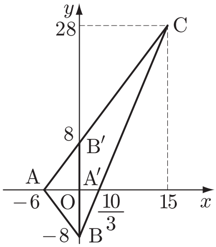
直線 AC の方程式は

$$y=\frac{28-0}{15-(-6)}(x+6)+0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{4}{3}x+8}$$

である．

(2) 直線 AC と y 軸との交点 $(0,\ 8)$ を B′ とおくと，△ABC の面積 S は



$S=$△ABB′ $+$△CBB′

$=\frac{1}{2}\cdot16\cdot6+\frac{1}{2}\cdot16\cdot15$

$=8(6+15)=\mathbf{168}$

(3) 各辺の長さは，距離の公式より

$\mathrm{AB}=\sqrt{(0+6)^2+(-8-0)^2}$

$=\sqrt{100}=\mathbf{10}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(15-0)^2+(28+8)^2}$

$=3\sqrt{25+144}=\mathbf{39}$

$\mathrm{CA}=\sqrt{(15+6)^2+(28-0)^2}$

$=7\sqrt{9+16}=\mathbf{35}$

(4) △ABC の内接円の半径を r とすると，$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より

$$168=\frac{1}{2}r(10+39+35)$$

$$\therefore\ r=\frac{168}{42}=\mathbf{4}$$

(5) △ABC の内心 I の座標を $(a,\ b)$ とおくと，I から 3 直線 AB，BC，CA に下ろした垂線の長さはすべて $r=4$ である．

直線 AB：$4x+3y+24=0$

直線 AC：$4x-3y+24=0$

直線 BC：$y=\frac{12}{5}x-8$

$\therefore\ 12x-5y-40=0$

より

$$\frac{|4a+3b+24|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|4a-3b+24|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{|12a-5b-40|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=4$$

I は直線 AB の上側，直線 BC の上側，直線 CA の下側（すべて原点と同じ側）にあるから

$$\frac{4a+3b+24}{5}=\frac{4a-3b+24}{5}$$

$$=\frac{-(12a-5b-40)}{13}$$

$$=4$$

$$\therefore\ \begin{cases}4a+3b=-4 & \cdots\cdots①\\ 4a-3b=-4 & \cdots\cdots②\\ 12a-5b=-12 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②より，$a=-1$，$b=0$ であり，これは③をみたす．

よって，△ABC の内心の座標は

$\mathbf{(-1,\ 0)}$

別解 △ABC の内心 I は内角の二等分線の交点である．

直線 AB の傾き $-\frac{4}{3}$，直線 AC の傾き $\frac{4}{3}$ より，∠BAC の二等分線は x 軸である．

x 軸と直線 BC の交点を A′ とおくと，A′ の座標は $\left(\frac{10}{3},\ 0\right)$ であり

$$\mathrm{BA'}=\sqrt{(-8)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{144+25}=\frac{2\cdot13}{3}$$

である．

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BA'}=10:\frac{2\cdot13}{3}=15:13$$

より，I の x 座標は

$$\frac{13\cdot(-6)+15\cdot\frac{10}{3}}{15+13}=\frac{-78+50}{28}$$

$$=-1$$

よって，△ABC の内心 I の座標は $(-1,\ 0)$ である．

(6) I は ∠ABC の二等分線上にあるから，直線 BI が求めるものである．

よって，求める直線の方程式は

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-8}=1\quad（切片方程式）$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-8x-8}$$

38-1 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とおくと，R と P は直線 $y=x$ に関して対称なので $\mathrm{R}(b,\ a)$

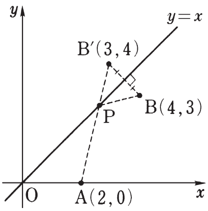
RはQを x 軸方向に1だけ平行移動した点であるから　$Q(b-1,\ a)$

PとQは直線 $y=2x$ に関して対称ゆえ，

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=2\cdot\dfrac{a+(b-1)}{2} \\ 2\cdot\dfrac{b-a}{a-(b-1)}=-1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \mathbf{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

38-2 (1)　2点A，Bは直線 $y=x$ に関して同じ側にある．Bを $y=x$ に関して対称移動したB′の座標は，(3，4) である．$\overline{AP}+\overline{PB}$ が最小となる点Pは直線AB′と直線 $y=x$ の交点である．



直線AB′の方程式は，

$$y=4(x-2)$$

これと $y=x$ の交点を求めて，

$$\mathbf{P}\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$

(2)　最小値は

$$\overline{AB'}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{\mathbf{17}}$$

39 $(m,\ n)\neq(0,\ 0)$ として

$m(2x-y-1)+n(3x+2y-3)=0$ ……①

はPを通る直線の方程式である．

(1)　①が $(-1,\ 1)$ を通るとき，

$-4m-4n=0 \qquad \therefore \quad m=-n\ (\neq 0)$

①に代入して，$n(x+3y-2)=0$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{x+3y-2=0}$

(2)　①は

$$(2m+3n)x+(-m+2n)y-(m+3n)=0 \quad \cdots\cdots①'$$

と変形できる．

①′ が $2x-3y=0$ に平行な条件は

$$2(-m+2n)+3(2m+3n)=0$$

$$\therefore \quad 4m+13n=0$$

$$\therefore \quad m=-\frac{13}{4}n\ (\neq 0)$$

①′ に代入して整理すると

$$n(14x-21y-1)=0$$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{14x-21y-1=0}$

(3)　①′ が $x+3y=0$ に垂直な条件は

$$(2m+3n)+3(-m+2n)=0$$

$$\therefore \quad m=9n\ (\neq 0)$$

①′ に代入して，$n(21x-7y-12)=0$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{21x-7y-12=0}$

40　x について整理すると

$2x^2+(3y+a)x+y^2+y+b=0$ ……①

これが2直線を表す条件は，①の左辺が x，y の1次式に因数分解できること，すなわち

(①の判別式)

$=(3y+a)^2-4\cdot 2\cdot(y^2+y+b)$

$=y^2+2(3a-4)y+a^2-8b$

が y について完全平方式となることである．この条件は，(①の判別式)$=0$ の判別式を D_y とすると，$\dfrac{D_y}{4}=0$ であり

$(3a-4)^2-(a^2-8b)=0$

$\therefore \quad 8a^2-24a+16+8b=0$

よって，$\boldsymbol{b=-a^2+3a-2}$

42　$P(x,\ y)$ について

$PA^2+PB^2+PC^2$

$=\{(x-3)^2+(y-4)^2\}+\{(x+5)^2+y^2\}$
$\quad+\{(x-5)^2+y^2\}$

$=3x^2-6x+3y^2-8y+75$

$=3(x-1)^2+3\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{200}{3}$

$PA^2+PB^2+PC^2=k^2$，すなわち

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=k^2-\frac{200}{3}$$

これが円を表すための条件は

$$k^2-\frac{200}{3}>0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{k>\frac{10\sqrt{6}}{3}}$$

43 (1)　C_k の方程式を変形して

$$\left(x+\frac{3k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{k-2}{2}\right)^2$$

$=\left(\dfrac{3k}{2}\right)^2+\left(\dfrac{k-2}{2}\right)^2+6k+4$

さらに

$(\text{右辺})=\dfrac{5}{2}(k^2+2k+2)$

$\qquad=\dfrac{5}{2}\{(k+1)^2+1\}>0$

であるから，C_k は円を表している．

この円の中心を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=-\frac{3k}{2},\quad Y=-\frac{k-2}{2}$$

点 $(X,\ Y)$ の軌跡は，これをみたす実数 k が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合であるから

$Y=\dfrac{1}{3}X+1$ $\quad\therefore\quad$ 直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x+1}$

(2) C_k の方程式を k について整理すると

$$x^2+y^2-2y-4+k(3x+y-6)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

すべての C_k が通る点は

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ を座標にもつ点である．

これを解くと

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases},\quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

よって，求める点は　$\boldsymbol{(1,\ 3),\ (2,\ 0)}$

(3) $(*)$をみたす k が存在しない，すなわち

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-4\neq 0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ を座標にもつ点である．

よって，求める点は

直線 $3x+y-6=0$ 上の 2 点 $(1,\ 3)$, $(2,\ 0)$ を除くすべての点．

44-1　求める接線を $3x-4y+c=0$ とおく．$x^2+y^2=1$ と接する条件は，中心 $(0,\ 0)$ との距離が 1 であることより，

$$\frac{|c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \qquad \therefore\quad c=\pm 5$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{3x-4y\pm 5=0}$$

44-2　$y=x+1$ を円の方程式に代入して整理すると，

$$2x^2+(2a+1)x+1=0$$

$D=(2a+1)^2-8$ とおくと，$D=0$ となる a は

$2a+1=\pm 2\sqrt{2}$ $\qquad\therefore\quad a=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}}{2}$

D の符号より，共有点の個数は，

$\boldsymbol{a<\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}<a}$ **のとき**

2 個， $\boldsymbol{a=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}}{2}}$ **のとき　1 個，**

$\boldsymbol{\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}}$ **のとき**

0 個

別解　円の中心 $\left(\dfrac{1-a}{2},\ -\dfrac{a}{2}\right)$ と直線 $x-y+1=0$ の距離

$$\frac{\left|\dfrac{1-a}{2}+\dfrac{a}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

と半径

$$\sqrt{a+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}}$$

を比較してもよい．

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}>\frac{9}{8},\quad =\frac{9}{8},\quad <\frac{9}{8}$$

それぞれに対して，共有点の個数は 2 個，1 個，0 個である．

45　$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

と変形できる．

この円の中心 $(1,\ 2)$ と直線 $x-y-1=0$ の距離は

$$\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

よって，切りとる弦の長さは，

$$2\sqrt{9-(\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$$

46　A，B における接線の方程式はそれぞれ

$$2x+4y=20,\ 4x-2y=20$$

連立して，　$x=6$，$y=2$　∴　**(6，2)**

47 (1)　円の中心 $(0,\ 0)$ と直線の距離が 1 (半径) より小さいことから

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1 \quad \therefore \quad \boldsymbol{a^2+b^2>1}$$

(2)　$P(p_1,\ p_2)$，$Q(q_1,\ q_2)$ とおくと，P，Q は $ax+by=1$ 上の点であるから

$$\begin{cases} ap_1+bp_2=1 \\ aq_1+bq_2=1 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

P，Q における接線はそれぞれ

$$p_1x+p_2y=1,\quad q_1x+q_2y=1$$

ところで①は，これら 2 直線が点 $(a,\ b)$ を通ることを示している．

よって，R の座標は　**$(a,\ b)$**

48 (1)　C_1，C_2 は 2 点で交わるから，C_1，C_2 の方程式を辺々ひいて，

$$6x-4y=2$$

求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{3x-2y=1}$$

(2)　$(x-1)^2+(y-3)^2-4$
$$+k(3x-2y-1)=0$$

は C_1 と C_2 の 2 交点を通る図形の方程式である．

これが点 $(3,\ 1)$ を通るとき

$$4+4-4+k(9-2-1)=0 \quad \therefore \quad k=-\frac{2}{3}$$

このとき

$$3\{(x-1)^2+(y-3)^2-4\}$$
$$-2(3x-2y-1)=0$$

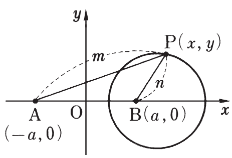
$$\therefore \quad 3x^2+3y^2-12x-14y+20=0$$

$$\therefore \quad 3(x-2)^2+3\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{25}{3} \quad (>0)$$

これは円である．よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2}$$

50　直線 AB を x 軸とし，線分 AB の中点 O を通りこれに垂直な直線を y 軸とする．



2 点 A，B の座標をそれぞれ $A(-a,\ 0)$，$B(a,\ 0)$　$(a>0)$ とし，$P(x,\ y)$ とすると

$$PA:PB=m:n$$

は

$$PA^2:PB^2=m^2:n^2$$

$$\therefore \quad \{(x+a)^2+y^2\}:\{(x-a)^2+y^2\}=m^2:n^2$$

$$\therefore \quad m^2\{(x-a)^2+y^2\}=n^2\{(x+a)^2+y^2\}$$

$$\therefore \quad (m^2-n^2)x^2+(m^2-n^2)y^2-2(m^2+n^2)ax+(m^2-n^2)a^2=0$$

と変形でき　$m\neq n$　であるから

$m^2-n^2\neq 0$　であり

$$x^2+y^2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}ax+a^2=0$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a\right)^2+y^2=\frac{4m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}\cdot a^2$$

と変形できる．よって，求める軌跡は

点 $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a,\ 0\right)$ を中心とし，

$\left|\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a\right|$ を半径とする円である．

上の円の方程式で　$y=0$　とおいて，x 軸との交点の座標を求めると

$$x=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a+\frac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a=\frac{m+n}{m-n}\cdot a,$$

$$x=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a-\frac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a=\frac{m-n}{m+n}\cdot a$$

となる．

点 $\left(\dfrac{m-n}{m+n}\cdot a,\ 0\right)$ は線分 AB を $m:n$ に内分し，

点 $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\cdot a,\ 0\right)$ は線分 AB を $m:n$ に外分している．

よって，P の軌跡はこれらの点を直径の両端とする円である．

51-1
$$y=tx \quad \cdots\cdots①$$
$$y=(t+1)x-t \quad \cdots\cdots②$$

を同時にみたす実数 t が存在するための x，y の条件を求める．

①を t についての方程式とみると

$x=0$ のとき，①をみたす t が存在する条件は $y=0$ であり，このとき，①，②をみたす実数 t が $t=0$ として存在する．

$x\neq 0$ のとき，①をみたす t の値は

$t=\dfrac{y}{x}$

これが②もみたすための x，y の条件は

$y=\left(\dfrac{y}{x}+1\right)x-\dfrac{y}{x}$

$\therefore\ y=x^2$ かつ $x\neq 0$

以上まとめて，Pの軌跡は，放物線

$y=x^2$ の全体.

51-2 $(x-t)^2+y^2=t^2$ ……①，$y=tx$ ……② を同時にみたす正の実数 t が存在するための x，y の条件を求める．

②を t についての方程式とみると

$x=0$ のとき，②をみたす t が存在する条件は $y=0$ であり，このとき，①は t の値にかかわらず成立．

よって，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は条件をみたす．

$x\neq 0$ のとき，②をみたす t の値は

$t=\dfrac{y}{x}$

これが①もみたす x，y の条件は

$\left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\quad\therefore\ x^2-2y+y^2=0$

$\therefore\ x^2+(y-1)^2=1$ かつ $x\neq 0$

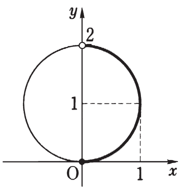
また，$t>0$ より $\dfrac{y}{x}>0$

$\therefore\ xy>0$

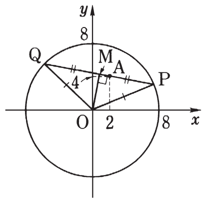
以上まとめて

円 $x^2+(y-1)^2=1$
の $x>0$ の部分
および原点.

図示すると右図.



52-1 弦PQは点A(2，4)を通るから，直線PQの方程式は



$a(x-2)+b(y-4)=0\ (a^2+b^2\neq 0)$ ……①

とおけて，このときPQの中点Mを通る直線OMの方程式は

$bx-ay=0$ ……②

となる．

①，②を同時にみたす実数 a，b $(a^2+b^2\neq 0)$ が存在するための x，y の条件を求める．

②を $ya=bx$ として a についての方程式とみると

(i) $y=0$ のとき，「①かつ②」は

$\begin{cases} a(x-2)-4b=0 \\ bx=0 \end{cases}$

(ア) $x=0$ のとき，

$\begin{cases} a+2b=0 \\ b\text{ は任意} \end{cases}$

であり，これをみたす a，b $(a^2+b^2\neq 0)$ は存在する．

よって，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は適する．

(イ) $x\neq 0$ のとき，

$\begin{cases} a(x-2)=0 \\ b=0 \end{cases}$

(a) $x\neq 2$ のとき，$a=b=0$ となるが，$a^2+b^2\neq 0$ をみたさないので適さない．

(b) $x=2$ のとき，

$\begin{cases} a\text{ は任意} \\ b=0 \end{cases}$

これをみたす a，b $(a^2+b^2\neq 0)$ は存在するので，$(x,\ y)=(2,\ 0)$ は適する．

(ii) $y\neq 0$ のとき，②をみたす a の値は $a=b\cdot\dfrac{x}{y}$

このとき①は $b\cdot\dfrac{x}{y}(x-2)+b(y-4)=0$

$\therefore\ b\{x(x-2)+y(y-4)\}=0$ ……③

であり，$a^2+b^2\neq 0$ は $b^2\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1\right\}\neq 0$

したがって $b \neq 0$ ……④ である．
③，④を同時にみたす b が存在するような x，y の条件は

$$x(x-2)+y(y-4)=0$$

$$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5\ (y \neq 0)$$

(i)，(ii)をまとめると

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=5}$$

別解 つねに OM⊥AM であるから，Mは O，A を直径の両端とする円周上を動く．
このとき，直線 PQ は点Aを通る直線のすべてを動くから，弦 PQ の中点であるMも上の円周上すべてを動く．
この円の方程式は（標問 **41** の 研究 参照）

$$x(x-2)+y(y-4)=0$$

$$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5$$

52-2 P(p，$\sqrt{3}p^2$)，Q(q，$\sqrt{3}q^2$) とおくと，Rの座標 (x，y) は

$$x=\frac{p+q}{2}\ \cdots①,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}(p^2+q^2)\ \cdots②$$

また，∠POQ＝90° より

(OP の傾き)×(OQ の傾き)＝−1

$$\therefore\ \sqrt{3}p\cdot\sqrt{3}q=-1$$

$$\therefore\ pq=-\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots③$$

①，②，③を同時にみたす実数 p，q が存在するための x，y の条件を求める．
①，③をみたす p，q は

$$t^2-2xt-\frac{1}{3}=0$$

の 2 解であり，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=x^2+\frac{1}{3}>0$$

であるから，p，q はつねに実数である．
p，q が①，③をみたすという条件のもとで②を変形して

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\{(p+q)^2-2pq\}$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{(2x)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore\ \text{放物線}\ \boldsymbol{y=2\sqrt{3}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

53 $X=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$Y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ より，

$$X^2+Y^2=\frac{4}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ x=\frac{2X}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{2Y}{X^2+Y^2}$$

円弧①を表す式に代入して，

$$\left(\frac{2X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{2Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1,$$

$$0\leqq\frac{2X}{X^2+Y^2}\leqq1,\quad 0\leqq\frac{2Y}{X^2+Y^2}\leqq1$$

$$\therefore\ X^2+Y^2=4,$$

$$0\leqq X\leqq2,$$

$$0\leqq Y\leqq2\qquad\cdots\cdots①'$$

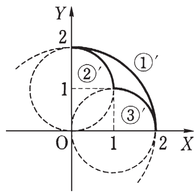
線分②を表す式に代入して，

$$\frac{2Y}{X^2+Y^2}=1,\quad 0\leqq\frac{2X}{X^2+Y^2}\leqq1$$

$$\therefore\ X^2+(Y-1)^2=1,$$

$$0\leqq X,$$

$(X-1)^2+Y^2\geqq1$,
$X^2+Y^2\neq0$ ……②′



線分③も同様に，
$(X-1)^2+Y^2=1$,
$0\leqq Y$,
$X^2+(Y-1)^2\geqq1$,
$X^2+Y^2\neq0$ ……③′

よって，点Qのえがく図形は上図の①′，②′，③′ のようになる．

54 $a=x+y$ ……①

$b=xy$ ……②

$x^2+y^2+2x+2y=1$ ……③

①，②，③を同時にみたす実数 x，y が存在するための a，b の条件を求める．
x，y は $t^2-at+b=0$ の実数解であるから 判別式 $D\geqq0$

$$\therefore\ a^2-4b\geqq0\qquad\cdots\cdots④$$

x，y が③をみたすための条件は

$$(x+y)^2-2xy+2(x+y)=1$$

$$\therefore\ a^2-2b+2a=1\qquad\cdots\cdots⑤$$

④，⑤より，求める図形の方程式は

$b \leqq \dfrac{a^2}{4}$,

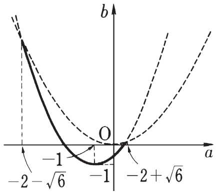
$b = \dfrac{1}{2}a^2 + a - \dfrac{1}{2}$

である．両端の a 座標は

$\dfrac{1}{2}a^2 + a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{4}$

を解いて $a = -2 \pm \sqrt{6}$

よって，図のようになる．



55 (1) $x^2 = -y$ と $x^2 + y^2 = 2$ は 2 点 $(\pm 1,\ -1)$ で交わり，求める領域は下図の斜線部分である．

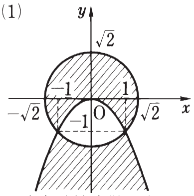
(2) 与えられた不等式は

$(x^2 + y^2 - 9)(y + x)(y - x) < 0$

と変形できる．

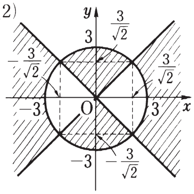
$x^2 + y^2 = 9$ は，$y = \pm x$ と，4 点 $\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$（複号任意）で交わり，求める領域は下図の斜線部分である．

(1)



（境界線上除く）

(2)



（境界線上除く）

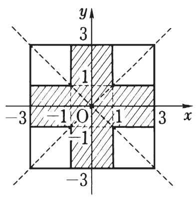
56 条件(i)，(ii)は

$$\begin{cases} |x| \leqq |y| \text{ のとき，} \\ \quad |x| \leqq 1 \text{ かつ } |y| \leqq 3 \\ |x| \geqq |y| \text{ のとき，} \\ \quad |x| \leqq 3 \text{ かつ } |y| \leqq 1 \end{cases}$$

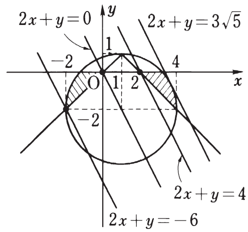
である．これを図示すると，右図を得る．境界線上を含む．よって

面積 $= 6^2 - 4 \times 2^2$

$= \mathbf{20}$



57-1 右図の斜線部分（境界線上含む）が D である．



$k = 2x + y$ が最大になるのは

$y = -2x + k$

が円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ と $x > 0$ において接するときで，円の中心と直線の距離を考えると

$$\frac{|2 - 2 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3$$

$k > 0$ より，$k = 3\sqrt{5}$

また，直線 $y = -2x + k$ が

$(x,\ y) = (-2,\ -2)$，$(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るときの k の値を求めると，順に

$k = -6,\ 0,\ 4$

となるので

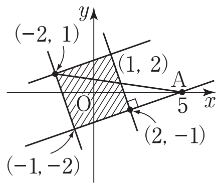
$\boldsymbol{-6 \leqq k \leqq 0,\ 4 \leqq k \leqq 3\sqrt{5}}$

57-2

$-5 \leqq 3x + y \leqq 5$,

$-5 \leqq x - 3y \leqq 5$

をみたす点の集合は右図の斜線部分（境界線上含む）である．



$x^2 - 10x + y^2 = (x-5)^2 + y^2 - 25$

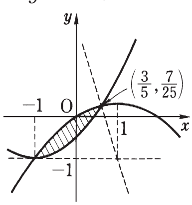
は，点 A$(5,\ 0)$ から最も遠い点 $(-2,\ 1)$ において最大，最も近い点 $(2,\ -1)$ において最小となる．

これより，**最大値 25，最小値 −15**

57-3 (1) $x^2 - 2x + 3y = 0$,

$x^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

は 2 点 $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{7}{25}\right)$, $(-1,\ -1)$ で交わり，2 つの不等式を同時にみたす領域は右図の斜線部分（境界線



上含む)である．

(2) $\dfrac{y+1}{x-1}$ は，2点 $(x,\ y)$，$(1,\ -1)$ を結ぶ直線の傾きであり，図より，

$x=y=-1$ のとき傾きは最大となり，

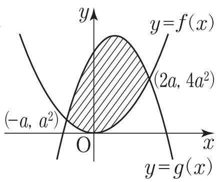
$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{7}{25}$ のとき傾きは最小となる．

したがって，

最大値 $\mathbf{0}$ $(x=y=-1)$

最小値 $-\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}$ $\left(x=\dfrac{3}{5},\ y=\dfrac{7}{25}\right)$

58 $f(x)=x^2$，
$g(x)=-2x^2+3ax+6a^2$
とおく．



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$$
$$\therefore\quad 3(x^2-ax-2a^2)=0$$
$$\therefore\quad 3(x+a)(x-2a)=0$$
$$\therefore\quad x=-a,\ 2a$$

$a>0$ より，領域 D は上図の斜線部分となる．境界も含む．

$x+y=k$ とおく．直線 $y=-x+k$ と放物線 $y=g(x)$ が接するのは

$$-x+k=-2x^2+3ax+6a^2$$

すなわち

$$2x^2-(3a+1)x+k-6a^2=0$$

が重解をもつときであり，判別式を D_1 とすると，$D_1=0$ である．

$$(3a+1)^2-4\cdot2(k-6a^2)=0$$
$$\therefore\quad k=\frac{1}{8}(57a^2+6a+1)$$

このとき接点の x 座標は $x=\dfrac{3a+1}{4}$ である．

$-a\leqq\dfrac{3a+1}{4}\leqq2a$ をみたす a は $a\geqq\dfrac{1}{5}$ であり，この範囲では直線が放物線 $y=g(x)$ に接するとき k は最大となる．

$0<a\leqq\dfrac{1}{5}$ のときは，直線が点 $(2a,\ 4a^2)$ を通るとき，k は最大となる．

よって，**最大値は**

$$\begin{cases}\dfrac{1}{8}(57a^2+6a+1) & \left(a\geqq\dfrac{1}{5}\ \text{のとき}\right)\\[2mm] 2a+4a^2 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{5}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$$

直線 $y=-x+k$ と放物線 $y=f(x)$ が接するのは

$$-x+k=x^2\qquad\therefore\quad x^2+x-k=0$$

が重解をもつときであり，判別式を D_2 とすると，$D_2=0$ である．

$$1+4k=0\qquad\therefore\quad k=-\frac{1}{4}$$

接点の x 座標は $x=-\dfrac{1}{2}$ である．

$-a\leqq-\dfrac{1}{2}\leqq2a$ をみたす a は $a\geqq\dfrac{1}{2}$ であり，この範囲では直線が放物線 $y=f(x)$ に接するとき k は最小となる．

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のときは，直線が点 $(-a,\ a^2)$ を通るとき，k は最小となる．

よって，**最小値は**

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{4} & \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right)\\[2mm] -a+a^2 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$$

59-1 (1) $F(x,\ y)$
$=(3y-x+1)^2+(x-2)^2+2$
x，y はすべての実数値をとるから

$$\begin{cases}3y-x+1=0\\ x-2=0\end{cases}$$

すなわち，

$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}}$ **のとき，最小値 2** をとる．

(2) x を固定し，$F(x,\ y)$ を y についての2次関数とみる．

$3\leqq x\leqq5$ より，$F(x,\ y)$ のグラフの軸 $y=\dfrac{x-1}{3}$ の位置は

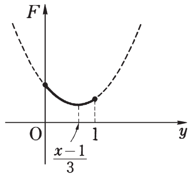
$$\frac{2}{3} \leqq \frac{x-1}{3} \leqq \frac{4}{3}$$

(i)　$\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{x-1}{3} \leqq 1$

$(3 \leqq x \leqq 4)$ のとき

最小値は

$F\left(x,\ \dfrac{x-1}{3}\right)$ である．



$$F\left(x,\ \frac{x-1}{3}\right)=(x-2)^2+2$$

ついで，x を動かすと $F\left(x,\ \dfrac{x-1}{3}\right)$ は

$x=3$ のとき最小値 3 をとる．

(ii)　$1 \leqq \dfrac{x-1}{3} \leqq \dfrac{4}{3}$ $(4 \leqq x \leqq 5)$ のとき

最小値は $F(x,\ 1)$

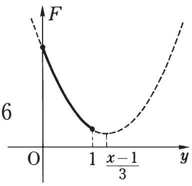
である．

$F(x,\ 1)$

$=(4-x)^2+x^2-4x+6$

$=2x^2-12x+22$

$=2(x-3)^2+4$



ついで，x を動かすと $F(x,\ 1)$ は $x=4$

のとき最小値 6 をとる．

(i)，(ii)より　**最小値 3**

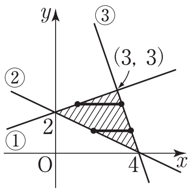
59-2　(1)

$x-3y=-6$　……①

$x+2y=4$　……②

$3x+y=12$　……③

領域 D は右図の斜線(境界を含む)の部分である．



(2)　$F(x,\ y)=x^2-y^2$ とおく．

y を固定するとき，x の動く範囲は

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq 2 \text{ のとき，} 4-2y \leqq x \leqq 4-\dfrac{y}{3} \\ 2 \leqq y \leqq 3 \text{ のとき，} 3y-6 \leqq x \leqq 4-\dfrac{y}{3} \end{cases}$$

最大値について，

$F(x,\ y)$ は $x=4-\dfrac{y}{3}$ のとき最大となる．

$$F\left(4-\frac{y}{3},\ y\right)=\left(4-\frac{y}{3}\right)^2-y^2$$

$$=-\frac{8}{9}y^2-\frac{8}{3}y+16$$

ついで，y を動かすと $F\left(4-\dfrac{y}{3},\ y\right)$ は

$y=0$ のとき**最大値 16** をとる．

最小値について，

(i)　$0 \leqq y \leqq 2$ のとき

$F(x,\ y)$ は $x=4-2y$ のとき最小となる．

$$F(4-2y,\ y)=(4-2y)^2-y^2$$
$$=3y^2-16y+16$$

ついで，y を動かすと $F(4-2y,\ y)$ は

$y=2$ のとき最小値 -4 をとる．

(ii)　$2 \leqq y \leqq 3$ のとき

$F(x,\ y)$ は $x=3y-6$ のとき最小となる．

$$F(3y-6,\ y)=(3y-6)^2-y^2$$
$$=8y^2-36y+36$$
$$=8\left(y-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{9}{2}$$

ついで，y を動かすと $F(3y-6,\ y)$ は

$y=\dfrac{9}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{2}$ をとる．

(i)，(ii)より　**最小値 $-\dfrac{9}{2}$**

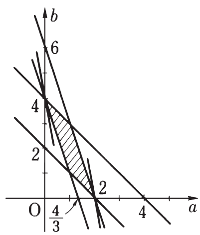
60　$y=ax+b$ において，

$x=1$ のとき，$2 \leqq y \leqq 4$

$x=3$ のとき，$4 \leqq y \leqq 6$ よって

$$\begin{cases} 2 \leqq a+b \leqq 4 \\ 4 \leqq 3a+b \leqq 6 \end{cases}$$

これは右図の斜線部分となる(境界を含む)．



$x=6$ のときの生産量を k とすると

$$6a+b=k$$

$$\therefore \quad b=-6a+k$$

傾き -6 の直線と上図の領域が共有点をもつときを調べて，

$(a,\ b)=(0,\ 4)$ で**最小値 4 トン**

$(a,\ b)=(2,\ 0)$ で**最大値 12 トン**

61 aについて整理して

$a^2+xa-(y+5)=0$

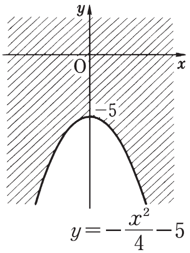
これをみたす実数aが存在する条件は

$x^2+4(y+5)\geqq 0$

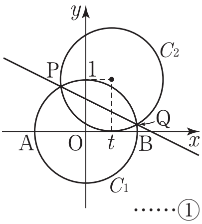
$\therefore\quad y\geqq -\dfrac{x^2}{4}-5$

これが求める領域であり，図示すると図の斜線部分を得る．

ただし，境界線上の点を含む．



62 (1) ABを直径とする円をC_1とし，C_1を弦PQに関して対称移動した円をC_2とする．



$C_1: x^2+y^2=1$ ……①

C_2は点$(t,\ 0)$でx軸と接するから，

$C_2: (x-t)^2+(y-1)^2=1$ ……②

C_1，C_2の交線が直線PQであるから，求める直線の方程式は，①−②より

$$\boldsymbol{2tx+2y-t^2-1=0}$$

(2) 弦PQが通過する範囲は，直線PQが通過する範囲とABを直径とする半円の周および内部

$x^2+y^2\leqq 1$ かつ $y\geqq 0$ ……③

との共通部分である．

まず，tが-1から1まで動くときの直線PQが通過する範囲を求める．

点$(x,\ y)$が直線PQが通過する範囲内の点であるための条件は，$(x,\ y)$に対して，(1)の方程式をみたす$t\,(-1\leqq t\leqq 1)$が存在することである．

$f(t)=t^2-2xt+1-2y$

とおき，

$f(t)=0$ かつ $-1\leqq t\leqq 1$ をみたすtが存在する ……(＊)

ためのx，yの条件を求める．$f(t)$のグラフの軸 $t=x$ が定義域 $-1\leqq t\leqq 1$ の中にあるか否かで場合分けする．

(i) $x\leqq -1$ のとき，

$$(＊)\iff\begin{cases}f(-1)\leqq 0\\ f(1)\geqq 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}2x-2y+2\leqq 0\\ -2x-2y+2\geqq 0\end{cases}$$

$\therefore\quad x+1\leqq y\leqq -x+1$

(ii) $-1\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$(＊)\iff\begin{cases}(\text{判別式})\geqq 0\\ 「f(-1)\geqq 0\ \text{または}\\ f(1)\geqq 0」\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x^2-(1-2y)\geqq 0\\ 「2x-2y+2\geqq 0\\ \text{または}\\ -2x-2y+2\geqq 0」\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}y\geqq\dfrac{1-x^2}{2}\\ 「y\leqq x+1\ \text{または}\ y\leqq -x+1」\end{cases}$$

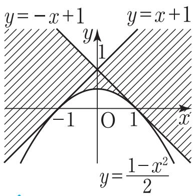
(iii) $1\leqq x$ のとき，

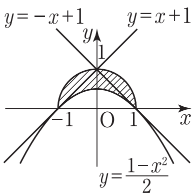
$$(＊)\iff\begin{cases}f(-1)\geqq 0\\ f(1)\leqq 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}2x-2y+2\geqq 0\\ -2x-2y+2\leqq 0\end{cases}$$

$\therefore\quad -x+1\leqq y\leqq x+1$

これを図示すると，左下図の斜線部分となり，③との共通部分をとると，右下図の斜線部分となる．これが求める範囲である．境界も含む．





注 ③より

$0\leqq y^2\leqq 1-x^2\quad\therefore\quad -1\leqq x\leqq 1$

であり，先にxの範囲を絞っておけば，(i)，(iii)の考察は不要である．

別解 **1.** (1)の式を

$$y=\frac{t^2}{2}-xt+\frac{1}{2}$$

として，xを固定し，tが$-1\leqq t\leqq 1$ を動くときのyの動く範囲を調べてもよい．

$$g(t)=\frac{t^2}{2}-xt+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

とおく．③より $-1\leqq x\leqq 1$ としてよいから，軸 $t=x$ は定義域 $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲にある．よって，y の動く範囲は

$$g(x)\leqq y\leqq \max\{g(-1),\ g(1)\}$$
$$\therefore\quad \frac{1-x^2}{2}\leqq y\leqq \max\{x+1,\ -x+1\}$$

であり，これが表す領域は，前段の左図の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分である．③との共通部分をとると，前段の右図を得る．

2. 直線族 $2tx+2y-t^2-1=0$ ……④ は

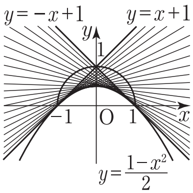
$$t^2-2xt-2y+1=0$$
$$(t-x)^2-x^2-2y+1=0$$

と変形される．ここで，曲線

$x^2+2y-1=0$ ……⑤ を考えて，④と⑤を連立すると

$$(t-x)^2=0 \qquad \therefore\quad x=t\ (\text{重解})$$

よって，④は⑤上の点 $\left(t,\ \dfrac{1-t^2}{2}\right)$ における接線である．t は $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くから④は右図のように動く．③との共通部分をとると，解答の図を得る．



63-1 a について整理して，

$$a^2-(2y+1)a+x^2+y^2=0$$

これをみたす正の数 a が少なくとも1つ存在する条件を調べる．

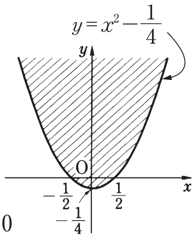
$$f(a)=a^2-(2y+1)a+x^2+y^2$$

とおく．

(i) 2つの正の実数解（重解を含む）をもつ条件は，

$$\begin{cases} \text{判別式}:(2y+1)^2-4(x^2+y^2)\geqq 0 \\ f(a)\ \text{のグラフの対称軸}:\dfrac{2y+1}{2}>0 \\ f(0)>0:x^2+y^2>0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} y\geqq x^2-\dfrac{1}{4} \\ y>-\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$



(ii) 正，負の解を1つずつもつ条件は

$f(0)<0:x^2+y^2<0$

これをみたす x，y は存在しない．

(iii) 0と正の解をもつ条件は，

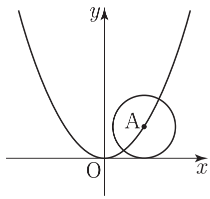
$$\begin{cases} f(0)=0:x^2+y^2=0 \\ f(a)\ \text{のグラフの対称軸}:\dfrac{2y+1}{2}>0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad x=y=0$$

以上より，円 C の存在領域を図示すると上の図のようになる．ただし，境界線上の点を含む．

63-2 $\mathrm{A}(t,\ at^2)$ を中心とし x 軸に接する円 C の内部を表す不等式は

$$(x-t)^2+(y-at^2)^2<(at^2)^2$$



$$\therefore\quad (1-2ay)t^2-2xt+x^2+y^2<0$$

どの円 C の内部にも含まれない点の集合を求めるには，

どの t に対しても

$$(1-2ay)t^2-2xt+x^2+y^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つための x，y の条件を求めればよい．

(i) $1-2ay=0$ のとき

$$① \iff -2xt+x^2+\left(\frac{1}{2a}\right)^2\geqq 0$$

であるから，条件をみたす x，y は

$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2a}\right)$ のみである．

(ii) $1-2ay\neq 0$ のとき，①の左辺 $=0$ とした2次方程式の判別式を D とすると求める条件は

$$\begin{cases} 1-2ay>0 \\ D\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 1-2ay>0 \\ x^2-(1-2ay)(x^2+y^2)\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} y<\dfrac{1}{2a} \quad (\because\ a>0) \\ -y^2+2ay(x^2+y^2)\leqq 0 \end{cases}$$

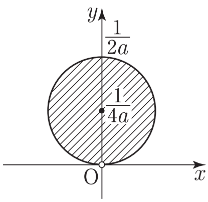
$$\therefore\ \begin{cases} y<\dfrac{1}{2a} \\ 2ay\left(x^2+y^2-\dfrac{y}{2a}\right)\leqq 0 \end{cases}$$

$y>0$，$a>0$ より

$$\begin{cases} 0<y<\dfrac{1}{2a} \\ x^2+\left(y-\dfrac{1}{4a}\right)^2\leqq\left(\dfrac{1}{4a}\right)^2 \end{cases}$$

となる．

以上(i)，(ii)を図示すると右図の斜線部分となる．境界は原点以外をすべて含む．



第4章 三角関数

64-1 $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{3}$ より，1 は第 1 象限の角である．

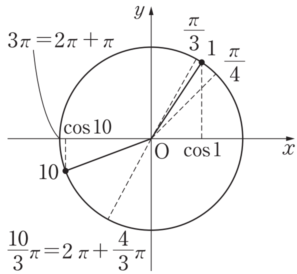
また，$3\pi<10<\dfrac{10}{3}\pi=2\pi+\dfrac{4}{3}\pi$

より，10 は第 3 象限の角である．

したがって

$$\cos 10<0<\cos 1$$

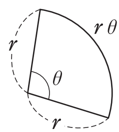
$\therefore$ $\boldsymbol{\cos 10<\cos 1}$



64-2 (1) $l=\boldsymbol{r\theta}$

(2) $r\theta+2r=\pi$ ……①

$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ ……②



①より $\theta=\dfrac{\pi-2r}{r}$ ……①′

これを②に代入して，

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}r(\pi-2r)}$$

(3) ①′をみたす θ が存在するための r の条件は $\quad 0<\dfrac{\pi-2r}{r}<2\pi$

より $\quad \dfrac{\pi}{2(\pi+1)}<r<\dfrac{\pi}{2}$ ……(＊)

$(\because\ r>0)$

(＊)の範囲で S の最大を考えればよい．

$$S=-\left(r-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}$$

は $r=\dfrac{\pi}{4}$ ((＊)をみたす) のとき最大となり，

$$S=\frac{\pi^2}{16}$$

また，①′と $r=\dfrac{\pi}{4}$ から　$\theta=2$

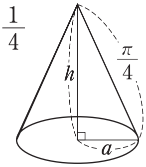
以上より，$r=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$，$\theta=\mathbf{2}$，$S=\boldsymbol{\dfrac{\pi^2}{16}}$

(4)　円錐の高さを h，底面の半径を a とする．

$2\pi a=r\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より　$a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\quad h=\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{\pi^2-1}}{4}$



よって，求める円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-1}}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{\pi^2-1}}{192}}$$

65　回転数は無視して，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ としてよい．

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より

$\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\alpha<\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$　……①

$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，$0<\dfrac{5}{13}<\dfrac{1}{2}$ より

$\cos\dfrac{3}{2}\pi<\cos\beta<\cos\dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore\quad \dfrac{3}{2}\pi<\beta<\dfrac{5}{3}\pi$　……②

①，②より　$\dfrac{5}{3}\pi<\alpha+\beta<\dfrac{23}{12}\pi$

よって，$\alpha+\beta$ は**第 4 象限**の角である．

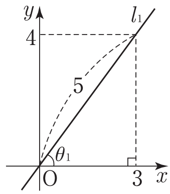
66　(1)　θ_1 は直線 l_1：$y=\dfrac{4}{3}x$ が x 軸と作る鋭角であるから

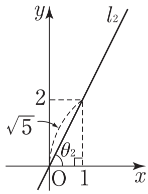
$\sin\theta_1=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$，$\cos\theta_1=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

θ_2 は直線 l_2：$y=2x$ が x 軸と作る鋭角であるから

$\sin\theta_2=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\cos\theta_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$





(2)　加法定理より

$\sin(\theta_1+\theta_2)$

$=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\cos(\theta_1+\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

68　$\tan\theta=t$ とおくと，

$\sin 2\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ なので

$\dfrac{2t}{1+t^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore\quad 2t^2+5t+2=(t+2)(2t+1)=0$

$\therefore\quad t=-2,\ -\dfrac{1}{2}$　……①

$\cos 2\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ なので

$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore\quad 3(1+t^2)=-5(1-t^2)$

$\therefore\quad t=\pm 2$　……②

①，②を同時にみたす t の値は，$t=-2$

よって，$\tan\theta=\mathbf{-2}$

別解　$\sin 2\theta<0$，$\cos 2\theta<0$ より 2θ は第 3 象限の角であり

$$\pi+2n\pi<2\theta<\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$

(n は整数)

$$\frac{\pi}{2}+n\pi<\theta<\frac{3}{4}\pi+n\pi$$

$\therefore\quad \tan\theta<0$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

一方，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ なので，

$\tan\theta=t\,(<0)$ とおくと

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\quad 2t^2+3t-2=0$

$\therefore\quad (2t-1)(t+2)=0$

$t<0$ より　$t=-2$　　$\therefore\quad \tan\theta=-2$

69 (1)　$\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)$$

$0^\circ<x<90^\circ$，$0^\circ<y<90^\circ$ ゆえ，

$$0^\circ<\frac{x+y}{2}<90^\circ,$$

$$0^\circ\leqq\frac{|x-y|}{2}<\frac{x+y}{2}<90^\circ$$

$\therefore\quad \sin\dfrac{x+y}{2}>0,$

$$\cos\frac{x+y}{2}<\cos\frac{x-y}{2}$$

よって，$\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)<0$

$\therefore\quad \boldsymbol{\sin(x+y)<\sin x+\sin y}$

(2)　$2\sin(x+y)-(\sin 2x+\sin 2y)$

$=2\sin(x+y)-2\sin(x+y)\cos(x-y)$

$=2\sin(x+y)\{1-\cos(x-y)\}\geqq 0$

($\because\quad 0^\circ<x+y<180^\circ$)

$\therefore\quad \boldsymbol{2\sin(x+y)\geqq\sin 2x+\sin 2y}$

(等号は $x=y$ のとき成立)

71 (1)　右辺を加法定理で展開，整理すると

$$y=\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$\therefore\quad \boldsymbol{a=\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{2}{3}\pi}$

(2)　(1)より，求める周期は，

$$\frac{2\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$$

72 (1)　$\dfrac{1}{4}+\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=0$

$$\cos^2\theta+\cos\theta-\frac{3}{4}=0$$

$$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\theta+\frac{3}{2}\right)=0$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$　より　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi}$ **(n は整数)**

(2)　$(1-\sin^2\theta)+\sin\theta=\dfrac{5}{4}$

$$\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{1}{4}=0$$

$\left(\sin\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$　　$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi}$

または $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi+2n\pi}$ **(n は整数)**

(3)　$1+\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$

$\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=0$

$(\sin\theta+\cos\theta)(1+\cos\theta)=0$

$\therefore\quad \tan\theta=-1$，$\cos\theta=-1$

($\because\quad \cos\theta\neq 0$)

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3}{4}\pi+n\pi}$

または $\boldsymbol{\pi+2n\pi}$ **(n は整数)**

73 (1)　$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos x=\sqrt{3}$

$\therefore\quad 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

$\therefore\quad \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1 \qquad \therefore\quad x+\dfrac{\pi}{6}=2n\pi$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi}$ **(n は整数)**

(2)　和を積に直す公式によって両辺を変形すると

$2\sin 2x\cos x+\sin 2x$

$=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$(2\cos x+1)\sin 2x=(2\cos x+1)\cos 2x$

$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0$

$\therefore\quad 2\cos x+1=0$

または $\sin 2x=\cos 2x$

$2\cos x+1=0$ のとき，$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad x=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$ (n は整数)

$\sin 2x=\cos 2x$ のとき，$\tan 2x=1$

($\because\quad \cos 2x\neq 0$)

$\therefore\quad x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n}{2}\pi$ (n は整数)

よって，解は $\boldsymbol{x=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi}$，

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n}{2}\pi}$ **(n は整数)**

(3)　与式を変形して，

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$ かつ $\cos x\neq 0$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ かつ $\cos x\neq 0$ より

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}$

74　(1)　2 式を

$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4$ に代入して

$3\sin^2 y+(1-\cos y)^2=4$

$\therefore\quad 3(1-\cos^2 y)+1-2\cos y+\cos^2 y=4$

$\therefore\quad \cos y(\cos y+1)=0$

$\therefore\quad \begin{cases}\cos y=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ または $\begin{cases}\cos y=-1\\ \cos x=1\end{cases}$

$2\sin x=\sqrt{3}\sin y$ に注意して

$\begin{cases}\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2m\pi}\\ \boldsymbol{y=\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\end{cases}$ **(複号同順)**

$\begin{cases}\boldsymbol{x=2m\pi}\\ \boldsymbol{y=(2n+1)\pi}\end{cases}$

(m，n は整数)

(2)　第 1 式は $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\therefore\quad 4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}=0$

$x+y=2l\pi$，$x=2m\pi$，$y=2n\pi$

(l，m，n は整数)

$x=2m\pi$ のとき，第 2 式は

$\cos y=1+\cos y$ で不成立．$y=2n\pi$ のときも同じ．

$x+y=2l\pi$ のとき，第 2 式より

$1=\cos x+\cos(2l\pi-x)$

$\cos x=\cos y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad \boldsymbol{x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2m'\pi}$，

$\boldsymbol{y=\mp\dfrac{\pi}{3}+2n'\pi}$

(複号同順，m'，n' は整数)

75　与えられた方程式は 2 倍角の公式により

$1-2\sin^2 x+4a\sin x+a-2=0$　…(*)

と変形される．

$\sin x=X$ とおくと，(*)は

$2X^2-4aX-a+1=0$　……①

となる．$0\leqq x\leqq\pi$ より，①の解が，

$0\leqq X<1$ においてただ 1 つの解をもつような a の値を求めればよい (①が

$X=1$ を解にもつとき $a=\dfrac{3}{5}$ である．

このとき，①の解は $X=1$，$\dfrac{1}{5}$ となり，

(*)は異なる 3 つの解をもち不適)．

(i) $X=0$ のとき，①より $a=1$
このとき，①の解は $X=0,\ 2$．よって，(*)の解は，$x=0,\ \pi$ となり適する．

(ii) ①が $0<X<1$ に 1 つだけ解をもつ条件は，①の左辺を $f(X)$ とおくと

(ア) $f(0)f(1)<0$

$\therefore\ (-a+1)(2-4a-a+1)<0$

$\therefore\ \dfrac{3}{5}<a<1$

または

(イ) ①の判別式 $D=0$ かつ
$f(x)$ のグラフの軸の位置：
$0<a<1$ をみたすことである．
$D=0$ より

$4a^2-2(-a+1)=0$

$\therefore\ (2a-1)(a+1)=0$

$0<a<1$ より

$a=\dfrac{1}{2}$

(i)，(ii)より，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{5}<a\leqq 1}$

76 (1) $2\cos^2 x-1+\cos x<0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)<0$

$-1<\cos x<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq \pi$ より

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<x<\pi}$

(2) (i) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin x>\cos x$

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

$-\dfrac{\pi}{4}<x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より

$0<x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4}<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき

$\sin x>-\cos x$

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

$\dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{4}\pi$ より

$\dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\pi$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{4}\pi$

(i)，(ii)をまとめて

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi}$

(3) $\cos 5x>\cos x$ を変形すると

$-2\sin 3x\sin 2x>0$

$\therefore\ \begin{cases}\sin 3x>0\\ \sin 2x<0\end{cases}$ または $\begin{cases}\sin 3x<0\\ \sin 2x>0\end{cases}$

$0<x<\pi$ より

$\begin{cases}0<3x<\pi \text{ または } 2\pi<3x<3\pi\\ \pi<2x<2\pi\end{cases}$

または

$\begin{cases}\pi<3x<2\pi\\ 0<2x<\pi\end{cases}$

$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi<x<\pi}$

(4) $\sin^2 2x+6\sin^2 x\leqq 4$ を変形して

$4\sin^2 x\cos^2 x+6\sin^2 x-4\leqq 0$

$2\sin^2 x(1-\sin^2 x)+3\sin^2 x-2\leqq 0$

$2\sin^4 x-5\sin^2 x+2\geqq 0$

$\therefore\ (2\sin^2 x-1)(\sin^2 x-2)\geqq 0$

ここで，$|\sin x|\leqq 1$ より $\sin^2 x-2<0$ であるから

$2\sin^2 x-1\leqq 0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より

$\boldsymbol{0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi,}$

$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}\pi\leqq x\leqq 2\pi}$

77 (1) $y=(1-\cos^2 x)+\cos x+1$

$=-\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ ゆえ，$\cos x=\dfrac{1}{2}$ で最大，

$\cos x=-1$ で最小となる.

最大値 $\frac{9}{4}$, 最小値 0

(2) $\cos x=X$, $\sin x=Y$ とおくと,

$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ より, X, Y は

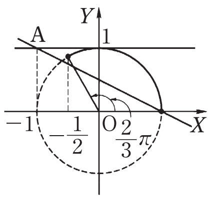
$X^2+Y^2=1$, $-\frac{1}{2}\leqq X\leqq 1$, $Y\geqq 0$ ……①

をみたす.

$$-y=\frac{\sin x-1}{\cos x+1}$$

$$=\frac{Y-1}{X-(-1)}$$

より, $-y$ は点 A$(-1,\ 1)$ と点 $(X,\ Y)$ を通る直線の傾きである.



点 $(X,\ Y)$ は①をみたすので, 図より $-y$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{0-1}{1+1}\leqq -y\leqq\frac{1-1}{0+1}$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\leqq -y\leqq 0 \qquad \therefore\quad 0\leqq y\leqq\frac{1}{2}$$

よって, **最小値 0, 最大値 $\frac{1}{2}$**

別解 $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと, 与式は

$$\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1}{2}(t-1)^2$$

$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ より $0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{3}$ であり, t のとり得る値の範囲は

$$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

よって, $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}(t-1)^2$ は $0\leqq t\leqq\sqrt{3}$ の範囲で

$$\begin{cases} t=1\ \left(x=\frac{\pi}{2}\right)\ \text{のとき, 最小値 } 0 \\ t=0\ (x=0)\ \text{のとき, 最大値 } \frac{1}{2} \end{cases}$$

78-1 $\sin x+\sin y$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$x+y=\frac{2}{3}\pi$ より

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3},\quad \frac{x-y}{2}=x-\frac{\pi}{3}$$

なので

$$\sin x+\sin y=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

である.

また, $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より,

$-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{6}$ なので

$$\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(等号は $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$, すなわち $x=0$ のとき成立)

以上より, **最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

78-2 $f(x)=2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x$

$$=1-\cos 2x-2\sin 2x+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x-2\sin 2x$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ だから}\right]$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\cos(2x+\alpha)$$

$$\left[\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5}\right]$$

よって, $f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\leqq f(x)\leqq\frac{7}{2}+\frac{5}{2}$$

$$1\leqq f(x)\leqq 6$$

これより, **最大値 6, 最小値 1**

79 (1) $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ より,

$\sqrt{3}\sin x+\cos x$ を合成すると

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

となる．x は実数すべてを動くから，

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ は $-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ の値すべてをとる．よって，

$\sqrt{3}\sin x+\cos x$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-2\leqq\sqrt{3}\sin x+\cos x\leqq 2}$$

(2)　$t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ の辺々を 2 乗すると

$$t^2=(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2$$
$$=3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=\sqrt{3}\cdot 2\sin x\cos x+2\sin^2 x+1$$
$$=\sqrt{3}\sin 2x+2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+1$$

（∵　2 倍角の公式，半角の公式）

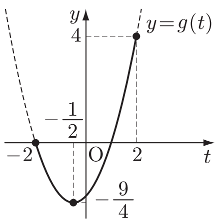
$$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2$$

と表すことができる．したがって，

$f(x)$
$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos x$
$=(t^2-2)+t$
$=\boldsymbol{t^2+t-2}$

(3)　(2)の結果を $g(t)$ とおき，平方完成すると

$$g(t)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$



となる．(1)の結果より $-2\leqq t\leqq 2$ であるから，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は

$t=-\frac{1}{2}$ のとき，**最小値 $-\frac{9}{4}$**

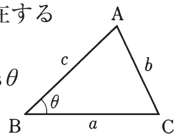
$t=2$ のとき，　**最大値 4**

をとる．

80　△ABC が存在する

$\Longleftrightarrow$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$ をみたす $c\,(>0)$ が存在する



を示す．

（⇒の証明）　AB$=c$ とすると

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$ は余弦定理である．

（⇐の証明）

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$$

より　$\cos\theta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$0<\theta<\pi$ より　$-1<\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<1$　……(＊)

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，(＊)を変形すると

$$-2ac<a^2+c^2-b^2<2ac$$

$$\therefore\ \begin{cases} b^2<(a+c)^2 \\ (a-c)^2<b^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ |a-c|<b<a+c$$

よって，a，b，c を 3 辺とする △ABC が存在する．

81-1　(1)　$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$\left[\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}\ \text{ゆえ}\right]$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(2)　$\sin B+\sin C-\sin A$

$$=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$\left[\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}\ \text{ゆえ}\right]$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

よって，与えられた式は

$$4\cdot\cos^2\frac{A}{2}\cdot2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=3\sin B\sin C$$

$$\therefore\quad 4\cos^2\frac{A}{2}\sin B\sin C=3\sin B\sin C$$

$\sin B>0$，$\sin C>0$ より

$$4\cos^2\frac{A}{2}=3$$

となる．$0<\dfrac{A}{2}<90^\circ$ に注意すると

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\boldsymbol{A=60^\circ}$ **の三角形**

81-2 $2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}+2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{D}{2}$

$$=2$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}$$
$$+\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}=2$$

$\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C+D}{2}=180^\circ$ より，

$$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}=0$$

$\cos\dfrac{A-B}{2}\leqq1$，$\cos\dfrac{C-D}{2}\leqq1$ で，

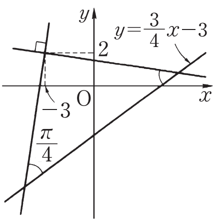
$\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{C-D}{2}=2$ ゆえ，

$$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C-D}{2}=1$$

$$\therefore\quad A=B,\ C=D$$

すなわち，$\boldsymbol{A=B}$ **の等脚台形．**

82 求める直線は2本ある．その傾きを m_1，$m_2\,(m_1>m_2)$ とすると，$m_1>\dfrac{3}{4}$ ゆえ，tan の加法定理より



$$\frac{m_1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{3}{4}m_1}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{4m_1-3}{4+3m_1}=1$$

$$\therefore\quad m_1=7$$

したがって，$m_1m_2=-1$ より，

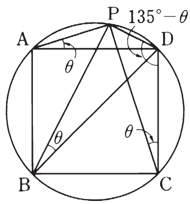
$$m_2=-\frac{1}{7}$$

ゆえに，求める直線の方程式は

$$y=7(x+3)+2,\ y=-\frac{1}{7}(x+3)+2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=7x+23,\ y=-\frac{1}{7}x+\frac{11}{7}}$$

83 (1) $\angle\mathrm{ABP}=45^\circ-\theta$，$\triangle\mathrm{ABP}$，$\triangle\mathrm{PCD}$ の外接円の半径は1だから，正弦定理から



$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{\mathrm{PB}}{\sin(90^\circ+\theta)}=2,$$

$$\frac{\mathrm{PC}}{\sin(135^\circ-\theta)}=\frac{\mathrm{PD}}{\sin\theta}=2$$

$$\therefore\quad \mathrm{PA}=2\sin(45^\circ-\theta)$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)}$$
$$\mathrm{PB}=2\sin(90^\circ+\theta)=\boldsymbol{2\cos\theta}$$
$$\mathrm{PC}=2\sin(135^\circ-\theta)$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)}$$
$$\mathrm{PD}=\boldsymbol{2\sin\theta}$$

(2) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2$

$$=2(\cos\theta-\sin\theta)^2+4\cos^2\theta$$
$$+2(\cos\theta+\sin\theta)^2+4\sin^2\theta$$
$$=8(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\boldsymbol{8}$$

(3) $\mathrm{PA}^4+\mathrm{PB}^4+\mathrm{PC}^4+\mathrm{PD}^4$

$$=4(\cos\theta-\sin\theta)^4+16\cos^4\theta$$
$$+4(\cos\theta+\sin\theta)^4+16\sin^4\theta$$
$$=24(\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta)$$
$$=24(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=\boldsymbol{24}$$

84 (1) OP＝OQ ゆえ，O は PQ の垂直二等分線上にあり，それは RS の垂直二等分線でもあるから，

$$OS=OR$$

よって，△OSR は正三角形．

したがって $OS=SR=PQ$，

$\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{AB}-2\overset{\frown}{PA}$ だから

$\angle POQ=60^\circ-2\theta$

∴ $OS=PQ=\boldsymbol{2\sin(30^\circ-\theta)}$

（ただし，$0^\circ<\theta<30^\circ$）

(2) P から OA におろした垂線 PH の長さは $OP\sin\theta=\sin\theta$ だから，

$SP=2\sin\theta$ （∵ $\angle PSA=30^\circ$）

よって，

$\square PQRS=RS\cdot SP$

$=4\sin(30^\circ-\theta)\sin\theta$

$=2\{\cos(30^\circ-2\theta)-\cos 30^\circ\}\leqq 2-\sqrt{3}$

等号は $30^\circ-2\theta=0$，すなわち $\theta=15^\circ$ のとき．

これより，$\boldsymbol{\theta=15^\circ}$ のとき，面積は最大値 $\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ をとる．

第5章 指数関数・対数関数

85

(1) $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{6x}+1}{2^{2x}(2^{2x}+1)}$

$=\dfrac{3^3+1}{3(3+1)}=\dfrac{28}{3\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$

別解 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=2^{2x}-2^x\cdot2^{-x}+2^{-2x}$

$=3-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

(2) $\log_{3\sqrt{3}}81\sqrt{3}=\dfrac{\log_3 3^4\cdot3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3\cdot3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{9}{2}\div\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{3}$

(3) $-\log_2(\sqrt{2}+1)=\log_2(\sqrt{2}+1)^{-1}$

$=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\log_2(\sqrt{2}-1)$

∴ $2^{-\log_2(\sqrt{2}+1)}=2^{\log_2(\sqrt{2}-1)}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(4) $(\log_2 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$

$=\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}+\dfrac{\log 3}{3\log 2}\right)\left(\dfrac{\log 2}{\log 3}+\dfrac{\log 2}{2\log 3}\right)$

（底は 10 とし，省略する）

$=\dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 2}{\log 3}\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{2}$

86

$$\begin{cases}\log_2(1-x)-2\log_4(y+6)=-2 & \cdots\text{①}\\ 3\cdot2^x+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y=2 & \cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

①の真数条件より

$$\begin{cases}1-x>0\\ y+6>0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}x<1\\ y>-6\end{cases}\qquad\cdots\cdots\text{③}$$

①を変形すると

$\log_2(1-x)+2=2\cdot\dfrac{\log_2(y+6)}{\log_2 4}$

$\log_2(1-x)+\log_2 4=\log_2(y+6)$

$\log_2 4(1-x)=\log_2(y+6)$

∴ $4(1-x)=y+6$

$\therefore\quad y=-4x-2$

このとき

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{y}=(2^{-\frac{1}{2}})^{y}=2^{-\frac{y}{2}}=2^{2x+1}$$
$$=2\cdot(2^{x})^{2}$$

であり，②は

$$3\cdot 2^{x}+2\cdot(2^{x})^{2}=2$$
$$2\cdot(2^{x})^{2}+3\cdot 2^{x}-2=0$$
$$(2\cdot 2^{x}-1)(2^{x}+2)=0$$

③より $0<2^{x}<2$ であるから

$$2^{x}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad x=-1$$

このとき

$$y=-4\cdot(-1)-2=2$$

これは③をみたす．

以上により $\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 2)}$

87-1 $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x}<3^{5x-2} & \cdots\cdots① \\ \log_{9}\dfrac{3}{x}>1 & \cdots\cdots②\end{cases}$

①より

$$3^{-3x}<3^{5x-2}$$

底 3 は 1 より大きいから

$$-3x<5x-2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}<x \qquad\cdots\cdots①'$$

②については，(真数)>0 より $x>0$ である．このとき

$$\log_{9}\frac{3}{x}>\log_{9}9$$

底 9 は 1 より大きいから

$$\frac{3}{x}>9$$

$$\therefore\quad x<\frac{1}{3}\quad(\because\quad x>0)\qquad\cdots\cdots②'$$

①′，②′ より，求める x の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}}$$

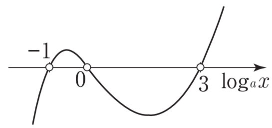
87-2 x，a はともに真数でともに底だから，$x>0$，$x\neq 1$；$a>0$，$a\neq 1$

このとき，与式の底を a にそろえると

$$\log_{a}x-\frac{3}{\log_{a}x}>2$$

$$\therefore\quad \frac{(\log_{a}x+1)(\log_{a}x-3)}{\log_{a}x}>0$$

$$\therefore\quad \log_{a}x(\log_{a}x+1)(\log_{a}x-3)>0$$



$$\therefore\quad -1<\log_{a}x<0,\ \ 3<\log_{a}x$$

$$\therefore\quad \log_{a}\frac{1}{a}<\log_{a}x<\log_{a}1,$$
$$\log_{a}a^{3}<\log_{a}x$$

ゆえに

$$\begin{cases}\boldsymbol{0<a<1\ \text{のとき，}} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{1<x<\dfrac{1}{a},\ \ 0<x<a^{3}} \\ \boldsymbol{a>1\ \text{のとき，}\ \dfrac{1}{a}<x<1,\ \ a^{3}<x}\end{cases}$$

88 $1<a<b<a^{2}$ より，底 a の対数をとると　$1<\log_{a}b<2$

このとき

$\log_{b}a=\dfrac{1}{\log_{a}b}$ より

$$\frac{1}{2}<\log_{b}a<1$$

$\log_{a}\dfrac{a}{b}=1-\log_{a}b$ より

$$-1<\log_{a}\frac{a}{b}<0$$

$\log_{b}\dfrac{b}{a}=1-\dfrac{1}{\log_{a}b}$ より

$$0<\log_{b}\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\log_{a}\frac{a}{b}<\log_{b}\frac{b}{a}<\log_{b}a<\log_{a}b}$$

89 (1) (ア) $2\cdot 7^{2}<10^{2}$，(イ) $7^{9}>2^{2}\cdot 10^{7}$ について，辺々の常用対数をとると

$$\begin{cases}\log_{10}2+2\log_{10}7<2 \\ 9\log_{10}7>2\log_{10}2+7\end{cases}$$

$\log_{10}2=a$，$\log_{10}7=b$ とおくと

$$\begin{cases} a+2b<2 \\ 9b>2a+7 \end{cases}$$

であり，b のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{9}a+\frac{7}{9}<b<-\frac{a}{2}+1} \quad \cdots\cdots ①$$

(2) (ウ) $2^{10}>10^3$ について，辺々の常用対数をとると

$$10\log_{10}2>3 \qquad \therefore\ 10a>3$$

$$\therefore\ a>\frac{3}{10} \quad \cdots\cdots ②$$

②を用いると

$$\frac{2}{9}a+\frac{7}{9}>\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{10}+\frac{7}{9}=\frac{38}{45}=0.844\cdots$$

$$-\frac{a}{2}+1<-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+1=\frac{17}{20}=0.85$$

であり，$0.84<b<0.85$ が成り立つ．よって，$b=\log_{10}7$ の小数第 2 位までの値は

0.84

次に，①から

$$\frac{2}{9}a+\frac{7}{9}<-\frac{a}{2}+1$$

$$\therefore\ \frac{13}{18}a<\frac{2}{9} \qquad \therefore\ 13a<4$$

だから，②とあわせて

$$\frac{3}{10}<a<\frac{4}{13}$$

$$\therefore\ 0.3<a<0.307\cdots$$

よって，$a=\log_{10}2$ の小数第 2 位までの値は

0.30

90-1 (1) 12^{12} が n 桁の整数とすると，n は

$$10^{n-1}\leqq 12^{12}<10^n$$

をみたす．底 10 の対数をとると

$$n-1\leqq\log_{10}12^{12}<n \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{aligned}\log_{10}12^{12}&=12\log_{10}(2^2\cdot 3)\\&=12(2\log_{10}2+\log_{10}3)\end{aligned}$$

であり，$0.3<\log_{10}2<0.302$，
$0.477<\log_{10}3<0.478$ であるから

$$\begin{aligned}12(2\times0.3+0.477)<\log_{10}12^{12}&\\<12(2\times0.302+0.478)&\end{aligned}$$

$$12\times1.077<\log_{10}12^{12}<12\times1.082$$

$$12.924<\log_{10}12^{12}<12.984$$

①をみたす整数 n は 13 である．
よって，12^{12} の桁数は，**13** である．

(2) (1) より 12^{12} は 14 桁に近い 13 桁の数であることに注意する．

$$\begin{aligned}\log_{10}13^{13}>\log_{10}12^{13}&\\=13\times(2\log_{10}2+\log_{10}3)&\\>13(2\times0.3+0.477)&\\=13\times1.077&\\=14.001&\\>14&\\=\log_{10}10^{14}&\end{aligned}$$

$$\therefore\ 13^{13}>10^{14}$$

であるから，13^{13} は 14 桁の整数でない．
……(証明終わり)

90-2 (1) $x=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{50}$ とおく．

$$\begin{aligned}\log_{10}x&=50(\log_{10}2+\log_{10}3-\log_{10}7)\\&=50(0.3010+0.4771-0.8451)\\&=-3.35=-4+0.65\end{aligned}$$

よって，**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

(2) $\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-0.3010=0.6990$，

$$\log_{10}4=2\times0.3010=0.6020$$

$$\therefore\ \log_{10}4<0.65<\log_{10}5$$

よって，小数第 4 位に現れる数字は **4**

91-1 (1) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{2x+1}{x+3}\to\mathbf{\dfrac{3}{4}}\ (x\to1)$

(2) $x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}\,x)$

$=\dfrac{x^3(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x}$

$=\dfrac{x^3(\sqrt{x^4+1}-x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x}$

$=\dfrac{x^3(x^4+1-x^4)}{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)}$

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}+1\right)}$

$\to\mathbf{\dfrac{1}{4\sqrt{2}}}\ (x\to\infty)$

91-2 第1式が成立するためには，

$\lim\limits_{x\to1}(ax^3+bx^2+cx+d)=0$

$\therefore\quad a+b+c+d=0$ ……①

であることが必要．

①のとき，第1式の左辺

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x^3-1)+b(x^2-1)+c(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{3a+2b+c}{3}$

$\therefore\quad\dfrac{3a+2b+c}{3}=1$ ……②

同様にして，第2式から

$-8a+4b-2c+d=0$ ……③

であることが必要で

$\dfrac{12a-4b+c}{-3}=4$ ……④

与えられた条件は，①かつ③のもとで，②かつ④であることと同値である．すなわち，①，②，③，④を連立させて，

$\boldsymbol{a=-1,\ b=1,\ c=4,\ d=-4}$

92-1 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\dfrac{f(a)-f(a-3h)}{h}\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{2\{f(a+2h)-f(a)\}}{2h}+\dfrac{3\{f(a-3h)-f(a)\}}{-3h}\right]$

$=2f'(a)+3f'(a)$

($\because$ $h\to0$ のとき $2h\to0$，$-3h\to0$)

$=5f'(a)=\boldsymbol{5b}$

92-2 $F(x)=af(x)-xf(a)$，$G(x)=ag(x)-xg(a)$ とおく．

$F(a)=0$，$G(a)=0$

また $G'(a)=ag'(a)-g(a)\neq0$ なので

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\{F(x)-F(a)\}\div(x-a)}{\{G(x)-G(a)\}\div(x-a)}=\dfrac{F'(a)}{G'(a)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{af'(a)-f(a)}{ag'(a)-g(a)}}$

参考 この結果は数学Ⅲでロピタルの定理として一般化される．

94 (1) $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $g(x)$ とすると，余りは1次以下だから，

$f(x)=(x-1)^2g(x)+p(x-1)+q$ ……①

とおくことができる．

これを x で微分して

$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+p$ ……②

①，②から $f(1)=q$，$f'(1)=p$

よって，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは

$f'(1)(x-1)+f(1)$

(2) $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=4$ となるためには，$f(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れることが必要である．それは(1)から

余り$=0$：$f'(1)(x-1)+f(1)=0$

$\therefore\quad f'(1)=0$ かつ $f(1)=0$
と言い換えられる．

$$f(1)=0:a+b+c+4=0 \quad\cdots\cdots③$$
$$f'(1)=0:5a+4b+c=0 \quad\cdots\cdots④$$

このとき，①は
$$f(x)=(x-1)^2g(x)$$
であり，
$$L=\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$$
②から
$$f''(x)=2g(x)+4(x-1)g'(x)+(x-1)^2g''(x)$$
$$\therefore\quad f''(1)=2g(1)$$
$$f'(x)=5ax^4+4bx^3+c$$
$$f''(x)=20ax^3+12bx^2$$
より
$$L=g(1)=\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}(20a+12b)$$
よって，$L=4$ は
$$5a+3b=2 \quad\cdots\cdots⑤$$
与えられた条件は③，④のもとで⑤であることと同値であるから，
③，④，⑤を解いて
$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-2,\ b=4,\ c=-6}$$

95 (1) $y=x^3+x^2-1$ より
$$y'=3x^2+2x$$
よって，$x=t$ における接線は
$$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2-1$$
$$\therefore\quad y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2-1$$
これが原点を通る条件は
$$2t^3+t^2+1=0$$
$$\therefore\quad (t+1)(2t^2-t+1)=0$$
t は実数ゆえ，$t=-1$
よって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y=x}$

(2) $y'=2x$ より，$y=x^2$ の $x=t$ における接線は
$$y=2t(x-t)+t^2 \quad\therefore\quad y=2tx-t^2$$
これが，(1, 1) における接線と直交する条件は
$$2t\cdot(y')_{x=1}=4t=-1 \quad\therefore\quad t=-\frac{1}{4}$$
よって，求める直線の方程式は
$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}}$$
別解　先に傾きを求めて，判別式を利用して y 切片を決めてもよい．

96 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=t$ で接線を共有するとすれば
$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$
$$\therefore\quad \begin{cases} t^3-3t^2+3t+2=t^2-kt+4 \\ 3t^2-6t+3=2t-k \end{cases}$$
$$\therefore\quad \begin{cases} t^3-4t^2+3t-2=-kt & \cdots\cdots① \\ k=-3t^2+8t-3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
①，②より
$$t^3-4t^2+3t-2=t(3t^2-8t+3)$$
$$\therefore\quad t^3-2t^2+1=0$$
$$\therefore\quad (t-1)(t^2-t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$
ゆえに，②から，
$t=1$ のとき，$k=2$
$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき
$$k=-3(t^2-t-1)+5t-6$$
$$=5\cdot\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}-6=\frac{-7\pm5\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{k=2,\ \frac{-7\pm5\sqrt{5}}{2}}$$

97 (1) $y=x^3-ax \quad\cdots\cdots①$
点 P$(c,\ c^3-ac)$ における①の接線 T_P の方程式は
$$y=(3c^2-a)(x-c)+(c^3-ac)$$
$$\therefore\quad y=(3c^2-a)x-2c^3 \quad\cdots\cdots②$$
①，②を連立して
$$x^3-3c^2x+2c^3=0$$
$$\therefore\quad (x-c)^2(x+2c)=0$$
$$\therefore\quad x=c,\ -2c$$
$c=-2c$ のとき，$c=0$ で Q＝P．
$c\neq-2c$ のとき，Q≠P で
$$\mathrm{Q}(-2c,\ -8c^3+2ac)$$
以上より　$\boldsymbol{\mathrm{Q}(-2c,\ -8c^3+2ac)}$

(2) 題意より Q≠P で $c\neq0$．点Qに

おける①の接線 T_Q の傾きは

$$3(-2c)^2-a=12c^2-a$$

よって，

$T_P\perp T_Q \Longleftrightarrow (3c^2-a)(12c^2-a)=-1$

$\therefore\ 36c^4-15ac^2+a^2+1=0 \quad \cdots\cdots③$

$c^2=t$ とおくと，$t>0$ で③は

$36t^2-15at+a^2+1=0 \quad \cdots\cdots④$

④の判別式を D とすれば

$$D=9(9a^2-16)$$

また，④の 2 つの解の積は正なので，④は 0 を解にもたない．④の異なる正の解の個数は

$a\leqq 0$ または $D<0$ のとき　0 個
$a>0$，$D=0$ のとき　1 個
$a>0$，$D>0$ のとき　2 個

よって，③の異なる実数解の個数，すなわち，求める点Pの個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<\frac{4}{3}} \text{ **のとき　0 個**} \\ \boldsymbol{a=\frac{4}{3}} \text{ **のとき　2 個**} \\ \boldsymbol{a>\frac{4}{3}} \text{ **のとき　4 個**} \end{cases}$$

98　$C: y=x^2 \quad \cdots\cdots①$

$$y'=2x$$

点 $A(a,\ a^2)$ において，曲線 C の接線と直交する直線の方程式は

$$2a(y-a^2)=-(x-a)$$

これと①を連立して

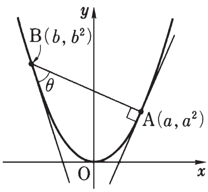
$$2a(x^2-a^2)=-(x-a)$$

$$\therefore\ (x-a)(2ax+2a^2+1)=0$$

$\therefore\ b=-\dfrac{2a^2+1}{2a}\quad (a\neq 0) \quad \cdots\cdots②$

(1)　$a=1$ のとき

$b=-\dfrac{3}{2}$



このとき，直線 AB の傾きを m，点Bにおける接線の傾きを m' とすると

$m=-\dfrac{1}{2}$，$m'=-3$

$$\therefore\ \tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| =\left|\frac{-\frac{1}{2}-(-3)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)}\right|=\boldsymbol{1}$$

(2)　②から

$$|b|=\frac{2a^2+1}{2|a|}=|a|+\frac{1}{2|a|} \geqq 2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{2|a|}}=\sqrt{2}$$

等号は $|a|=\dfrac{1}{2|a|}$ すなわち，$2a^2=1$

ゆえに，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つから，

$b=\mp\boldsymbol{\sqrt{2}}$ のとき $|b|$ は最小である．

このとき $m=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$m'=\mp 2\sqrt{2}$

（複号同順）

$$\therefore\ \tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\frac{2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+2} =\frac{3}{3\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

99　曲線上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線は

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$

$$\therefore\ y=3(t^2-1)x-2t^3$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るための条件は，

$$b=3(t^2-1)a-2t^3$$

$\therefore\ 2t^3-3at^2+3a+b=0 \quad \cdots\cdots①$

3 次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なるので，点 $(a,\ b)$ から曲線に 3 本の接線がひけるためには，①が異なる 3 つの実数解をもつことが必要十分．

そこで，①の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

極値が異符号である条件を求めればよく，それは

$$f(0)f(a)<0$$

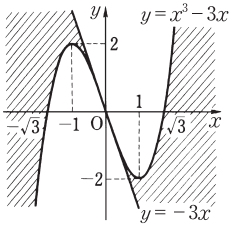
$\therefore\quad (3a+b)(-a^3+3a+b)<0$

よって，求める存在範囲は

$$(3x+y)(y-x^3+3x)<0$$

であり，図の斜線部分となる．ただし，境界は含まず，

$y=-3x$ は $y=x^3-3x$ に原点（変曲点）で接する．



100　$(x+2)^2$，$(x-2)^2$ で $f(x)$ を割ったときの等しい余りを $ax+b$ とおくと，$f(x)-ax-b$ は，x^4 の係数が 1 の 4 次式で，$(x+2)^2$，$(x-2)^2$ で割り切れる．したがって

$$f(x)-ax-b=(x+2)^2(x-2)^2$$

$$\therefore\quad f(x)=(x+2)^2(x-2)^2+ax+b$$

$$\therefore\quad f'(x)=2(x+2)(x-2)^2+(x+2)^2\cdot 2(x-2)+a$$

$f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れる条件は

$$f(1)=f'(1)=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 9+a+b=0 \\ 6-18+a=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad a=12,\ b=-21$$

$$\therefore\quad f(x)=(x+2)^2(x-2)^2+12x-21$$

直線 $y=12x-21$ は，曲線 $y=f(x)$ と $x=-2$，$x=2$ で接するから，求める直線は　$\boldsymbol{y=12x-21}$

101　$f'(x)=3ax^2-2x+(a-2)$

これが負にならない条件を求めればよい．それは

$a>0$ ……①　かつ

($f'(x)=0$ の判別式)$\leqq 0$：

$1-3a(a-2)\leqq 0$ ……②

②を整理して

$$3a^2-6a-1\geqq 0$$

$$\therefore\quad \left(a-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(a-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\geqq 0$$

①とあわせると，求める条件は

$$\boldsymbol{a\geqq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$$

102-1　$y=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$

$$y'=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$$
$$=4x\{x^2-3(a-1)x+(a^2-1)\}$$

y' の符号が正から負に変わる x が存在するための a の条件を求める．x が十分小さいときは負，十分大きいときは正だから，y' が異なる 3 つの x で 0 になることが必要十分である．そのためには，2 次方程式

$$x^2-3(a-1)x+(a^2-1)=0$$

が 0 でない，かつ，たがいに異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい．

この条件は 判別式>0 である．

$$\text{判別式}=9(a-1)^2-4(a^2-1)$$
$$=(a-1)\{9(a-1)-4(a+1)\}$$
$$=(a-1)(5a-13)$$

なので，$a<1$ または $\dfrac{13}{5}<a$ である．

これと $a^2-1\neq 0$ から，

$$\boldsymbol{a<-1,\ -1<a<1,\ \frac{13}{5}<a}$$

102-2　$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}bx^2+2x$

$$f'(x)=x^3+ax^2+bx+2\quad\cdots\cdots①$$

$f(x)$ は $x=-2$ で極値をとるから $f'(-2)=0$．さらに，$f(x)$ は $f'(c)=0$ $(c\neq -2)$ であるが $x=c$ では極値をとらないから

$$f'(x)=(x+2)(x-c)^2$$
$$=x^3+(2-2c)x^2+(c^2-4c)x+2c^2\quad\cdots\cdots②$$

①，②の係数を比較して

$$a=2-2c,\ b=c^2-4c,\ 2=2c^2$$

以上より，

$c=1$ のとき，$\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=-3}$

$c=-1$ のとき，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=5}$

103-1 $f(x)=x^3+ax^2+2x-2a$

$f'(x)=3x^2+2ax+2$

より，$f(x)$ が 2 つの異なる極値をもつ条件は

$f'(x)=0$ の 判別式>0

$a^2-6>0$ ……①

である．

$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{x}{3}+\frac{a}{9}\right)+\frac{2(6-a^2)}{9}x-\frac{20a}{9}$$

ここで，$f'(x)=0$ の解を α，β とすれば，

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ ゆえ，

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2(6-a^2)}{9}(\alpha+\beta)-\frac{40a}{9}$$
$$=-\frac{4}{27}a(6-a^2)-\frac{40}{9}a$$
$$=-\frac{4}{27}a(36-a^2)$$

$f(\alpha)+f(\beta)=0$ となる条件は，①とあわせると　$a=\pm\mathbf{6}$

103-2 (1) α，β は極値を与える x の値だから，

$f'(x)=0$

∴ $3x^2+2ax+b=0$

の 2 つの解である．解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3},\ \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

∴ $a=-\boldsymbol{\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}$，$b=\boldsymbol{3\alpha\beta}$

(2) $f(\gamma)=f(\alpha)=k$ とおくと，方程式 $f(x)-k=0$ は $x=\alpha$ を重解，γ を他の解としてもち，$f(x)$ の x^3 の係数は 1 だから

$f(x)-k=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$

∴ $f'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$
$=(x-\alpha)(3x-2\gamma-\alpha)$

$f'(\beta)=0$ で $\alpha\neq\beta$ ゆえ，$3\beta=2\gamma+\alpha$

∴ $2(\gamma-\beta)=\beta-\alpha$

∴ $(\gamma-\beta):(\beta-\alpha)=\mathbf{1:2}$

104 (1) $f(x)=3x^2-ax^3$ より，

$f'(x)=6x-3ax^2=3x(2-ax)$

$a\leqq0$ のとき，$f'(x)\geqq0$ $(0\leqq x\leqq2)$ より，最小値 $f(0)=0$ となり不適．

$0<a\leqq1$ のとき，$\frac{2}{a}\geqq2$ ゆえ，

$f'(x)=3ax\left(\frac{2}{a}-x\right)\geqq0$ $(0\leqq x\leqq2)$ で，

やはり最小値 $f(0)=0$ となり不適．

$a>1$ のとき，$0<\frac{2}{a}<2$ より $f(x)$ は

x	0	…	$\frac{2}{a}$	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗		↘	

上の表のように増減するから，最小値が -4 である条件は

$f(2)=-4$

∴ $12-8a=-4$

∴ $a=\mathbf{2}$ ($a>1$ をみたす)

(2) (1)より，$f(x)=3x^2-2x^3$ の最大値 M は

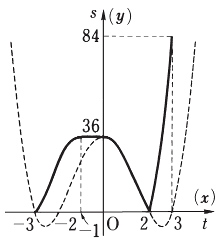
$$f\left(\frac{2}{a}\right)=f(1)=\mathbf{1}$$

105 $y=f(x)$ のグラフは次図の破線のようになり

$t\leqq x\leqq t+1$

$(-3\leqq t\leqq3)$

における $f(x)$ の最大値 $g(t)$ は



$-3\leqq t\leqq-1$ のとき；$g(t)=f(t+1)$

$t\leqq0\leqq t+1$

すなわち

$-1\leqq t\leqq0$ のとき；

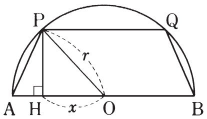
$g(t)=f(0)=36$

$0\leqq t\leqq2$ のとき；$g(t)=f(t)$

$2\leqq t\leqq3$ のとき；$g(t)=f(t+1)$

ゆえに，$s=g(t)$ $(-3\leqq t\leqq3)$ のグラフは図における太実線である．

106 AB の中点を O とし，P から AB に下ろした垂線の足を H とする．OH$=x$ とおくと



$\mathrm{PH}=\sqrt{r^2-x^2}$，$\mathrm{PQ}=2x$ $(0<x<r)$

ゆえに，台形 ABQP の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}(2x+2r)\sqrt{r^2-x^2}$$
$$=\sqrt{(x+r)^2(r^2-x^2)}$$

$f(x)=(x+r)^2(r^2-x^2)$ とおけば

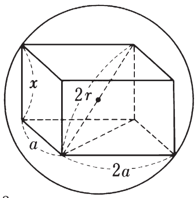
$$f'(x)=2(x+r)(r^2-x^2)-2x(x+r)^2$$
$$=2(x+r)^2(r-2x)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{r}{2}$	$\cdots$	(r)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

増減表より，求める最大値は

$$\sqrt{f\left(\frac{r}{2}\right)}=\frac{3}{2}r\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2}$$

107 (1) 長方形の 2 辺を a，$2a$ とおくと，右図から



$(2r)^2$
$=(2a)^2+a^2+x^2$

$$\therefore\ a^2=\frac{4r^2-x^2}{5}\quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\ V=2a^2x=\boldsymbol{\frac{2(4r^2-x^2)x}{5}}$$

(2) $V'=\dfrac{2(4r^2-3x^2)}{5}$

①より，$0<x<2r$

V の増減表をつくると，

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$	$\cdots$	$(2r)$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$ のとき V は最大となり，最大値は

$$V_{x=\frac{2\sqrt{3}}{3}r}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r\left(4r^2-\frac{4r^2}{3}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}\,r^3}{45}}$$

108-1 $x^3-3ax^2+3=\dfrac{5}{2}$ は，

$$x^3-3ax^2+\frac{1}{2}=0$$

と変形できる．

$f(x)=x^3-3ax^2+\dfrac{1}{2}$ とおき，$f(x)=0$ が，$0\leqq x\leqq 2$ で実数解をもつ a の範囲を求める．

$$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

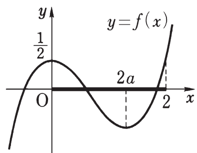
$f(0)=\dfrac{1}{2}$ に注意する．

$a\leqq 0$ のとき，

$f'(x)\geqq 0$ $(x\geqq 0)$ より $0\leqq x\leqq 2$ において $f(x)$ は単調増加であり，不適．

$0<a<1$ のとき，

$0<2a<2$ ゆえ，求める条件は



(0<a<1 のとき)

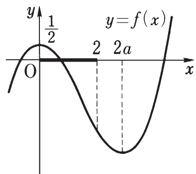
$f(2a)\leqq 0$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(1-8a^3)\leqq 0$$

$$\therefore\ a\geqq\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\leqq a<1\quad\cdots①$$

$a\geqq 1$ のとき，$2a\geqq 2$ ゆえ，求める条件は



(a≧1 のとき)

$f(2)\leqq 0$

$$\therefore\ \frac{17}{2}-12a\leqq 0$$

$$\therefore\ a\geqq\frac{17}{24}$$

$$\therefore\ a\geqq 1\quad\cdots\cdots②$$

①，②より求める a の範囲は，

$$\boldsymbol{a\geqq\frac{1}{2}}$$

108-2 (1) 与えられた条件より

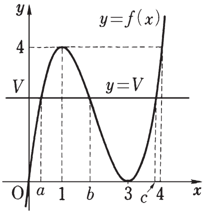
$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ ab+bc+ca=9 \\ abc=V \end{cases}$$

よって，a，b，c $(0<a\leqq b\leqq c)$ は x の3次方程式

$$x^3-6x^2+9x-V=0$$

$$\therefore\quad x^3-6x^2+9x=V$$

の3つの正の実数解である．



$f(x)=x^3-6x^2+9x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは上図のようになる．

$f(x)=V$ が3つの正の実数解をもつ条件は，$0<V\leqq 4$ で，$V=4$ のとき，

$$x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$\therefore\quad (x-1)^2(x-4)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ 4$$

ゆえに，各辺の長さの動き得る範囲は，

$$\boldsymbol{0<a\leqq 1\leqq b<3<c\leqq 4}$$

(2) (1)より，$a=b=1$，$c=4$ のとき，V は**最大値 4** をとる．

109 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ を微分して，

$$f'(x)=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)$$

であり，

$$\begin{aligned} &f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3)\\ &=(a_1-a_2)(a_1-a_3)\\ &\quad\times(a_2-a_1)(a_2-a_3)\\ &\quad\times(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\ &=-(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_3-a_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad D&=(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_3-a_1)^2\\ &=(-1)\times f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3) \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\\ &=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2\\ &\quad+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x\\ &\quad-a_1a_2a_3\\ &=x^3+px-q \end{aligned}$$

であるから，

$$f'(x)=3x^2+p$$

$$\therefore\quad f'(a_j)=3a_j{}^2+p\quad (j=1,\ 2,\ 3)$$

また，$f(a_j)=a_j{}^3+pa_j-q=0$ より

$$a_j{}^2=-p+\frac{q}{a_j}$$

$$(\because\quad q\neq 0 \text{ より } a_j\neq 0)$$

であり

$$\begin{aligned} f'(a_j)&=3\left(-p+\frac{q}{a_j}\right)+p\\ &=-2p+\frac{3q}{a_j} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\left(x-\frac{3q}{a_1}\right)\left(x-\frac{3q}{a_2}\right)\left(x-\frac{3q}{a_3}\right)\\ &=x^3-\frac{3q(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)}{a_1a_2a_3}x^2\\ &\quad+\frac{9q^2(a_1+a_2+a_3)}{a_1a_2a_3}x-\frac{27q^3}{a_1a_2a_3}\\ &=x^3+(-3p)x^2+(0)x+(-27q^2) \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned} D&=-f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3)\\ &=-\left(-2p+\frac{3q}{a_1}\right)\left(-2p+\frac{3q}{a_2}\right)\left(-2p+\frac{3q}{a_3}\right)\\ &=\left(2p-\frac{3q}{a_1}\right)\left(2p-\frac{3q}{a_2}\right)\left(2p-\frac{3q}{a_3}\right)\\ &=(2p)^3-3p(2p)^2-27q^2\\ &=-4p^3-27q^2 \end{aligned}$$

(答) ア **-1** イ **$-2p$** ウ **$3q$**
エ **$-3p$** オ **0** カ **$-27q^2$**
キ **$-4p^3-27q^2$**

110 $f(x)=x^3-ax+1$ とおく．

$$f'(x)=3x^2-a$$

(i) $a\leqq 0$ のとき，つねに $f'(x)\geqq 0$ であり，$f(x)$ は単調増加．

$f(0)=1$ であるから，$x\geqq 0$ においては，$f(x)\geqq 0$ であり，条件をみたす．

(ii) $a>0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}+1$$
$$=1-2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

であるから

$x\geqq 0$ において，つねに $f(x)\geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値$\geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\geqq 0$

$a>0$ であるから，この条件は

$0<a\leqq\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ と同値である．

(i)，(ii)をまとめて　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$

第7章 積分法とその応用

114 条件(ii)より

$$f'(x)=ax(x-1)-3$$
$$=ax^2-ax-3$$

と実数 $a\,(\neq 0)$ を用いて表すことができる．

条件(iii)より，$f(x)$ は極大値，極小値をもつから，$f'(x)=0$ は異なる2つの実数解 α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ をもつ．よって，

(判別式)>0 であり

$$a^2+12a>0$$
$$\therefore\quad a<-12,\ 0<a \quad \cdots\cdots ①$$

また，$|f(\beta)-f(\alpha)|=\beta-\alpha \quad \cdots\cdots ②$

ここで

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

であり

$$\beta-\alpha$$
$$=\left|\frac{a+\sqrt{a^2+12a}}{2a}-\frac{a-\sqrt{a^2+12a}}{2a}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+12a}}{|a|}$$

である．これらを②に代入して

$$\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}=\beta-\alpha$$
$$\therefore\quad |a|(\beta-\alpha)^2=6$$
$$\therefore\quad |a+12|=6 \qquad \therefore\quad a=-6,\ -18$$

①より，$a=-18$

$$\therefore\quad f'(x)=-18x^2+18x-3$$
$$\therefore\quad f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=-6x^3+9x^2-3x+C$$

(Cは定数)

条件(i)より　$f(0)=1$　　$\therefore$　$C=1$

以上より　$\boldsymbol{f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1}$

116-1 (1)　(i)　$t\leqq -1$ のとき，

$-1\leqq x\leqq 1$ の全域で $x\geqq t$ となるから

$$f(t)=\int_{-1}^1 (x-t)\,dx=-\int_{-1}^1 t\,dx=-2t$$

(ii) $-1<t<1$ のとき，x が -1 から 1 まで変わるとき，途中で t との大小が入れかわり，
$-1\leqq x\leqq t$ で $|x-t|=t-x$,
$t\leqq x\leqq 1$ で $|x-t|=x-t$

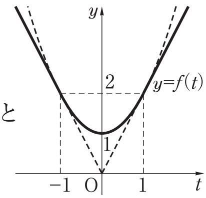
∴ $f(t)=\int_{-1}^{t}(t-x)\,dx+\int_{t}^{1}(x-t)\,dx$

$=\left[tx-\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{t}+\left[\dfrac{x^2}{2}-tx\right]_{t}^{1}$

$=t^2+1$

(iii) $1\leqq t$ のとき，$-1\leqq x\leqq 1$ の全域で　$x\leqq t$

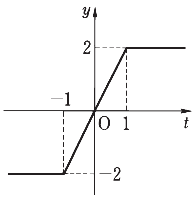
∴ $f(t)=\int_{-1}^{1}(t-x)\,dx=2t$



(i), (ii), (iii)から右図の太線が得られる．
$y=t^2+1$ と $y=\pm 2t$ を連立すると
$(t\mp 1)^2=0$
$t=\pm 1$ (重解)
ゆえ，直線と放物線は $t=\pm 1$ で接する．

(2) (1)から $f'(t)$

$$=\begin{cases}-2 & (t<-1)\\ 2t & (-1<t<1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$



$t=1$ では，$t<1$ 側の接線が $t>1$ の直線と一致するので，
$f'(1)=2$　同様にして，$f'(-1)=-2$
よって，$y=f'(t)$ のグラフは上のようになる．

116-2 $t^3-t=(t+1)t(t-1)$ ゆえ，
$t\leqq -1$, $0\leqq t\leqq 1$ で　$t^3-t\leqq 0$；
$-1\leqq t\leqq 0$, $t\geqq 1$ で　$t^3-t\geqq 0$
$-1\leqq x\leqq 1$ より

$$\begin{cases}-1\leqq -x\leqq 1\\ 0\leqq 1-x\leqq 2\end{cases}$$

である．積分区間 $-x\leqq t\leqq 1-x$ の中に $t=0$, 1 があるか否かで場合分けする．

(i) $-1\leqq -x\leqq 0\leqq 1-x\leqq 1$
(すなわち $0\leqq x\leqq 1$) のとき

$f(x)=\int_{-x}^{0}(t^3-t)\,dt$
$\qquad+\int_{0}^{1-x}-(t^3-t)\,dt$

$=\left[\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[-\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^2}{2}\right]_{0}^{1-x}$

$=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{(x-1)^4}{4}+\dfrac{(x-1)^2}{2}$

∴ $f'(x)=-x^3+x-(x-1)^3+(x-1)$
$\qquad=-x(x-1)(2x-1)$

(ii) $0\leqq -x\leqq 1\leqq 1-x$
(すなわち $-1\leqq x\leqq 0$) のとき

$f(x)=\int_{-x}^{1}-(t^3-t)\,dt$
$\qquad+\int_{1}^{1-x}(t^3-t)\,dt$

$=\left[-\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-x}^{1}+\left[\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{2}\right]_{1}^{1-x}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(x-1)^4}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{2}$

∴ $f'(x)=x^3-x+(x-1)^3-(x-1)$
$\quad=x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2-2x)$
$\quad=x(x-1)(2x-1)$

よって，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{1}{4}$	↘		↗	

最小値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，最大値は $f(-1)$，$f(1)$ のうち小さくない方である．

$f(-1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+4-2=\dfrac{9}{4}$

$f(1)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{32}$

これより，$f(x)$ の**最大値は** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$，**最小値は** $\boldsymbol{\dfrac{7}{32}}$

117 (1) $\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1}f(x)\,dx=k$ (定数)　……①

とおくと

$$f(x)=x^3-2x+k \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して,

$$k=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-2x+k)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1+k\right)$$
$$\therefore\quad k=-\frac{3}{4}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=x^3-2x-\frac{3}{4}}$$

(2) $2\int_0^1 |f(t)|\,dt=k \qquad \cdots\cdots①$

とおくと, k は $k\geqq 0$ である.

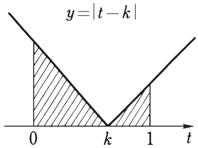
$$f(x)=x-k \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して,

$$2\int_0^1 |t-k|\,dt=k \qquad \cdots\cdots(*)$$

$0\leqq k\leqq 1$ のとき, (*)の左辺は下図の 2 つの三角形の面積の和なので

$$2\left\{\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=k$$
$$\therefore\quad 2k^2-3k+1=0$$
$$\therefore\quad k=1,\ \frac{1}{2}$$

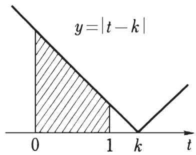


$k>1$ のとき, (*)の左辺は下図の台形の面積なので

$$2\cdot\frac{1}{2}\{k+(k-1)\}\cdot 1=k \qquad \therefore\quad k=1$$

これは $k>1$ をみたさないから不適.

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=x-1,\ x-\frac{1}{2}}$$



(3) $\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)\,dt$

$$=x^2\int_{-1}^1 f(t)\,dt-x\int_{-1}^1 2tf(t)\,dt+\int_{-1}^1 t^2 f(t)\,dt$$

であり

$\int_{-1}^1 f(t)\,dt=a,\ \int_{-1}^1 2tf(t)\,dt=b,$

$\int_{-1}^1 t^2 f(t)\,dt=c \quad \cdots\cdots①$とおくと

$$f(x)=x^3+(1+a)x^2-bx+c$$

これを用いると, ①の 3 式は,

$$a=\int_{-1}^1 f(t)\,dt=2\int_0^1 \{(1+a)t^2+c\}\,dt$$
$$=\frac{2(1+a)}{3}+2c$$
$$b=\int_{-1}^1 2tf(t)\,dt=2\int_0^1 (2t^4-2bt^2)\,dt$$
$$=\frac{4}{5}-\frac{4}{3}b$$
$$c=\int_{-1}^1 t^2 f(t)\,dt=2\int_0^1 \{(1+a)t^4+ct^2\}\,dt$$
$$=\frac{2(1+a)}{5}+\frac{2c}{3}$$

となる.

これから $a=-\frac{46}{31},\ b=\frac{12}{35},\ c=-\frac{18}{31}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=x^3-\frac{15}{31}x^2-\frac{12}{35}x-\frac{18}{31}}$$

(4) 与えられた等式を変形して

$$\int_0^x f(t)\,dt+x^2\int_0^1 f(t)\,dt=x^2+3x+a$$

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから, これを b とおくと, 与えられた等式は

$$\int_0^x f(t)\,dt=(1-b)x^2+3x+a \quad \cdots\cdots①$$

①において $x=0$ とすると

$$a=0$$

①の両辺を x で微分すると

$$f(x)=2(1-b)x+3 \qquad \cdots\cdots②$$

よって,

$$b=\int_0^1 f(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 \{2(1-b)t+3\}\,dt$$
$$=\Big[(1-b)t^2+3t\Big]_0^1$$
$$=4-b$$

であり

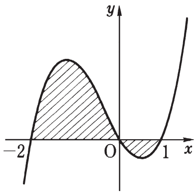
$$b=4-b \qquad \therefore\quad b=2$$

②に代入して

$$\boldsymbol{f(x)=-2x+3}$$

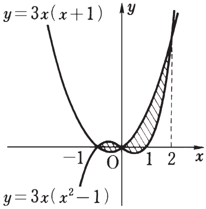
である.

118 (1) 与式は
$y=x(x+2)(x-1)$
と変形される．求める面積は



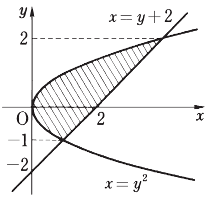
$$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx$$
$$-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\mathbf{\frac{37}{12}}$$

(2) $3x(x^2-1)$
$-3x(x+1)$
$=3x(x+1)(x-2)$
より，2 曲線の上下関係は右図のようになる．ゆえに，求める面積は



$$\int_{-1}^{0}\{3x(x^2-1)-3x(x+1)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{3x(x+1)-3x(x^2-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(3x^3-3x^2-6x)\,dx$$
$$-\int_{0}^{2}(3x^3-3x^2-6x)\,dx$$
$$=\frac{5}{4}+8$$
$$=\mathbf{\frac{37}{4}}$$

(3) $y^2=x$ と $y=x-2$ を連立すると $y^2=y+2$
∴ $y=-1,\ 2$
よって，求める面積は



$$\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}\,dy$$
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^{2}$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

119 (1) 直線の方程式は
$y-4=a(x-2)$
∴ $y=ax+4-2a$
曲線の方程式 $y=(x-1)^2+2$ と直線の方程式を連立すると
$ax+4-2a=(x-1)^2+2$
∴ $x^2-(a+2)x+(2a-1)=0$ ……①
①の左辺を $f(x)$ とおく．
$f(x)=0$ の方程式の判別式 D は
$(a+2)^2-4(2a-1)=(a-2)^2+4>0$
よって，$f(x)=0$ の解 α，β はつねに異なる実数である．$\alpha<\beta$ とする．
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解でき，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $f(x)\leqq 0$ ゆえ，求める面積は
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
α，β は $\dfrac{a+2\pm\sqrt{D}}{2}$ ゆえ，$\beta-\alpha=\sqrt{D}$
$$\therefore\quad S=\mathbf{\frac{1}{6}\{(a-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}}$$

(2) (1)より S が最小となる a の値は，
$a=\mathbf{2}$

120 (1) $Q_1(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q_2(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，点 Q_1 における接線の方程式は
$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$
∴ $y=2\alpha x-\alpha^2$
となり，これが $P(a,\ a-1)$ を通るから
$a-1=2\alpha a-\alpha^2$ ……①
点 Q_2 についても同様に，
$a-1=2\beta a-\beta^2$ ……②
①−②より　$\alpha+\beta=2a$ ……③
①+②，③より　$\alpha\beta=a-1$ ……④
ここで，直線 Q_1Q_2 の方程式は
$$y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$$
∴ $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$
よって，
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

③，④より α，β は，2 次方程式

$$t^2-2at+a-1=0$$

の解であり

$$t=a\pm\sqrt{a^2-a+1}$$

であるから

$$\beta-\alpha=2\sqrt{a^2-a+1}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a+1})^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}(\sqrt{a^2-a+1})^3}$$

(2) $$S=\frac{4}{3}\left\{\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}^3$$

$$\geqq\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\text{等号は } a=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

これより，$a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ のとき，S は**最小値** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

121 (1) l の方程式を $y=mx+n$ とおく． l の方程式と①を連立して

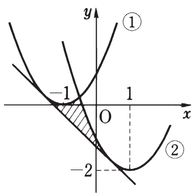
$$(x+1)^2=mx+n$$

$$\therefore\quad x^2+(2-m)x+(1-n)=0 \quad\cdots③$$

接する条件は，(③の判別式)$=0$，すなわち

$$(2-m)^2-4(1-n)=0$$

$$\therefore\quad m^2-4m+4n=0 \quad\cdots\cdots④$$



同様に，l の方程式と②を連立させて

$$x^2-(m+2)x-(n+1)=0 \quad\cdots\cdots⑤$$

(⑤の判別式)$=0$ から

$$m^2+4m+4n+8=0 \quad\cdots\cdots⑥$$

⑥−④より

$$8m+8=0 \qquad \therefore\quad m=-1$$

$$\therefore\quad n=-\frac{5}{4} \qquad l:\boldsymbol{y=-x-\frac{5}{4}}$$

(2) ③，⑤の重解はそれぞれ

$$x=\frac{m}{2}-1=-\frac{3}{2},\quad x=\frac{m}{2}+1=\frac{1}{2}$$

また，①，②の交点の x 座標は，

$$x=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，求める面積を S とすれば

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}\{(x+1)^2-(mx+n)\}\,dx$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{(x-1)^2-2-(mx+n)\}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

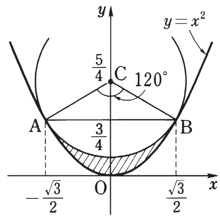
別解　①の $x=\alpha$ における接線と②の $x=\beta$ における接線：

$$y=2(\alpha+1)x-\alpha^2+1,$$

$$y=2(\beta-1)x-\beta^2-1$$

が一致する条件を考え，係数を比較してもよい．

123 2 曲線の方程式から x を消去して



$$y+(y-p)^2=1$$

$$\therefore\quad y^2-(2p-1)y+p^2-1=0\cdots\cdots①$$

これらが異なる 2 点で共通接線をもつ条件は

(判別式)$=0$ すなわち

$$(2p-1)^2-4(p^2-1)=0$$

$$\therefore\quad -4p+5=0 \qquad \therefore\quad p=\frac{5}{4}$$

このとき，①は

$$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=0 \qquad \therefore\quad y=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，円の中心を C とすれば

$\sin\angle\mathrm{OCB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore\quad \angle\mathrm{OCB}=60^\circ$

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx$$

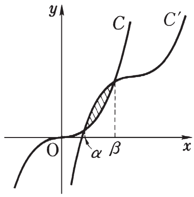
$-$(扇形 CAB$-$三角形 CAB)

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$

$$-\left(\frac{120}{360}\pi-\frac{1}{2}\sin 120^\circ\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}}$$

124 (1) C と C'：$y=(x-a)^3+a$ の方程式を連立して



$x^3=(x-a)^3+a$

$\therefore\quad 3x^2-3ax+a^2-1=0 \quad \cdots\cdots①$

よって，C と C' が異なる 2 点で交わる条件は，①の判別式を D とすると，

$D>0 \quad \therefore\quad -3(a^2-4)>0$

$a>0$ より $\boldsymbol{0<a<2}$

(2) ①の解 $\dfrac{3a\pm\sqrt{12-3a^2}}{6}$

を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-a)^3+a-x^3\}dx$$

$$=-3a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{-6}=\frac{a}{2}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{12-3a^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{18}a(4-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{a^2(4-a^2)^3}$ において

$4-a^2=t$ とおくと，$0<t<4$ であり，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{(4-t)t^3}$$

となる．$f(t)=(4-t)t^3$ とおくと

$$f'(t)=12t^2-4t^3$$
$$=4t^2(3-t)$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	27	$\searrow$	

$4-a^2=3$ となる a は $0<a<2$ より $a=1$ である．

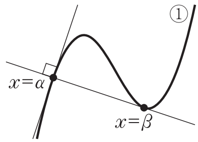
$a=1$ のとき，S の**最大値は** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

125-1 $y=\dfrac{1}{18}x^3-\dfrac{4}{3}x \quad\cdots\cdots①$

$$y'=\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}$$

$x=\beta$ における①の接線を $y=mx+n$ とすると，ある実数 α に対して

$$\frac{1}{18}x^3-\frac{4}{3}x-(mx+n)$$
$$=\frac{1}{18}(x-\alpha)(x-\beta)^2$$



が成り立つ．x^2 の係数を比較すると

$0=\alpha+2\beta$

$\therefore\quad \alpha=-2\beta$

よって，$x=\beta$，-2β における接線が直交する条件は

$$\left(\frac{1}{6}\beta^2-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\beta^2-\frac{4}{3}\right)=-1$$

$\therefore\quad \beta^4-10\beta^2+25=0$

$\therefore\quad \beta=\pm\sqrt{5}$

①は原点対称だから，$\beta=\sqrt{5}$ のときを考えればよい．

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{1}{18}x^3-\frac{4}{3}x-(mx+n)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{18}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5})^4}{3^3\cdot 8}$$

$$=\boldsymbol{\frac{75}{8}}$$

125-2 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく．
P$(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 l を
$y=px+q$，$y=f(x)$ と l の交点Qの座標を $(\beta,\ f(\beta))$ とすると

$$f(x)-(px+q)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

となる実数 α が存在する．x^2 の係数を比較すると

$$2\alpha+\beta=-a \qquad \cdots\cdots①$$

l と C の囲む部分の面積 S_1 は

$$S_1=\left|\int_\alpha^\beta\{(x^3+ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right|=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

点Qにおける接線 m が C と交わる点の x 座標を γ とすれば，β と γ の間には①と同じように

$$2\beta+\gamma=-a \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．また，m と C が囲む部分の面積 S_2 は，S_1 と同じように

$$S_2=\frac{(\beta-\gamma)^4}{12}$$

①−②から，$\beta-\gamma=2(\beta-\alpha)$

したがって，$S_2=\dfrac{2^4(\beta-\alpha)^4}{12}=16S_1$

$$\therefore\quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{16}\ (一定)$$

第8章 数　列

127-1 公差 $d\neq0$ より，a_n は n について単調であり，S_n が $n=8$ で最大となることから

$$S_7<S_8 かつ S_8>S_9$$

よって，$a_8>0$ かつ $a_9<0$
したがって，
$a+7d>0$ ……① かつ $a+8d<0$ …②
また，$S_8=136$ より，

$$\frac{8}{2}(2a+7d)=136$$

$$\therefore\quad 2a+7d=34 \qquad \cdots\cdots③$$

③から

$$a=17-\frac{7}{2}d \qquad \cdots\cdots③'$$

③′を①，②に代入すれば，

$$-\frac{34}{7}<d<-\frac{34}{9}$$

d は整数であるから，$d=-4$
このとき，$a=31$（整数）となる．
したがって，$\boldsymbol{a=31}$，$\boldsymbol{d=-4}$

127-2 $(x+1)^n$ の展開式の x^4，x^5，x^6 の係数は，それぞれ ${}_nC_4$，${}_nC_5$，${}_nC_6$ であり，この順に等差数列をなすから，

$$2{}_nC_5={}_nC_4+{}_nC_6$$

$$\therefore\quad 2\cdot\frac{n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$$

両辺に $\dfrac{6!(n-4)!}{n!}$ をかけて

$$2\cdot6(n-4)=5\cdot6+(n-5)(n-4)$$

よって，$(n-7)(n-14)=0$
したがって，$n=7$ または $n=14$
$\boldsymbol{n=7}$ のとき，**公差** $\boldsymbol{{}_7C_5-{}_7C_4=-14}$
$\boldsymbol{n=14}$ のとき，**公差** $\boldsymbol{{}_{14}C_5-{}_{14}C_4=1001}$

128-1

$$a_n=\overbrace{111\cdots11}^{n}$$

$$=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$$

$$=1+10+\cdots+10^{n-2}+10^{n-1}$$

$$=\frac{10^n-1}{10-1}=\mathbf{\frac{10^n-1}{9}}$$

$$S=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}}$$

128-2　a, b, c の順に等比数列であるから

$$b^2=ac \quad \cdots\cdots ①$$

c, a, b の順に等差数列であるから

$$2a=c+b \quad \cdots\cdots ②$$

a, b, c の和が 6 であるから

$$a+b+c=6 \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②, ③および, a, b, c が相異なることから

$$(a,\ b,\ c)=(\mathbf{2},\ \mathbf{-4},\ \mathbf{8})$$

129-1　積立金を a 円とする.
最初の年に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$$a(1+0.012)^{10}\ (\text{円})$$

2 年目に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$$a(1+0.012)^{9}\ (\text{円})$$

…………

10 年目に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$$a(1+0.012)\ (\text{円})$$

となる. ゆえに,

$$a(1+0.012)+a(1+0.012)^2+\cdots+a(1+0.012)^{10}$$
$$=1000000$$

左辺は初項 $1.012a$, 公比 1.012 の等比数列の第 10 項までの和であるから,

$$1.012a\times\frac{(1.012)^{10}-1}{1.012-1}=1000000$$

$$\therefore\quad 1.012a\times(1.13-1)=12000$$

$$\therefore\quad a=\frac{12000}{1.012\times0.13}=91213.1\cdots$$

したがって, 100 円未満を切り上げると **91300 円**積み立てればよい.

129-2　(1)　対数はすべて常用対数とする.

$$\log1.024=\log\frac{1024}{1000}=\log\frac{2^{10}}{10^3}=10\log2-3$$
$$=10\times0.30103-3=\mathbf{0.0103}$$

(2)　$1000\times(1.024)^n>2000$

$$\therefore\quad (1.024)^n>2 \quad \cdots\cdots ①$$

をみたす最小の自然数 n が求めるものである.
①の両辺の常用対数をとり, (1)の結果を用いると,

$$n\log1.024>\log2$$

$$\therefore\quad n>\frac{0.30103}{0.0103}=29.2\cdots$$

よって, 負債が 2000 万円を超えるのは **30 年後**である.

(3)　(借入金の元利合計)
≦(返済額の元利合計)
をみたす最小の自然数 n を求めればよい.
(左辺)$=1000\times(1.024)^n$
(右辺)$=48+48\times1.024+\cdots+48\times(1.024)^{n-1}$

$$=48\cdot\frac{(1.024)^n-1}{1.024-1}$$
$$=2000\{(1.024)^n-1\}$$

であるから, 上の不等式は

$$(1.024)^n\geqq2 \quad \cdots\cdots ②$$

となる. ②は①と等号だけの違いなので, (2)の結果と同じく, 返済完了するのは **30 年後**である.

別解　漸化式を立ててもよい. n 年後の負債残高を a_n (万円) とすると

$$a_{n+1}=1.024a_n-48$$

これは $a_{n+1}-2000=1.024(a_n-2000)$
と変形される. $a_0=1000$ であるから

$$a_n-2000=(1000-2000)(1.024)^n$$
$$=-1000(1.024)^n$$

$a_n\leqq0$ となるのは

$$2000-1000\times(1.024)^n\leqq0$$

$$\therefore\quad 2\leqq(1.024)^n$$

以下同じ.

130-1 (1) k の恒等式

$(k+1)^5-k^5$

$=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$

において，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

これから，

$$(n+1)^5-1^5$$

$$=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n$$

よって，

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$=(n+1)^5-1-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-n$$

$$=(n+1)^5-1-10\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\boldsymbol{\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n} \quad \cdots\cdots①$$

(2) (1)と同様にして，k の恒等式

$(k+1)^6-k^6$

$=6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1$

において $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると，

$$(n+1)^6-1^6=6\sum_{k=1}^{n}k^5+15\sum_{k=1}^{n}k^4+20\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$+15\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+n$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}(n+1)^6-\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$+(n$ の 4 次以下の式$)$ ……②

①と②より

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}(n^6+6n^5)$$

$-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}n^5+(n$ の 4 次以下の式$)$

$=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+(n$ の 4 次以下の式$)$

したがって，$\sum_{k=1}^{n}k^5$ は n について 6 次式であり，**6 次の項の係数は $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$，5 次の項の係数は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$** である.

130-2 (1) (右辺)

$$=\frac{a}{n(n+1)}+\frac{2b}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\frac{(a+2b)n+3a}{n(n+1)(n+3)}$$

左辺の分子と比較して

$$\begin{cases}a+2b=0\\3a=1\end{cases}$$

よって，$a=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$，$b=\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

(2) $S(n)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{n}{3(n+1)}-\frac{5n^2+13n}{36(n+2)(n+3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(7n^2+42n+59)}{36(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

130-3 $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

より，

与式

$$=\sum_{k=1}^{n-2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{n}-\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2} \\ & \cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}} \\ & \vdots \\ & \cancel{\sqrt{n-1}}-\cancel{\sqrt{n-2}} \\ +) & \sqrt{n}-\cancel{\sqrt{n-1}} \\ \hline & \sqrt{n}-\sqrt{2} \end{array}$$

131-1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{2^k}=S$ とする．

$$\begin{array}{rl} S= & \dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{2^2}+\cdots+\dfrac{3n}{2^n} \\ -)\ \dfrac{1}{2}S= & \qquad\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3(n-1)}{2^n}+\dfrac{3n}{2^{n+1}} \\ \hline \dfrac{1}{2}S= & \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{3n}{2^{n+1}} \end{array}$$

よって，

$$S=3\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right\}-\frac{3n}{2^n}$$

$$=3\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{3n}{2^n}$$

$$=6\cdot\frac{2^n-1}{2^n}-\frac{3n}{2^n}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3(2^{n+1}-n-2)}{2^n}}$$

131-2 (1)　$50=32+16+2$

$=2^5+2^4+2$

$=1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$

より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1=a_3=a_4=a_7=a_8=0,} \\ \boldsymbol{a_2=a_5=a_6=1} \end{cases}$$

(2)　$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ となるのは，a_1，a_2，$\cdots$，a_n のうちの 1 つが 1 で，他はすべて 0 のときである．

a_k のみ 1 とすると

$$\sum_{i=1}^{n}a_i2^{i-1}=2^{k-1}$$

であるから，求める要素の和は，

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\boldsymbol{2^n-1}$$

(3)　$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ となるのは，a_1，a_2，$\cdots$，a_n のうちの 2 つが 1 で，他はすべて 0 のときである．

a_j，a_k $(1\leqq i\leqq j\leqq n)$ のみ 1 とすると

$$\sum_{i=1}^{n}a_i2^{i-1}=2^{j-1}+2^{k-1}$$

であるから，求める要素の和は

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(2^{j-1}+2^{k-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left\{(n-j)2^{j-1}+2^j\cdot\frac{2^{n-j}-1}{2-1}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\{2^n+(n-j-2)2^{j-1}\}$$

$$=(n-1)2^n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j-2)2^{j-1}$$

ここで，$T_{n-1}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j-2)2^{j-1}$ とおくと

$$T_{n-1}=(n-3)+(n-4)2+(n-5)2^2+\cdots+(-1)\cdot2^{n-2}$$

$$2T_{n-1}=\qquad(n-3)2+(n-4)2^2+\cdots+0\cdot2^{n-2}+(-1)\cdot2^{n-1}$$

2 式の差をつくると

$$-T_{n-1}=(n-3)-2-2^2-\cdots-2^{n-2}+2^{n-1}$$

$$=n-2-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+2^{n-1}=n-1$$

よって，求める和は

$(n-1)2^n-(n-1)=\boldsymbol{(n-1)(2^n-1)}$

別解　$a_j=1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ をみたす S_n の要素の和は(2)より，

$$\{(2^n-1)-1\cdot2^{j-1}\}+(n-1)2^{j-1}$$

$$=(2^n-1)+(n-2)2^{j-1}$$

j を $1\leqq j\leqq n$ の範囲で動かすと

$$\sum_{j=1}^{n}\{(2^n-1)+(n-2)2^{j-1}\}$$

$$=(2^n-1)n+(n-2)\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=2(n-1)(2^n-1)$$

この和は，$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ をみたす S_n の要素を 2 回ずつ加えたものであるから，求める和は　$(n-1)(2^n-1)$

132 (1) $\dfrac{1}{a_1}=3,\ \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

より数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列である．

よって，$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot1=n+2$ より

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{n+2}}$$

(2) $b_1=a_1a_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}=\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

より，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+3)(k+4)}$$
$$=\frac{1}{12}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3(n+3)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，$b_n=\boldsymbol{\dfrac{n}{3(n+3)}}$

133 (1) $S_1=a_1=2$ と(＊)より

$$2(S_2+2)=(S_2-2)^2$$
$$\therefore\quad S_2(S_2-6)=0$$

各項が正より $S_2>S_1=2$ であり，

$$S_2=\boldsymbol{6}$$

$S_2=6$ と(＊)より

$$2(S_3+6)=(S_3-6)^2$$
$$\therefore\quad (S_3-2)(S_3-12)=0$$

各項が正なので $S_3>S_2=6$ であり，

$$S_3=\boldsymbol{12}$$

(2) $n\geqq2$ のとき

$$2(S_{n+1}+S_n)=(S_{n+1}-S_n)^2 \quad\cdots\cdots①$$
$$2(S_n+S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2 \quad\cdots\cdots②$$

①－② から

$$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2$$

$\therefore\quad 2(a_{n+1}+a_n)=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+1}+a_n>0$ より

$$a_{n+1}-a_n=2 \quad\cdots\cdots③$$

ここで，$a_2=S_2-a_1=6-2=4$ より

$a_2-a_1=4-2=2$

よって，③は $n=1$ のときも成り立つ．

$\{a_n\}$ は初項 2，公差 2 の等差数列であるから

$$a_n=2+2(n-1)=\boldsymbol{2n}$$

別解 (1)の結果から，

$S_n=n(n+1)$ ……(＊＊) と予想される．

これを数学的帰納法によって示す．

(Ⅰ) $n=1$ のとき，$S_1=2$ より (＊＊) は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき (＊＊) が成り立つ，すなわち，$S_k=k(k+1)$ であるとする．

$2(S_{k+1}+S_k)=(S_{k+1}-S_k)^2$ より

$S_{k+1}{}^2-2(S_k+1)S_{k+1}+S_k(S_k-2)=0$

これに (＊＊) を代入して，

$$S_{k+1}{}^2-2(k^2+k+1)S_{k+1}+k(k+1)(k-1)(k+2)=0$$

よって，

$\{S_{k+1}-(k-1)k\}\{S_{k+1}-(k+1)(k+2)\}=0$

各項が正なので $S_{k+1}>S_k=k(k+1)$ であり

$$S_{k+1}=(k+1)(k+2)$$

となり，$n=k+1$ のときも (＊＊) は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての n について (＊＊) は成り立つ．

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n(n+1)-(n-1)n$$
$$=2n$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，$a_n=2n$

134 (1) 第 k 項は k なので，

$$\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41=\boldsymbol{2870}$$

(2) 求める総和を S とする．

$(1+2+\cdots+20)^2$

$=1^2+2^2+\cdots+20^2$

$\quad+2\{1\cdot2+1\cdot3+\cdots+(n-1)\cdot n\}$

$=1^2+2^2+\cdots+20^2+2S$

ここで，(1)の結果と

$$(1+2+\cdots+20)^2=\left(\frac{20\cdot21}{2}\right)^2=44100$$

より

$$44100=2870+2S$$

よって，$S=$**20615**

(3)　求める総和を T とする．

$$(1+2+\cdots+20)(1^2+2^2+\cdots+20^2)$$
$$=(1^3+2^3+\cdots+20^3)+T$$

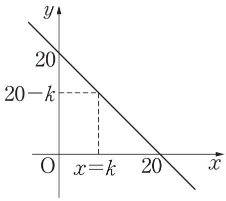
ここで，

$$1^3+2^3+\cdots+20^3=\frac{1}{4}\cdot20^2\cdot21^2$$
$$=44100$$

$$\therefore\quad 210\cdot2870=44100+T$$

よって，$T=210\cdot2870-44100$
$$=\mathbf{558600}$$

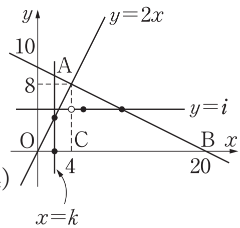
135　(1)　直線 $x=k$ ($k=0$，1，2，…，20) 上の格子点は $0\leqq y\leqq 20-k$ より $(21-k)$ 個ある．



よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\frac{21}{2}(21+1)$$
$$=\mathbf{231}\ (\text{個})$$

(2)　右図において，△AOC 内 (周も含む) において，直線 $x=k$ ($k=0$，1，…，4) 上の格子点は



$0\leqq y\leqq 2k$ より $(2k+1)$ 個であり，

△ACB 内 (辺 AC は含まず，端点 A，C を除く他の辺は含む) において，直線 $y=i$ ($i=0$，1，…，7) 上の格子点は

$5\leqq x\leqq 20-2i$ より

$(20-2i)-4=16-2i$ (個) である．

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1)+\sum_{i=0}^{7}(16-2i)$$
$$=\frac{5}{2}(1+9)+\frac{8}{2}(16+2)=\mathbf{97}\ (\text{個})$$

136　(1)　$a+b=k+1$

となる組 $(a,\ b)$ をまとめて第 k 群とよぶことにする．

第 1 群	第 2 群	第 3 群	…
(1，1)	(2，1)，(1，2)	(3，1)，(2，2)，(1，3)	…

第 k 群には k 個の自然数の組があるから，200 番目に現れる組が第 k 群にあるとすると

$$1+2+3+\cdots+(k-1)<200$$
$$\leqq1+2+3+\cdots+(k-1)+k$$

$$\therefore\quad \frac{(k-1)k}{2}<200\leqq\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\therefore\quad (k-1)k<400\leqq k(k+1)$$

$19\cdot20=380$，$20\cdot21=420$　より，$k=20$

$\dfrac{19\cdot20}{2}=190$　より，200 番目は第 20 群の $200-190=10$ (番目) にあるから，求める組は

$$\mathbf{(11,\ 10)}$$

(2)　$(m,\ n)$ は第 $(m+n-1)$ 群の n 番目の組であるから，これは

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}\ (\textbf{番目})$$

に現れる．

137-1　次のような群数列を対応させて求める．

第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	…
1	2，3	4，5，6	7，8，9，10	

(1)　$a_{m,1}$ は第 m 群の初項である．第 k 群には k 個の項があるから，

$$a_{m,1}=\{1+2+\cdots+(m-1)\}+1$$
$$=\frac{1}{2}(m-1)m+1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(m^2-m+2)}$$

(2) $a_{m,n}$ は第 $m+n-1$ 群の n 番目であるから,

$$a_{m,n}=\{1+2+\cdots+(m+n-2)\}+n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}$$

137-2

	37	36	35	34	33	32	31	x_4
	38	17	16	15	14	13	30	
	39	18	5	4	3	12	29	
	40	19	6	1	2	11	28	
	41	20	7	8	9	10	27	
	42	21	22	23	24	25	26	
y_4	43	44	45	46	47	48	49	

(1) 1, 1〜9, 1〜25, 1〜49, … はそれぞれ 1 を中心に 1 辺に 1 個, 3 個, 5 個, 7 個, …が並ぶ正方形内にあり, その右下端にその中の最大の数があるので, 49 の右斜め下の数は $9^2=\mathbf{81}$

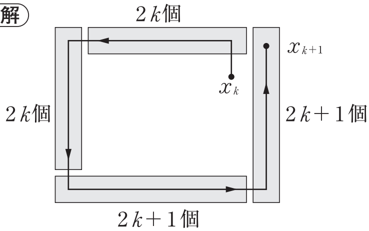
(2) 1 から x_n は, 横 $2n$, 縦 $2n-1$ の長方形内にあるので,

$$x_n=\boldsymbol{2n(2n-1)}$$

同様に, 1から y_n は, 横 $2n+1$, 縦 $2n$ の長方形内にあるので,

$$y_n=\boldsymbol{2n(2n+1)}$$

別解



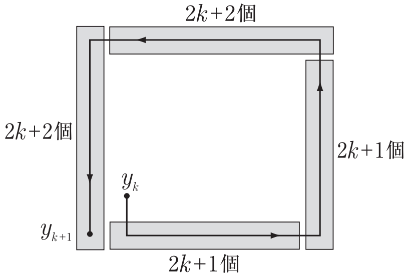
上図より, x_k から x_{k+1} までの間に $8k+2$ 増えるから,

$n\geqq2$ のとき,

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+2)$$
$$=2+\frac{(n-1)\{10+(8n-6)\}}{2}$$
$$=2+(n-1)(4n+2)$$
$$=4n^2-2n$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ.

同じく, y_k から y_{k+1} までの間に $8k+6$ 増えるから,



$n\geqq2$ のとき,

$$y_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+6)$$
$$=6+\frac{(n-1)\{14+(8n-2)\}}{2}$$
$$=6+(n-1)(4n+6)$$
$$=4n^2+2n$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ.

138-1 (1) $S_n=-5+2n-a_n\ (n\geqq1)$ ……①

$S_{n+1}=-5+2(n+1)-a_{n+1}\ (n\geqq0)$ ……②

②−① より

$$a_{n+1}=2-a_{n+1}+a_n$$

したがって, $\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ (n\geqq1)}$

(2) ①において, $n=1$ とおくと,

$$a_1=-5+2-a_1$$

したがって, $a_1=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$

(3) (1)の関係式は

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$ と変形されるから,

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって, $a_n=\boldsymbol{2-7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

138-2 (1) $a_1=1>0$ であることと，与えられた漸化式の形から，すべての n に対して $a_n>0$ である（厳密には数学的帰納法を用いる）.
両辺の逆数をとることができて，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{a_n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}+3$$

よって，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3}$$

(2) (1)の結果は $b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ と変形されるから，

$$b_n+3=(b_1+3)\cdot 2^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}$$

よって，$b_n=2^{n+1}-3$
これより，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n+1}-3}}$$

139-1 (1) $a_{n+1}-a_n=3^n+2n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3^k+2k)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=1+\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+(n-1)n$$
$$=\frac{3^n}{2}+(n-1)n-\frac{1}{2}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ.
よって，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{3^n}{2}+(n-1)n-\frac{1}{2}}$$

(2) 与式の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

となる. $\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad b_1=\frac{6}{2}=3$$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$b_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$
$$=3+\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=3+\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ.

$$a_n=2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\right\}$$
$$=\boldsymbol{3^n+3\cdot 2^{n-1}}$$

別解 **1.** 与式の両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

となる. $\dfrac{a_n}{3^n}=c_n$ とおくと，

$$c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{3}$$

これは

$$c_{n+1}-1=\frac{2}{3}(c_n-1)$$

と変形される. 数列 $\{c_n-1\}$ は初項 $c_1-1=\dfrac{6}{3}-1=1$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$c_n-1=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{3^n}-1=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=3^n+3\cdot 2^{n-1}$$

2. $a_{n+1}=2a_n+3^n$ ……①
$\alpha 3^{n+1}=2\cdot\alpha 3^n+3^n$ ……②
②がどんな自然数 n に対しても成り立つのは
$3\alpha=2\alpha+1$ より，$\alpha=1$ のときである.
$\alpha=1$ として①，②の辺々をひくと

$$a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$$

が得られる.

$$a_n-3^n=(a_1-3)\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$$

これより，

$$a_n=3^n+3\cdot 2^{n-1}$$

139-2 $a_1=1>0$ であることと，与えられた漸化式の形から，すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ である（厳密には数学的帰納法を用いる）．よって，両辺の逆数をとることができて

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{na_n+2}{a_n}=2\cdot\frac{1}{a_n}+n$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，

$$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n+n \quad \cdots\cdots①$$

次にすべての自然数 n に対して

$$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+n \quad \cdots\cdots②$$

となるように，α，β を定めると，

$$\alpha=-1,\ \beta=-1$$

①－②より，$b_{n+1}=2b_n+n$ は

$$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$$

と変形される．
よって，数列 $\{b_n+n+1\}$ は初項 $b_1+1+1=3$，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n+n+1=3\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore\quad b_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$$

したがって，$a_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-n-1}}$

140 (1)　$a_{n+2}-pa_{n+1}$

$$=q(a_{n+1}-pa_n) \quad \cdots\cdots(*)$$
$$a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n=0$$

であるから，どんな n に対しても成り立つ条件は，与式と比較して

$$p+q=2,\ pq=-1$$

である．p，q は，解と係数の関係より

$$t^2-2t-1=0 \text{ の解 } t=1\pm\sqrt{2}$$

であり，$p<q$ より

$$\boldsymbol{p=1-\sqrt{2},\ q=1+\sqrt{2}}$$

(2)　(*)より，

$$c_{n+1}=qc_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．
また，(*)において，p と q を入れかえた等式も成り立つことから，

$$d_{n+1}=pd_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

も成り立つ．
これらより数列 $\{c_n\}$ は公比 q，初項 $c_1=a_2-pa_1=2-p=q$ の等比数列，数列 $\{d_n\}$ は公比 p，初項 p の等比数列である．
よって，

$$c_n=q\cdot q^{n-1}=\boldsymbol{(1+\sqrt{2})^n}$$
$$d_n=p\cdot p^{n-1}=\boldsymbol{(1-\sqrt{2})^n}$$

(3)　(2)の結果から

$$\begin{cases} a_{n+1}-pa_n=q^n \\ a_{n+1}-qa_n=p^n \end{cases}$$

これより，$-(p-q)a_n=q^n-p^n$
ここで，$-(p-q)=2\sqrt{2}$ であるから，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}$$

141-1 (1)　$a_{n+1}+tb_{n+1}$

$$=(2a_n+b_n)+t(4a_n-b_n)$$
$$=(2+4t)a_n+(1-t)b_n$$

より，

$$a_{n+1}+tb_{n+1}=k(a_n+tb_n)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2+4t)a_n+(1-t)b_n=ka_n+ktb_n$$

これが任意の n に対して成り立つ条件は，

$$\begin{cases} 2+4t=k & \cdots\cdots① \\ 1-t=kt & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して，

$$1-t=t(2+4t)$$
$$\therefore\quad 4t^2+3t-1=0$$
$$\therefore\quad (t+1)(4t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=-1,\ \frac{1}{4}$$

これより，$(t_1,\ k_1)$，$(t_2,\ k_2)$ は

$$\boldsymbol{(-1,\ -2),\ \left(\frac{1}{4},\ 3\right)}$$

(2)　(1)で求めた組 $(t,\ k)$ に対して数列 $\{a_n+tb_n\}$ は公比 k の等比数列であるから，

$$a_n+tb_n=(a_1+tb_1)k^{n-1}$$

$(t_1,\ k_1)=(-1,\ -2)$ に対し

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot(-2)^{n-1}$$
$$=\boldsymbol{-3\cdot(-2)^{n-1}}$$

$(t_2,\ k_2)=\left(\dfrac{1}{4},\ 3\right)$ に対し

$$a_n+\frac{1}{4}b_n=\left(a_1+\frac{1}{4}b_1\right)\cdot 3^{n-1}=\mathbf{2\cdot 3^{n-1}}$$

(3)　(2)の結果を連立して,

$$a_n=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\{\mathbf{8\cdot 3^{n-1}-3\cdot(-2)^{n-1}}\}$$

$$b_n=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\{\mathbf{2\cdot 3^{n-1}+3\cdot(-2)^{n-1}}\}$$

141-2

(1)　$a_{n+1}+2b_{n+1}$

$=(a_n+4b_n)+2(a_n+b_n)=3(a_n+2b_n)$

$a_1=b_1=1$ より，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=1+2\cdot 1=3$，公比 3 の等比数列であるから,

$$a_n+2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

(2)　$b_n=\dfrac{3^n-a_n}{2}$ を $a_{n+1}=a_n+4b_n$ に代入すると,

$$a_{n+1}=a_n+4\cdot\frac{3^n-a_n}{2}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=-a_n+2\cdot 3^n \qquad \cdots\cdots(*)$$

すべての自然数 n に対して

$$p3^{n+1}=-p3^n+2\cdot 3^n$$

が成り立つのは $p=\dfrac{1}{2}$ のときであるから，(*)は,

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}=-\left(a_n-\frac{1}{2}\cdot 3^n\right)$$

と変形できる.

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\cdot 3^n\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$，公比 -1 の等比数列であるから,

$$a_n-\frac{1}{2}\cdot 3^n=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{\mathbf{3^n+(-1)^n}}{\mathbf{2}}$

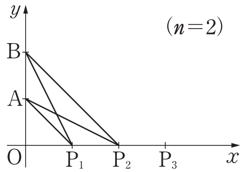
別解　**1.**　$a_{n+1}=-a_n+2\cdot 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割る，あるいは，$(-1)^{n+1}$ で割ることにより(*)を解くこともできる.

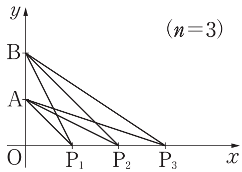
2.　$\alpha=\dfrac{\alpha+4}{\alpha+1}$ を解くと $\alpha=\pm 2$ なので，(1)の数列 $\{a_n+2b_n\}$ と数列 $\{a_n-2b_n\}$ をあわせて考える.

$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$ より，$a_n-2b_n=(-1)^n$．これと(1)の結果を連立して，$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$ を得る.

142

(1)　右図から $a_2=\mathbf{6}$, $a_3=\mathbf{10}$





(2)　線分 AP_1, …, AP_n, BP_1, …, BP_n によって，第 1 象限が a_n 個の部分に分けられているとき，線分 AP_{n+1} をひけば，この線分はすでにある n 本の線分 BP_1, …, BP_n と交わって，$n+1$ 個の部分に分けられる．この $n+1$ 個の部分 1 つ 1 つに対応して，第 1 象限の部分が 1 つずつ増える．さらに BP_{n+1} をひくことで，第 1 象限の部分がさらに 1 個増える．よって,

$$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+(n+2)}$$

(3)　$a_1=3$ である．(2)より，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)$$

$$=1+2+\{3+4+\cdots+n+(n+1)\}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{(n+1)(n+2)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ.

143-1　最初に平面と接していた面を A とおく.

(1)　$n=1$ のとき；1 回目の操作で A は底面でなくなるから,

$$p_1=\mathbf{0}$$

$n=2$ のとき；1回目の操作でAは底面にないので，2回目の操作でAが底面にくるためには回転軸の選び方が3本のうちの1つに確定される．

$$p_2=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

$n=3$ のとき；2回目の操作でAは底面になく，3回目の操作でAが底面にくるときであるから，

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) $(n+1)$回目にAが平面と接するのは，n回目の操作でAは底面になく，$(n+1)$回目の操作でAが底面にくるときであるから，

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$$

この漸化式は

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

と変形されるから，

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\mathbf{\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

143-2 各列の○または×のつけ方は$2^2=4$(通り)あるから，$2\times n$のマス目の○または×のつけ方は4^n通りである．少なくとも1つの列に○が2つ並ぶ並び方P_1，P_2は

$n=1$ のとき：$\begin{array}{|c|}\hline \bigcirc \\ \hline \bigcirc \\ \hline\end{array}$ だけであり，$P_1=1$

$n=2$ のとき：$\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \\ \hline \bigcirc & \\ \hline\end{array}$ のとき2列目は任意に取れて4通り，さらに

$\begin{array}{|c|c|}\hline \times & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \bigcirc \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline \times & \bigcirc \\ \hline \times & \bigcirc \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \bigcirc \\ \hline \times & \bigcirc \\ \hline\end{array}$ の3通りがあるから，$P_2=4+3=7$

また，$2\times(n+1)$のマス目の少なくとも1つの列に○が2つ並ぶのは

(i) $2\times n$のマス目の少なくとも1つの列に○が2つ並んでいるとき(第$(n+1)$列目は任意)．

(ii) $2\times n$のマス目のどの列も○が2つ並ばず((4^n-P_n)通り)，第$(n+1)$列目は○が2つ並んでいるとき．

の2通りがある．

(i)，(ii)は排反であるから，

$$P_{n+1}=P_n\times4+(4^n-P_n)\times1$$
$$=3P_n+4^n$$

である．○と×をそれぞれ$\frac{1}{2}$の確率でつけるとすると，4^n通りは等確率で起こるから，$q_n=\frac{P_n}{4^n}$ である．

q_{n+1}をq_nの式で表すと

$$q_{n+1}=\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{4}$$

であり，この漸化式は

$q_{n+1}-1=\frac{3}{4}(q_n-1)$ と変形される．

$q_1=\frac{1}{4}$ なので

$$q_n-1=(q_1-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad q_n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(答) ア $\mathbf{4^n}$ イ $\mathbf{1}$ ウ $\mathbf{7}$

エ $\mathbf{3P_n+4^n}$ オ $\mathbf{\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{4}}$

カ $\mathbf{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

144-1 1度に3段おりてしまうことをしない場合の最上段からn段おりる場合の数をa_nとすると

(i) 最後に1段おりるとき

最上段からn段おりる場合の数は

a_{n-1}通り

(ii) 最後に2段おりるとき

最上段から n 段おりる場合の数は

a_{n-2} 通り

であるから,

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

よって, $a_1=1$, $a_2=2$ とから

$$a_3=a_2+a_1=3$$
$$a_4=a_3+a_2=5$$
$$a_5=a_4+a_3=8$$
$$a_6=a_5+a_4=13$$
$$a_7=a_6+a_5=21$$
$$a_8=a_7+a_6=34$$
$$a_9=a_8+a_7=55$$

となる.

また, 残りがちょうど 3 段となって, 最後に 3 段おりるおり方の数は最上段から $9-3=6$ (段) おりる場合の数 $a_6=13$ であるから, 求める場合の数は

$55+13=$**68 (通り)**

144-2

(1) $n=3$ のとき,
球 : 1 2 3　1 2 3
箱 : 1 2 3　1 2 3

上図より $u_3=$**2**

$n=4$ のとき, 1 2 3 4 / 1 2 3 4 の型と 1 2 3 4 / 1 2 3 4 の型

があり, それぞれの場合の数を加えると,

$u_4=3+6=$**9**

(2) "球 x を箱 y に入れる" ことを $f(x)=y$ と書く. $f(1)=a\ (\neq 1)$ とすると a のとり方は 2, 3, $\cdots$, $n+1$ の n 通り.

(i) $f(a)=1$ のとき, 球 1, a を除いた残り $n-1$ 個の入れ方は u_{n-1} 通り.

(ii) $f(a)\neq 1$ のとき, 球 a を箱 1 に入れることができないのだから, 箱 1 を箱 a と考え $2\sim n+1$ の n 個の球の入れ方を考えればよいので u_n 通りある. よって,

$$u_{n+1}=n(u_{n-1}+u_n)=\boldsymbol{nu_n+nu_{n-1}}$$

(3) $u_{n+1}-(n+1)u_n=-u_n+nu_{n-1}$
$$=-(u_n-nu_{n-1})$$

であるから $\{u_{n+1}-(n+1)u_n\}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) は公比 -1 の等比数列であり,

$$u_{n+1}-(n+1)u_n=(u_2-2u_1)(-1)^{n-1}$$

$u_1=0$, $u_2=1$ だから,

$$\boldsymbol{u_{n+1}=(n+1)u_n+(-1)^{n-1}}$$

参考 これは攪乱(かくらん)順列 (完全順列) とよばれているもので, u_n はモンモール数という.

(3)の結果式において $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$ より, 両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{u_n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

よって, $n \geqq 2$ のとき

$$\frac{u_n}{n!}=\frac{u_1}{1!}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}=0+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

($k=i+1$ とおいた)

$$\therefore\quad u_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad (n \geqq 2)$$

145

(1) $(x+1)^n$

$=(x^2-2x-2)Q(x)+a_nx+b_n$ $\cdots\cdots$①

とおく. ①の両辺に $(x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned}&(x+1)^{n+1}\\&=(x^2-2x-2)(x+1)Q(x)\\&\quad+a_nx(x+1)+b_n(x+1)\\&=(x^2-2x-2)(x+1)Q(x)\\&\quad+a_n(x^2-2x-2)\\&\quad+(3a_n+b_n)x+(2a_n+b_n)\end{aligned}$$

これより,

$\boldsymbol{a_{n+1}=3a_n+b_n}$ $\cdots\cdots$②

$\boldsymbol{b_{n+1}=2a_n+b_n}$ $\cdots\cdots$③

(2) ②より $b_n=a_{n+1}-3a_n$
$b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$

これらを③に代入して

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_n+(a_{n+1}-3a_n)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_{n+2}&=4a_{n+1}-a_n\\&=4(4a_n-a_{n-1})-a_n\\&\qquad(\because\quad a_{n+1}=4a_n-a_{n-1})\\&=15a_n-5a_{n-1}+a_{n-1}\\&=5(3a_n-a_{n-1})+a_{n-1}\end{aligned}$$

これより a_{n+2} と a_{n-1} は 5 で割った余りが等しい. n は任意なので a_{n+3} と a_n

は5で割った余りも等しい．
ここで，$a_1=b_1=1$ より

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=15$

であるから，a_n を5で割った余りは

$$\begin{cases}\boldsymbol{n=3m} \text{ のとき } \mathbf{0} \\ \boldsymbol{n=3m-1} \text{ のとき } \mathbf{4} \quad (\boldsymbol{m}=\mathbf{1,\ 2,\ \cdots}) \\ \boldsymbol{n=3m-2} \text{ のとき } \mathbf{1}\end{cases}$$

(3) すべての n に対し

$a_{n+1}+tb_{n+1}=s(a_n+tb_n)$

となる s が存在するような t を求めればよい．

②，③から，

$$\begin{aligned}&a_{n+1}+tb_{n+1}\\&=(3a_n+b_n)+t(2a_n+b_n)\\&=(3+2t)a_n+(1+t)b_n\end{aligned}$$

となる．これがすべての n で $s(a_n+tb_n)$ に等しくなるためには

$$\begin{cases}3+2t=s\\1+t=st\end{cases} \text{ すなわち } \begin{cases}3+2t=s\\1+t=(3+2t)t\end{cases}$$

となればよい．
これより，

$2t^2+2t-1=0$

よって，$t=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(4) (3)の結果から

$s=3+2t=2\pm\sqrt{3}$

また，

$$\begin{aligned}a_n+tb_n&=(a_1+tb_1)s^{n-1}\\&=(1+t)s^{n-1}\end{aligned}$$

ここで，$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ とおくと，

$$a_n+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}b_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\alpha^{n-1} \quad \cdots\cdots④$$

$$a_n+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}b_n=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\beta^{n-1} \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n-\beta^n)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\alpha^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\beta^{n-1}\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}\}}\end{aligned}$$

146 (1) $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$

より，

$$a_2=\frac{4}{1+1}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{9}{4}},$$

$$a_3=\frac{4}{2+1}+\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{16}{9}},$$

$$a_4=\frac{4}{3+1}+\frac{9}{16}=\boldsymbol{\frac{25}{16}}$$

これより，$a_n=\boldsymbol{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2}$ と予想される．

(2) (I) $n=1$ のときは $\left(\dfrac{1+1}{1}\right)^2=4$

となり，成り立つ．

(II) $n=k$ で成り立つと仮定すると

$$a_k=\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{4}{k+1}+\frac{1}{a_k}\\&=\frac{4}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\\&=\frac{4(k+1)+k^2}{(k+1)^2}\\&=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2\end{aligned}$$

(I)，(II)より，すべての自然数 n に対して(1)の予想が正しいことが示された．

147-1 (1) α，β は $x^2-kx+2=0$ の2解であるから，

$\alpha^2=k\alpha-2$

$\beta^2=k\beta-2$

2式の両辺にそれぞれ α^n，β^n をかけて加えると，

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$

$=k(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-2(\alpha^n+\beta^n)$

$\therefore\quad a_{n+2}=ka_{n+1}-2a_n$

よって，$a_{n+2}=ra_{n+1}+sa_n$ をみたす定数 r, s の組の1つは

$(r,\ s)=(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{-2})$

(2) • a_n ($n=1,\ 2,\ \cdots$) は整数であること：

(I) $n=1,\ 2$ のとき，$a_1=\alpha+\beta=k$

$a_2=\alpha^2+\beta^2=k(\alpha+\beta)-4=k^2-4$

より成り立つ．

(II) $n=l,\ l+1$ のとき，

a_l, a_{l+1} が整数であるとすると，

$a_{l+2}=ka_{l+1}-2a_l$

であるから a_{l+2} も整数．

(I), (II) より $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して a_n は整数である．

• k が偶数ならば a_n は偶数であること：

(I) $n=1,\ 2$ のときは $a_1=k$,

$a_2=k^2-4$ は偶数である．

(II) $n=l,\ l+1$ のとき，

a_l, a_{l+1} が偶数であるとすると，

$a_{l+2}=ka_{l+1}-2a_l$

の右辺は2で割り切れるから，

a_{l+2} も偶数．

(I), (II)より $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して

a_n は偶数．

• k が奇数ならば a_n は奇数であることも同様に示せる．

147-2 与えられた等式に $n=1$ を代入して

$3(a_1^2)=a_1a_2$, $a_1=2$ より，$a_2=6$

$n=2$ を代入して

$3(2^2+6^2)=2\cdot6a_3$ よって，$a_3=10$

$n=3$ を代入して

$3(2^2+6^2+10^2)=3\cdot10a_4$ よって，$a_4=14$

以上から，数列 $\{a_n\}$ は，初項2，公差4の等差数列，すなわち，

$a_n=\boldsymbol{4n-2}$ ……(*)

であると推測される．

以下(*)がすべての自然数 n で成り立つことを示す．

(I) $n=1$ のとき，$a_1=2$ より(*)は成り立つ．

(II) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のとき，(*)の成立を仮定する．

$1\leqq m\leqq k$ のとき，

$a_m=4m-2$

であるから，

$$\sum_{m=1}^{k}a_m{}^2$$

$$=\sum_{m=1}^{k}4(4m^2-4m+1)$$

$$=4\left\{\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)-2k(k+1)+k\right\}$$

$$=\frac{4}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

よって，与えられた等式に $n=k$ を代入すると

$4k(2k-1)(2k+1)=k(4k-2)a_{k+1}$

したがって，

$a_{k+1}=4k+2=4(k+1)-2$

よって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

(I), (II)よりすべての自然数 n で(*)が成り立つ．

第9章 統計的な推測

148 (1) X は x と y の最大値(小さくない方の値)であるから

$$X \leqq k \iff \begin{cases} x \leqq k \\ y \leqq k \end{cases}$$

であり，求める確率は

$$P(X \leqq k) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k}{n} = \boldsymbol{\frac{k^2}{n^2}}$$

である．

(2) $k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} &P(X=k) \\ &= P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1) \\ &= \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{2k-1}{n^2} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．$k=1$ のときは $P(X=1)=\dfrac{1}{n^2}$ であり，①は $k=1$ のときも成り立つ．よって，X の確率分布は

$$\boldsymbol{P(X=k) = \frac{2k-1}{n^2} \ (1 \leqq k \leqq n)}$$

である．

(3) X の平均値を $E(X)$，分散を $V(X)$ とおく．

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2-k}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right\} \\ &= \frac{n+1}{6n}\{2(2n+1)-3\} \\ &= \boldsymbol{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}} \end{aligned}$$

である．

また

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3-k^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{2 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} \\ &= \frac{n+1}{6n}\{3n(n+1)-(2n+1)\} \\ &= \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} \end{aligned}$$

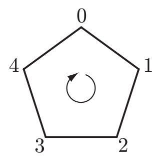
であるから

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} \\ &\qquad - \left\{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right\}^2 \\ &= \frac{n+1}{36n^2}\{6n(3n^2+n-1) \\ &\qquad -(n+1)(16n^2-8n+1)\} \\ &= \frac{n+1}{36n^2}(2n^3-2n^2+n-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}} \end{aligned}$$

である．

150 (1) (i) **$N=5$ のとき**

$X=1$ となるのは，1回目に1または6の目が出るときの2通りがあることに注意すると，X の確率分布は下表となる．



X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

また，$Y=j$ $(0 \leqq j \leqq 4)$ となるのは，$X=0$，1，2，3，4 に応じて2回目の目の出方が決まる．

例えば，$j=0$ のときは

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &\qquad + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{7}{36} \end{aligned}$$

である．これより

$$\therefore \quad P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} = \frac{7}{216}$$

である．一方

$$P(X=0,\ Y=0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

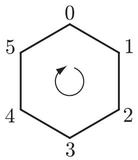
であるから

$P(X=0,\ Y=0) \neq P(X=0)P(Y=0)$

である．よって，**X と Y は独立でない．**

(ii) **$N=6$ のとき**

どの頂点に移動するときも目の出方は1通りであるから，X の確率分布は下表となる．



X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$Y=j\ (0 \leqq j \leqq 5)$ となるのは，$X=0$，1，…，5 のいずれに対しても2回目の目の出方は1通りに決まるから

$$P(Y=j)=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

であり，Y の確率分布は下表となる．

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

よって，任意の i，$j\,(0 \leqq i,\ j \leqq 5)$ に対して

$$P(X=i,\ Y=j)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},$$

$$P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

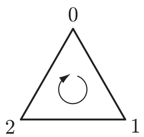
であり，

$$P(X=i,\ Y=j)$$
$$=P(X=i)P(Y=j)$$

が成り立つから，**X と Y は独立である．**

(2) (i) $N=3$ のとき

どの頂点に移動するときも目の出方は2通りであるから，X の確率分布は下表となる．



X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$Y=j\ (0 \leqq j \leqq 2)$ となるのは，$X=0$，1，2 のいずれに対しても2回目の目の出方は2通りに決まるから

$$P(Y=j)=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

であり，Y の確率分布は下表となる．

Y	0	1	2
$P(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

よって，任意の i，$j\,(0 \leqq i,\ j \leqq 2)$ に対して

$$P(X=i,\ Y=j)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

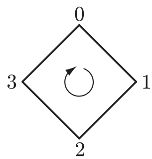
であり，

$$P(X=i,\ Y=j)$$
$$=P(X=i)P(Y=j)$$

が成り立つから，X と Y は独立である．

(ii) $N=4$ のとき

$X=1$ となるのは，1回目に1または5の目が出るときの2通り，$X=2$ となるのは，1回目に2または6の目が出るときの2通りがあるから，X の確率分布は下表となる．



X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$Y=0$ となるのは，$X=0$，1，2，3 に応じて2回目の目の出方を考えると

$$P(Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}$$
$$=\frac{9}{36}$$

$$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

である．

$$P(X=0,\ Y=0)$$
$$\neq P(X=0)P(Y=0)$$

であるから，X と Y は独立でない．

(iii) $N \geqq 7$ のとき

X	0	1	2	$\cdots$	6	7	$\cdots$	$N-1$
$P(X)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	0	$\cdots$	0

$$P(X=1)=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=6)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

(∵　1回目は6以外の目が出る)

$$P(X=1,\ Y=6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

したがって，

$$P(X=1,\ Y=6) \neq P(X=1)P(Y=6)$$

であるから

　　X と Y は独立でない．

以上より，X，Y が互いに独立となる N のすべての値は

　　$\boldsymbol{N=3,\ 6}$

である．

151 (1) A は3回とも偶数の目が出る事象であるから

$$P(A)=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

B は出る目の数がすべて異なる事象であるから

$$P(B)=1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{9}$$

である．また，$A\cap B$ は，2，4，6が1回ずつ出る場合であるから

$$P(A\cap B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

である．

$$P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$$

であり，A と B は**独立でない**．

(2) k 回目 $(k=1,\ 2,\ 3)$ に出る目の数を X_k とすると，$X=X_1+X_2+X_3$ である．

$$E(X_k)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

であるから

$$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$$
$$=3\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$

である．

よって，$Y=2X$ の期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y)=E(2X)=2E(X)$$
$$=2\times\frac{21}{2}$$
$$=\boldsymbol{21}$$

である．また，X_1，X_2，X_3 は独立であるから

$$V(X)=V(X_1+X_2+X_3)$$
$$=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)$$

である．ここで

$$E(X_k{}^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}$$

$$=\frac{91}{6}$$

$$V(X_k)=E(X_k{}^2)-\{E(X_k)\}^2$$
$$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}$$
$$=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$$

$$V(X)=3\cdot\frac{35}{12}=\frac{35}{4}$$

$$V(Y)=V(2X)=2^2V(X)$$
$$=4\times\frac{35}{4}=\boldsymbol{35}$$

(3) $Z_1=5$ かつ $Z_2=2$ となるのは

(i) 3回とも2以上5以下の目が出て，

かつ

(ii) 3回のうち少なくとも1回5の目が出て，

かつ

(iii) 3 回のうち少なくとも 1 回 2 の目が出る

ときである．それぞれの事象を C_1，C_2，C_3 とおくと，求める確率 $P(Z_1=5,\ Z_2=2)$ は

$$\begin{aligned}
&P(Z_1=5,\ Z_2=2)\\
&=P(C_1\cap C_2\cap C_3)\\
&=P(C_1)-P(C_1\cap\overline{(C_2\cap C_3)})\\
&=P(C_1)-P(C_1\cap(\overline{C_2}\cup\overline{C_3}))\\
&=P(C_1)-P((C_1\cap\overline{C_2})\cup(C_1\cap\overline{C_3}))\\
&=P(C_1)-\{P(C_1\cap\overline{C_2})+P(C_1\cap\overline{C_3})\\
&\qquad -P((C_1\cap\overline{C_2})\cap(C_1\cap\overline{C_3}))\}\\
&=P(C_1)-\{P(C_1\cap\overline{C_2})+P(C_1\cap\overline{C_3})\\
&\qquad -P(C_1\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3})\}\\
&=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}\\
&=\frac{4^3-2\cdot3^3+2^3}{6^3}\\
&=\frac{18}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}
\end{aligned}$$

である．

別解　3 回程度ならすべてを数え上げることも可能である．

$Z_1=5$ かつ $Z_2=2$ となる場合の数は

- 2 が 2 回と 5 が 1 回出るのは，5 が何回目に出るかを考えて，3 通り
- 2 が 1 回と 5 が 2 回出るのも，同様にして 3 通り
- 2 が 1 回，5 が 1 回，3 または 4 が 1 回出るのは　$2\times3!=12$ (通り)

である．よって，求める確率 $P(Z_1=5,\ Z_2=2)$ は

$$\begin{aligned}
P(Z_1=5,\ Z_2=2)&=\frac{3+3+12}{6^3}\\
&=\frac{18}{6^3}\\
&=\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

である．

154 (1)　$f(x)=b(4-x)x$ $(0\leqq x\leqq a)$ は確率密度関数であるから

$$\int_0^a f(x)\,dx=1 \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)\,dx&=\int_0^a b(4-x)x\,dx\\
&=b\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a\\
&=b\left(2a^2-\frac{a^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

①より

$$a^2b(6-a)=3 \qquad \cdots\cdots①'$$

が成り立つ．また，X の平均値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_0^a xf(x)\,dx\\
&=\int_0^a b(4-x)x^2dx\\
&=b\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^a\\
&=\frac{a^3b}{12}(16-3a)
\end{aligned}$$

である．

$E(X)=\dfrac{a}{2}$ より

$$\frac{a^3b}{12}(16-3a)=\frac{a}{2}$$

$a\neq0$ より

$$a^2b(16-3a)=6 \qquad \cdots\cdots②$$

である．

①′ かつ②を解く．

$$「①' かつ②」\iff \begin{cases} b=\dfrac{3}{a^2(6-a)}\\[2mm] \dfrac{3}{6-a}(16-3a)=6\end{cases}$$

第 2 式より

$$16-3a=2(6-a)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=4}$$

を得ることができ，第 1 式に代入して

$$\boldsymbol{b=\frac{3}{32}}$$

を得る．

(2) 方程式 $4t^2-12t+9(X-1)=0$ の2解がともに正となる条件は

$$\begin{cases}(\text{判別式})\geqq 0\\(\text{2解の和})>0\\(\text{2解の積})>0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}6^2-4\cdot 9(X-1)\geqq 0\\ \dfrac{12}{4}>0\ (\text{これはつねに成立する})\\ \dfrac{9(X-1)}{4}>0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}X\leqq 2\\ X>1\end{cases}$$

$\therefore\quad 1<X\leqq 2$

(1)の結果より $f(x)=\dfrac{3}{32}(4-x)x$ であり，求める確率 $P(1<X\leqq 2)$ は

$$\begin{aligned}P(1<X\leqq 2)&=\int_1^2 f(x)\,dx\\&=\frac{3}{32}\int_1^2(4-x)x\,dx\\&=\frac{3}{32}\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2\\&=\frac{3}{32}\cdot\left(\frac{16}{3}-\frac{5}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{11}{32}}\end{aligned}$$

である.

注 $P(X=1)=\displaystyle\int_1^1 f(x)\,dx=0$ より

$$\begin{aligned}&P(1<X\leqq 2)\\&=P(1\leqq X\leqq 2)\\&=\int_1^2 f(x)\,dx\end{aligned}$$

である.

156 (1) 標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数は

$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ であり，$y=f(z)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

したがって，

$$\begin{aligned}P(|Z|\geqq a)&=P(Z\leqq -a)+P(Z\geqq a)\\&=2P(Z\geqq a)\end{aligned}$$

$\therefore\quad P(|Z|\geqq a)=2P(Z\geqq a)$

は成り立つ. ……(証明終わり)

(2) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う.

$X-m=\sigma Y$ であり

$$\begin{aligned}&P\left(|X-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)\\&=P\left(|\sigma Y|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)\\&=P(|Y|\geqq 0.25)\quad(\because\ \ \sigma>0)\\&=2P(Y\geqq 0.25)\quad(\because\ \ (1))\\&=2\{0.5-P(0\leqq Y\leqq 0.25)\}\\&=1-2P(0\leqq Y\leqq 0.25)\end{aligned}$$

ここで，正規分布表より

$P(0\leqq Y\leqq 0.25)=0.0987$ であるから

$$\begin{aligned}P\left(|X-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)&=1-2\times 0.0987\\&=0.8026\end{aligned}$$

小数第4位を四捨五入すると

$$P\left(|X-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)=\mathbf{0.803}$$

である.

(3) 標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う.

$\overline{X}-m=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z$ であるから

$$\begin{aligned}&P\left(|\overline{X}-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)\\&=P\left(\left|\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z\right|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)\\&=P\left(|Z|\geqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\\&=1-2P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\end{aligned}$$

であり

$$P\left(|\overline{X}-m|\geqq\frac{\sigma}{4}\right)\leqq 0.02$$

$$\iff 1-2P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\leqq 0.02$$

$$\iff P\left(0\leqq Z\leqq\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\geqq 0.49$$

正規分布表より

$P(0 \leqq Z \leqq 2.32)=0.4898$,

$P(0 \leqq Z \leqq 2.33)=0.4901$

であるから

$$2.32<\frac{\sqrt{n}}{4}<2.33$$

$$(9.28)^2<n<(9.32)^2$$

$$86.1184<n<86.8624$$

よって，求める最小の n は

$$n=\mathbf{87}$$

である.

158 (1) (i) $n=100$, $p=0.5\left(=\frac{1}{2}\right)$ のとき，M は二項分布 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$ に従い，

$$E(M)=100\cdot\frac{1}{2}=50,$$

$$\sigma(M)=\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}=5$$

であり，確率変数 $Z=\frac{M-50}{5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．したがって，

$$\begin{aligned}P(M \geqq 64)&=P\left(Z \geqq \frac{64-50}{5}\right)\\&=P(Z \geqq 2.8)\\&=0.5-0.4974\\&\qquad(\because\ \text{正規分布表})\\&=0.0026 \fallingdotseq 0.003\end{aligned}$$

となる．よって，求める値は

$$\mathbf{0.003}$$

である.

注 「小数点以下第 3 位まで求めよ」とはどういう意味か？

小数点以下第 3 位までの値を求める（小数第 4 位以下を切り捨てる）のか，

小数点以下第 3 位までの値として丸める（小数第 4 位を四捨五入する）のか.

ここでは，$P(M \geqq 64)$ を正規分布による近似で求めているので，小数第 4 位を四捨五入し，小数第 3 位までの値として丸めた.

(ii) 一般に，母比率 p の信頼度 95％ の信頼区間は，大きさ n の標本比率を R とすれば，n が十分大きいとき

$$R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \quad \cdots\cdots①$$

で与えられる.

$$n=100,\ R=\frac{64}{100}=0.64$$

であるから

$$\begin{aligned}&1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\\&=1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{100}}\\&=1.96\sqrt{\frac{(0.8\times0.6)^2}{10^2}}\\&=1.96\times0.048\\&=0.09408\end{aligned}$$

となる．したがって，求める区間は

$$0.64-0.09408 \leqq p \leqq 0.64+0.09408$$

$$0.54592 \leqq p \leqq 0.73408$$

$$\therefore\quad \mathbf{0.546 \leqq p \leqq 0.734}$$

である.

(2) (1)(ii)の①により，母比率 p の信頼度 95％ の信頼区間の幅は，大きさ n の標本比率を R とすれば，n が十分大きいとき

$$\begin{aligned}&\left(R+1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)\\&\qquad-\left(R-1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)\\&=2\times1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\end{aligned}$$

である．これが 0.1 以下になるための条件は

$$2\times1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leqq 0.1$$

$$\therefore\quad n \geqq 2^2\times(19.6)^2\cdot R(1-R)$$

となる.

ここで

$$R(1-R)=-R^2+R$$

$$=-\left(R-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$\leqq\frac{1}{4}$$

であるから，n が満たすべき条件は

$$n\geqq 2^2\times(19.6)^2\cdot\frac{1}{4}$$

$$=(19.6)^2=384.16$$

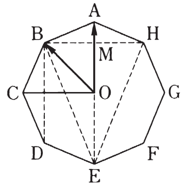
となる．これを満たす n の最小値は

385

である．

第10章 ベクトル

161-1 AO，BH の交点を M とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{MB}}$$

$$=\sqrt{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{\mathbf{2}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(1+2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=(\sqrt{2}-1)(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

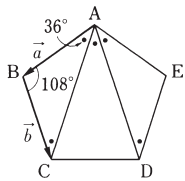
$$=(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{2}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{2}})\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\left(1+2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$$=(1+\sqrt{2})\{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}})\}$$

$$=(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

161-2 (1) △BAC は底角 36° の二等辺三角形であり，



$$\mathrm{AC}=2\times\mathrm{AB}\cos 36^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{\mathbf{5}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(2) DE // CA，DE＝1 であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

$$=\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}})$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=-(\vec{a}+\vec{b})+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}$$

$$=\frac{\sqrt{\mathbf{5}}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}$$

162-1 $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$ とすると

$$(10,\ 15)=\alpha(-1,\ 3)+\beta(4,\ 1)$$

$$=(-\alpha+4\beta,\ 3\alpha+\beta)$$

$$\therefore\ \begin{cases} -\alpha+4\beta=10 \\ 3\alpha+\beta=15 \end{cases}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{50}{13},\ \beta=\frac{45}{13}$$

よって，$\vec{r}=\boldsymbol{\frac{50}{13}}\vec{p}+\boldsymbol{\frac{45}{13}}\vec{q}$

162-2 $\vec{u}-\vec{v}=\vec{a}$ ……①

$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{b}$ ……②

$\dfrac{①\times2+②}{3}$ より，

$$\vec{u}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\left(\boldsymbol{\frac{5}{3}},\ \boldsymbol{\frac{8}{3}}\right)$$

$\dfrac{①-②}{-3}$ より，$\vec{v}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{-3}=\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}\right)$

162-3 $\vec{p}=k\vec{a}+(3-k)\vec{b}$

$=(3,\ 3-2k)$

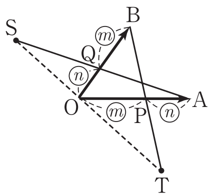
であるから

$$|\vec{p}|^2=3^2+(3-2k)^2=4k^2-12k+18$$

$$=4\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+9$$

$1\leqq k\leqq 3$ であるから，$|\vec{p}|$ は $k=3$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$ をとる．

163 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$



$$=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{1-x}\left(-x\vec{a}+\frac{n}{m+n}\vec{b}\right)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{-x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1-x}$

$$=\frac{1}{1-x}\left(-x\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{a}\right)$$

3 点 O，S，T が一直線上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ ……①

をみたす実数 k が存在する．

$$① \iff -x\vec{a}+\frac{n}{m+n}\vec{b}=k\left(\frac{m}{m+n}\vec{a}-x\vec{b}\right)$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので（標問 **167** 参照）

$$\begin{cases} -x=k\dfrac{m}{m+n} \\ \dfrac{n}{m+n}=-kx \end{cases}$$

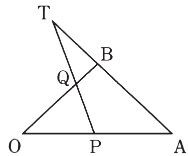
k を消去すると，

$$-x=-\frac{n}{x(m+n)}\times\frac{m}{m+n}$$

$$\therefore\ x^2=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

$\therefore\ x=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{mn}}{m+n}}$ $(m>0,\ n>0,\ x\neq0$ より$)$

164 (1)



$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}$

$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$=a(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

（答） ア **1** イ $\boldsymbol{t}$ ウ $\boldsymbol{t}$ エ **1** オ $\boldsymbol{a}$

(2) T が直線 AB 上にあるとき，

$a(1-t)+t(1-a)=1$ ……①

であるから，$(1-2a)t=1-a$

$1-2a=0$ とすると，$a=\dfrac{1}{2}$ であり，

$0\cdot t=\dfrac{1}{2}$ となる．これは不合理である．

$1-2a\neq0$ であり $t=\dfrac{1-a}{1-2a}$

さらに，Q が PT の中点であるのは，$t=2$ のときであるから，①より

$$-a+2(1-a)=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$$

B が AT の中点であるのは，T が AB を 2：1 に外分するときであるから，

$t(1-a):a(1-t)=2:(-1)$

$\therefore\ 2a(1-t)=-t(1-a)$

$\therefore\ 2a+(1-3a)t=0$

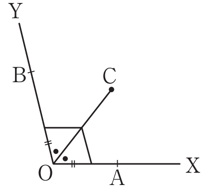
$t=\dfrac{1-a}{1-2a}$ を代入して整理すると，

$$a^2+2a-1=0 \qquad \therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$$

（答） カ **1** キ **1** ク $\boldsymbol{a}$ ケコ $\boldsymbol{2a}$

サ **1** シ **3** スセ **−1** ソ **2**

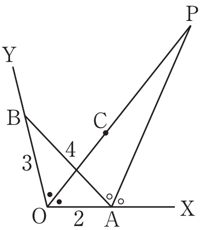
165 (1) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はともに単位ベクトルであるから，始点をそろえると，この2つのベクトルを2辺とする平行四辺形はひし形である．$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はひし形の対角線を表すベクトルであり，角を二等分している．



よって，点Cが∠XOYの二等分線上にあるとき，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表せる．

(2) Pは∠XOYの二等分線上の点なので，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ はある実数 t を用いて

$$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right) \quad \cdots\cdots①$$



と表せる．また，Pは∠XABの二等分線上の点なので，ある実数 s を用いて

$$\vec{p}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$
$$=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\overrightarrow{AB}}{4}\right)$$
$$=\vec{a}+s\left\{\frac{\vec{a}}{2}+\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})\right\}$$
$$=\left(1+\frac{s}{4}\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b} \quad \cdots\cdots②$$

と表せる．
$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立なので，①，②から
(標問 **167** 参照)

$$\begin{cases}\dfrac{t}{2}=1+\dfrac{s}{4}\\[2mm] \dfrac{t}{3}=\dfrac{s}{4}\end{cases} \quad \therefore \quad t=6,\ s=8$$

よって，$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}}$

166-1 点A，B，C，Pの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする．

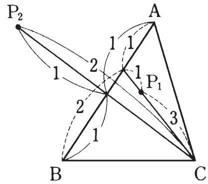
(1) $2(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})$
$=\vec{0}$

よって，

$$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}=\frac{3\times\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+\vec{c}}{4}$$

これより点Pは右図の P_1 にある．

(2) $(\vec{p}-\vec{a})$
$+(\vec{p}-\vec{b})$
$-(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$



なので

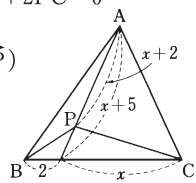
$$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$
$$=2\times\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}$$

よって，外分点の公式より点Pは上図の P_2 にある．

166-2 $3\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

なので

$-3\overrightarrow{AP}+x(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$
$+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$
$=\vec{0}$



$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$

$$=\frac{x\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{x+5}$$
$$=\frac{x+2}{x+5}\times\frac{x\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{x+2}$$

点Pは上図の位置にあるから，

△ABC：△PBC＝4：1

$\therefore$ $(x+5):3=4:1$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=7}$

167-1 背理法を使う．

$m\neq0$ とすると，$\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}$

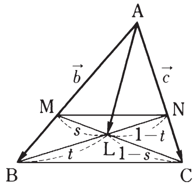
$\vec{a}\neq\vec{0}$ ゆえ，$n\neq0$ であり，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ これは $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行でないことに矛盾．したがって，$m=0$．同様にして，$n=0$ でもある．

167-2 Lは BN 上の点であるから，ある実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$
$$=(1-t)\vec{b}+\frac{2t}{3}\vec{c}$$

と表せる．

また，Lは CM 上の点でもあるので，ある実数 s を用いて



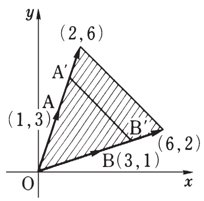
$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AM}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{2(1-s)}{3}\vec{b}+s\vec{c}$$

と表せる．$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，

$$\begin{cases} 1-t=\dfrac{2(1-s)}{3} \\ \dfrac{2t}{3}=s \end{cases} \qquad \therefore \quad t=\frac{3}{5},\ s=\frac{2}{5}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{c})}$

168-1 (1)



$\alpha+\beta=k$ とおくと，

$0\leqq k\leqq 2$

$k=0$ のとき，

$\alpha=\beta=0$

$\therefore$ P=O

$k\neq 0$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$，$\dfrac{\alpha}{k}\geqq 0$，$\dfrac{\beta}{k}\geqq 0$ であるから，

Pは線分 A′B′ 上 (両端含む) を動く．次に k を動かすことにより，Pは図の斜線部分を動く (原点Oは除く)．

以上より，$k=0$ のときもあわせると，Pの存在範囲は図の斜線部分の三角形全体である．この面積は

$$\frac{1}{2}|2\times2-6\times6|=\mathbf{16}$$

(2) $\beta'=-\beta$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta'\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，

$\alpha\geqq 0$，$\beta'\geqq 0$，$\alpha+\beta'\leqq 1$

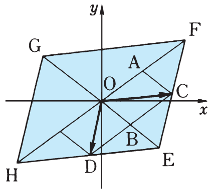
となり，(1)と同様に考えると，Pの存在範囲は △OAB の周および内部である．この面積は

$$\frac{1}{2}|1\times1-3\times3|=\mathbf{4}$$

168-2 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x-y)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(x+y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

である．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

となる点 C，D をとると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}}+y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，

$-1\leqq x\leqq 1$，

$-1\leqq y\leqq 1$

したがってPは

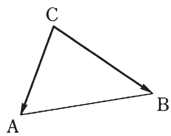
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，

$-\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，

$-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となる点 E，F，G，H をとると，**平行四辺形 EFGH の周と内部を動く．**

169 $l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ に $n=1-l-m$ を代入して



$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(1-l-m)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$=l(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}})+m(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}})$

$=l\overrightarrow{\mathrm{CA}}+m\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

(i) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と平行ではないから，Pが辺 BC 上にある条件は，

$\boldsymbol{l=0,\ 0\leqq m\leqq 1}$

(ii) Pが直線 BC に関してAと同じ側にある条件は，$\boldsymbol{l>0}$

170-1　$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$　……①

また，

$\overrightarrow{BH}=u_1\overrightarrow{AC}+u_2\overrightarrow{AF}+u_3\overrightarrow{AH}$

$=u_1(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+u_2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})$

$+u_3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

$=(u_1+u_2)\overrightarrow{AB}+(u_2+u_3)\overrightarrow{AE}$

$+(u_3+u_1)\overrightarrow{AD}$　……②

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AD}$ は1次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} u_1+u_2=-1 \\ u_2+u_3=1 \\ u_3+u_1=1 \end{cases}$$

$\therefore$　$(u_1,\ u_2,\ u_3)$

$=\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

170-2　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}$

$=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

である．L は直線 OH 上にあるので，ある実数 k を用いて

$\overrightarrow{OL}=k\overrightarrow{OH}=k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}$

と表せる．L が平面 ABC 上にある条件は

$$k+k+2k=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OL}=\frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}}{\mathbf{4}}$$

171-1　$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BF}$ ゆえ，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$

$\angle ADB=30^\circ$ であるから，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=2a\times\sqrt{3}\,a\times\cos 30^\circ$

$=\boldsymbol{3a^2}$

正六角形の中心をOとすると，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{OD}\cdot 2\overrightarrow{OF}$

$=2a\times 2a\times\cos 120^\circ$

$=\boldsymbol{-2a^2}$

171-2　$|\overrightarrow{AB}|$

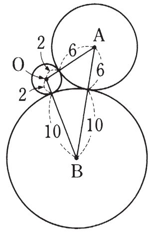
$=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$

から

$|\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$+|\overrightarrow{OA}|^2$



$\therefore$　16^2

$=12^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+8^2$

$\therefore$　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\mathbf{-24}$

172　(1)

$$\cos\theta=\frac{1+0+2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+0+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ ゆえ，$\theta=\mathbf{30^\circ}$

(2)　$\overrightarrow{BA}=(3-x,\ 3,\ 0)$，

$\overrightarrow{BC}=(3-x,\ -1,\ 2\sqrt{2})$ ゆえ，

$$\cos\theta=\frac{x^2-6x+6}{\sqrt{x^2-6x+18}\sqrt{x^2-6x+18}}$$

$$=\frac{x^2-6x+6}{x^2-6x+18}$$

$$=1-\frac{12}{(x-3)^2+9}$$

x が実数全体を動くとき，$(x-3)^2+9$ は9以上の実数をすべて動く．

$\dfrac{12}{(x-3)^2+9}$ のとり得る値の範囲は

$$0<\frac{12}{(x-3)^2+9}\leqq\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

よって，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\leqq\boldsymbol{\cos\theta<1}$$

173　$|\vec{a}+c\vec{b}|\geqq|\vec{a}|$ は

$(\vec{a}+c\vec{b})\cdot(\vec{a}+c\vec{b})\geqq\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\therefore$　$|\vec{a}|^2+2c\vec{a}\cdot\vec{b}+c^2|\vec{b}|^2\geqq|\vec{a}|^2$

$\therefore$　$|\vec{b}|^2c^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})c\geqq 0$

と同値である．これがすべての実数 c で成り立つ条件は，$|\vec{b}|^2>0$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ すなわち $\vec{a}\perp\vec{b}$

175-1 $\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$$=-6\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=-6\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}\right)$$

であるから $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=30$ は

$$6|(x,\ y)-(3,\ 4)|=30$$

すなわち $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-4)^2=5^2}$ である.

175-2 A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とし，与式を $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ でまとめると,

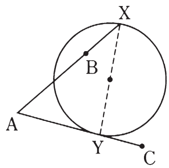
$$-3\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})$$
$$+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{\mathrm{PA}}-3\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$$

$$\therefore\quad (2\vec{p}+\vec{a}-3\vec{b})\cdot(-3\vec{p}+\vec{a}+2\vec{c})=0$$

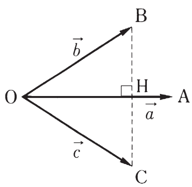
$$\therefore\quad \left(\vec{p}-\frac{3\vec{b}-\vec{a}}{2}\right)\cdot\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+2\vec{c}}{3}\right)=0$$

よって，P は AB を 3 : 1 に外分する点X，AC を 2 : 1 に内分する点Y を直径の両端とする円をえがく.



176 BC と OA の交点を H とすると

$$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルであり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{c}=\boldsymbol{2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}-\vec{b}}$$