数学Ⅰ・A標準問題精講［四訂版］

麻生雅久著

演習問題の解答PDF

旺文社

演習問題の解答

第1章 数と式

1 (1) $(a-b+c)(a-b-c)=(a-b)^2-c^2=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2-c^2}$

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=\boldsymbol{x^8-y^8}$

(3) $(x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3-(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3$

$=\{(x+y)+2z\}^3-\{(x+y)-2z\}^3-\{2z-(x-y)\}^3-\{2z+(x-y)\}^3$

$=(x+y)^3+6(x+y)^2z+12(x+y)z^2+8z^3-(x+y)^3+6(x+y)^2z-12(x+y)z^2+8z^3$

$\quad -8z^3+12z^2(x-y)-6z(x-y)^2+(x-y)^3-8z^3-12z^2(x-y)-6z(x-y)^2-(x-y)^3$

$=12(x+y)^2z-12z(x-y)^2=\boldsymbol{48xyz}$

2 (1) $10x^2-xy-2y^2+17x+5y+3=10x^2-(y-17)x-(2y+1)(y-3)$

$=\{5x+(2y+1)\}\{2x-(y-3)\}=\boldsymbol{(5x+2y+1)(2x-y+3)}$

(2) $x^3+2x^2-9x-18=x^2(x+2)-9(x+2)$

$=(x^2-9)(x+2)=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+2)}$

(3) $(x^2+3x+5)(x+1)(x+2)+2=(x^2+3x+5)(x^2+3x+2)+2$

$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4) $4x^4-17x^2y^2+4y^4=4x^4+8x^2y^2+4y^4-25x^2y^2$

$=(2x^2+2y^2)^2-(5xy)^2=(2x^2+5xy+2y^2)(2x^2-5xy+2y^2)$

$=\boldsymbol{(2x+y)(x+2y)(2x-y)(x-2y)}$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4=4x^4-8x^2y^2+4y^4-9x^2y^2$

$=(2x^2-2y^2)^2-(3xy)^2=(2x^2+3xy-2y^2)(2x^2-3xy-2y^2)$

$=(2x-y)(x+2y)(2x+y)(x-2y)$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4=(x^2-4y^2)(4x^2-y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(2x+y)(2x-y)$

3-1

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}=\frac{-\sqrt{79}+\sqrt{81}}{(\sqrt{79}+\sqrt{81})(-\sqrt{79}+\sqrt{81})}=\frac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{2}$$

であるから,

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{3}}-1}{2}+\frac{\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}}}{2}+\frac{\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{79}}}{2}=\frac{\sqrt{81}-1}{2}=\frac{9-1}{2}=\boldsymbol{4}$$

3-2 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}$

$=\dfrac{24}{-8}=\mathbf{-3}$

3-3 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{12}=\mathbf{\dfrac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}}$

4-1 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ⬅ $\sqrt{整数+2\sqrt{整数}}$ の形を作るため分母・分子に $\sqrt{2}$ をかける

$=\dfrac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3\cdot1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

同様に

$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

したがって，

$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 分母・分子に $\sqrt{2}$ をかけて 2 で約分

$=\mathbf{\sqrt{6}}$

4-2 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1$

であるから

$\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}=\sqrt{12}+1=\mathbf{2\sqrt{3}+1}$

4-3 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であるから　$2<2\sqrt{2}<3$　よって，$3<6-2\sqrt{2}<4$

したがって，$6-2\sqrt{2}$ をこえない最大の整数は 3 である．

よって，$a=3$，$b=3-2\sqrt{2}$

このとき，　$\dfrac{1}{b^3}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^3=\left(\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^3=(3+2\sqrt{2})^3$

よって，

$b^3+\dfrac{1}{b^3}=(3-2\sqrt{2})^3+(3+2\sqrt{2})^3$

$=27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}+27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}$

$=198$

したがって，　$b^3+\dfrac{1}{b^3}-7a^3=198-7\cdot3^3=\mathbf{9}$

5 (1) $(\sqrt{2}-1)p+(\sqrt{2}-1)^2q=19-11\sqrt{2}$ より

$$-p+3q-19+(p-2q+11)\sqrt{2}=0$$

$-p+3q-19$, $p-2q+11$ は有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases} -p+3q-19=0 \\ p-2q+11=0 \end{cases}$$

よって，$p=\mathbf{5}$, $q=\mathbf{8}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

(2) k^2-l^2, m^2-1 は有理数であるから，(1)より

$$\begin{cases} k^2-l^2=5 & \cdots\cdots ① \\ m^2-1=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，　$(k-l)(k+l)=5$

$k-l$ は整数，$k+l$ は自然数であり，$k-l<k+l$ であるから，

$$\begin{cases} k-l=1 \\ k+l=5 \end{cases}$$

よって，$k=\mathbf{3}$, $l=\mathbf{2}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

②より，$m^2=9$ であり，m は自然数であるから，$m=\mathbf{3}$

6-1 $x+4y=y-3x$ より

$$4x+3y=0 \qquad \text{よって，} y=-\frac{4}{3}x$$

したがって，

$$\frac{2x^2-xy-y^2}{2x^2+xy+y^2}=\frac{\left(2+\frac{4}{3}-\frac{16}{9}\right)x^2}{\left(2-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\right)x^2}=\mathbf{\frac{7}{11}}$$

6-2 $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+2z}{x}=\dfrac{z-x}{y}=k$ とおくと

$$x+y=kz \qquad \cdots\cdots ①$$
$$y+2z=kx \qquad \cdots\cdots ②$$
$$z-x=ky \qquad \cdots\cdots ③$$

①＋③より　$y+z=k(y+z)$

よって，$(y+z)(k-1)=0$　　したがって，$y+z=0$ または $k=1$

$y+z=0$ のとき，

$z=-y$ であり，①，②に代入して　$x=-(k+1)y$, $-y=kx$

よって，$x=(k+1)kx$　　$x\neq 0$ より　$(k+1)k=1$

よって，$k^2+k-1=0$　　したがって，$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

また，$k=1$ のとき，

①，②より　$x+y=z$, $y+2z=x$

これらを満たす 0 でない x, y, z が存在する．（たとえば，$x=3$, $y=-1$, $z=2$）

以上より，$k=\mathbf{1}$, $\mathbf{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

7　$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

であり，これに

$$x+y=1,\ x^2+y^2=2$$

を代入して　$1^2=2+2xy$　　よって，$xy=-\dfrac{1}{2}$

したがって，

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{5}{2}$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

また，　$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$　　であるから，

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}=x^7+y^7+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1$$

よって，　$x^7+y^7=\dfrac{35}{4}+\dfrac{1}{8}=\boldsymbol{\dfrac{71}{8}}$

8-1　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2-4=5$

よって，　$x-\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{\pm\sqrt{5}}$

また，

$$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\right\}$$

$=\pm\sqrt{5}\cdot 3\cdot(3^2-2)=\boldsymbol{\pm 21\sqrt{5}}$（複号同順）

8-2　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{a^2+2}$

また，

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=a(a^2+2+1)=\boldsymbol{a^3+3a}$$

9-1　$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=4^2-2\cdot 5=\boldsymbol{6}$

また，

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=4(6-5)+3=\boldsymbol{7}$$

9-2　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$　　であるから，

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{0^2-1}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

また，

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$　　であるから，

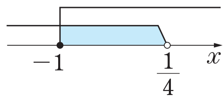
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2xyz\cdot 0=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

10-1　$6x+4<2x+5$ を解くと　　$4x<1$ より　　$x<\dfrac{1}{4}$　　……①

$2x+5\leqq 3x+6$ を解くと　　$-x\leqq 1$ より　　$x\geqq -1$　　……②

①，②をともに満たす x の値の範囲は

$$-1 \leqq x < \frac{1}{4}$$



10-2　$2x+3>a$　より　$x>\dfrac{a-3}{2}$　　　……①

$bx-7<3x+2$ を変形して

$(b-3)x<9$　　　……②

ここで，$b-3<0$ のとき②の解は

$x>\dfrac{9}{b-3}$　　　……②′

となり，①かつ②′ が $2<x<3$ にならないので不適．

また，$b-3=0$ のとき②の解は

すべての実数　　　……②″

となり，①かつ②″ が $2<x<3$ にならないので不適．

⬅ $b-3=0$ のとき②は $0 \cdot x<9$ となり，これは x がどんな実数であっても成立する

したがって，$b-3>0$ であることがわかり，このとき，②の解は

$x<\dfrac{9}{b-3}$　　　……②‴

である．

①かつ②‴ が $2<x<3$ になる条件は

$\dfrac{a-3}{2}=2,\ \dfrac{9}{b-3}=3$

よって，$\boldsymbol{a=7,\ b=6}$　（これは $b-3>0$ を満たす）

11　$|x|+2|x-1|=x+3$　　　……①

(i)　$x<0$ のとき

$|x|=-x,\ |x-1|=-x+1$　であるから，①は

$-x+2(-x+1)=x+3$

整理して，$4x=-1$　　よって，$x=-\dfrac{1}{4}$　これは $x<0$ を満たす．

(ii)　$0 \leqq x<1$ のとき

$|x|=x,\ |x-1|=-x+1$　であるから，①は

$x+2(-x+1)=x+3$

整理して，$2x=-1$　　よって，$x=-\dfrac{1}{2}$　これは $0 \leqq x<1$ を満たさないので不適．

(iii)　$1 \leqq x$ のとき

$|x|=x,\ |x-1|=x-1$　であるから，①は

$x+2(x-1)=x+3$

整理して，$2x=5$　　よって，$x=\dfrac{5}{2}$　これは $x \geqq 1$ を満たす．

(i)，(ii)，(iii)より，$x=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}}$

第2章 2次関数

12 放物線 $y=x^2$ を x 軸に関して線対称に折り返し，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動してから，さらに x 軸に関して線対称に折り返した放物線が元の放物線である．

$$y=x^2$$
$\downarrow$ 　x 軸に関して対称移動
$$y=-x^2$$
$\downarrow$ 　x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動
$$y=-(x+2)^2+3 \quad (y=-x^2-4x-1)$$
$\downarrow$ 　x 軸に関して対称移動
$$\boldsymbol{y=(x+2)^2-3} \quad (y=x^2+4x+1)$$

13-1 放物線 $y=4x^2+ax+b$ が x 軸に接するので，
$$y=4(x-p)^2 \qquad \text{つまり，} y=4x^2-8px+4p^2$$
とおくことができる．これが点 $(1,\ 1)$ を通ることから，
$$4p^2-8p+3=0 \qquad \text{よって，} (2p-1)(2p-3)=0$$
したがって，$p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

$a=-8p$，$b=4p^2$ であるから，　$\boldsymbol{(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)}$

13-2 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が 3 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(2,\ 8)$ を通ることから，
$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots\cdots① \\ 4a-2b+c=0 & \cdots\cdots② \\ 4a+2b+c=8 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$
③－②より　$4b=8$　よって，$b=2$

①，②に代入して，
$$a+c=-2,\ 4a+c=4$$
これらより，$a=2$，$c=-4$

以上より，$\boldsymbol{a=2,\ b=2,\ c=-4}$

別解　2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通ることから，$y=a(x-1)(x+2)$ とおくことができる．これが点 $(2,\ 8)$ を通ることから，
$$4a=8 \qquad \text{よって，} a=2$$
したがって，　$y=2(x-1)(x+2)$

14-1 $f(x)=x^2-mx+m^2-m=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m^2-m$

よって，$f(x)$ の最小値 $g(m)$ は
$$g(m)=\frac{3}{4}m^2-m=\frac{3}{4}\left(m-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$
したがって，$g(m)$ の最小値は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

14-2 $t=x^2+2x$ とおくと,

$$t=(x+1)^2-1$$

であるから, t のとり得る値の範囲は

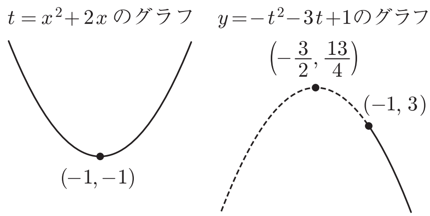
$$t \geqq -1$$

$y=-t^2-3t+1$ より

$$y=-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

$t \geqq -1$ であるから, $t=-1$ のときに

y は最大値 **3** をとる.



15 $f(x)=x^2+ax+a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

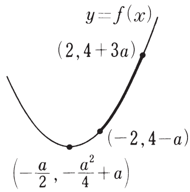
(i) $-\dfrac{a}{2}<-2$ つまり $a>4$ のとき

$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲において,

$x=-2$ のときに最小値をとる.

最小値は

$$f(-2)=4-a$$



(ii) $-2 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 2$ つまり $-4 \leqq a \leqq 4$ のとき

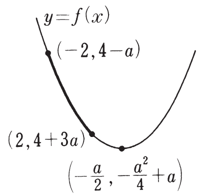
$x=-\dfrac{a}{2}$ のときに最小値 $-\dfrac{a^2}{4}+a$ をとる.

(iii) $2<-\dfrac{a}{2}$ つまり $a<-4$ のとき

$-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲において, $x=2$ のときに最小値をとる.

最小値は

$$f(2)=4+3a$$



(i)〜(iii)より, $f(x)$ の最小値は

$a<-4$ のとき,	**$4+3a$**
$-4 \leqq a \leqq 4$ のとき,	**$-\dfrac{a^2}{4}+a$**
$4<a$ のとき,	**$4-a$**

16 $y=ax^2-4ax+b$ より

$$y=a(x-2)^2-4a+b$$

頂点の x 座標は 2 であるから, 区間 $1 \leqq x \leqq 4$ における y の最大値, 最小値は

(i) $a>0$ のとき

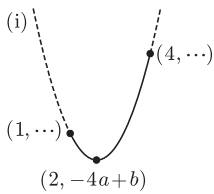
最大値 b $(x=4$ のとき$)$

最小値 $-4a+b$ $(x=2$ のとき$)$

(ii) $a<0$ のとき

最大値 $-4a+b$ $(x=2$ のとき$)$

最小値 b $(x=4$ のとき$)$



よって，最大値が 6 で最小値が 2 になるのは

(i) $a>0$ かつ $b=6$ かつ $-4a+b=2$

(ii) $a<0$ かつ $-4a+b=6$ かつ $b=2$

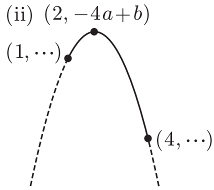
(i)のとき $a=1$，$b=6$

(ii)のとき $a=-1$，$b=2$

以上より，

$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\mathbf{1},\ \mathbf{6}),\ (\mathbf{-1},\ \mathbf{2})$

← $b=6$，$-4a+b=2$ より
$a=1$ （$a>0$ を満たす）
$-4a+b=6$，$b=2$ より
$a=-1$ （$a<0$ を満たす）



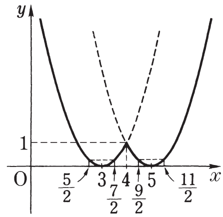
17 (1) $|x-4|=\begin{cases} x-4 & (x\geqq 4) \\ -x+4 & (x<4) \end{cases}$ であるから，

$(|x-4|-1)^2=\begin{cases} (x-5)^2 & (x\geqq 4) \\ (x-3)^2 & (x<4) \end{cases}$

したがって，

$y=(|x-4|-1)^2$

のグラフは，右のようになる．



(2) $t\leqq x\leqq t+1$ において，(1)の関数が最大となる x は

・$t\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき，$x=t$

・$\dfrac{5}{2}<t<3$ のとき，$x=t+1$

・$3\leqq t\leqq 4$ のとき，$x=4$

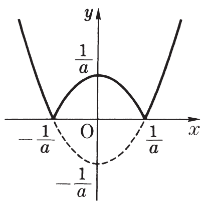
・$4<t\leqq\dfrac{9}{2}$ のとき，$x=t$

・$\dfrac{9}{2}<t$ のとき，$x=t+1$

したがって，$t\leqq x\leqq t+1$ における最大値 $f(t)$ は

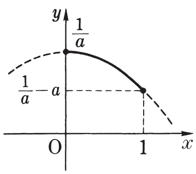
$$\boldsymbol{f(t)}=\begin{cases} (\boldsymbol{t}-\mathbf{3})^2 & \left(\boldsymbol{t}\leqq\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right) \\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{2})^2 & \left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}<\boldsymbol{t}<\mathbf{3}\right) \\ \mathbf{1} & (\mathbf{3}\leqq\boldsymbol{t}\leqq\mathbf{4}) \\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{5})^2 & \left(\mathbf{4}<\boldsymbol{t}\leqq\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right) \\ (\boldsymbol{t}-\mathbf{4})^2 & \left(\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}<\boldsymbol{t}\right) \end{cases}$$

18 (1) $f(x)=\left|ax^2-\dfrac{1}{a}\right|$ のグラフは右のようになる．

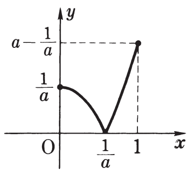


したがって，$0\leqq x\leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフは，下のようになる．

$0<a<1$ のとき



$1\leqq a$ のとき



(2) (I) $0<a<1$ のときは $x=0$ において最大となる．

よって，$g(a)=f(0)=\dfrac{1}{a}$

(II) $1\leqq a$ のときについて，$\dfrac{1}{a}$ と $a-\dfrac{1}{a}$ の大小を比較する．

$$\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}-a=\frac{2-a^2}{a}$$

(i) $1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{2-a^2}{a}\geqq 0$ より，$\dfrac{1}{a}\geqq a-\dfrac{1}{a}$　　よって，$g(a)=\dfrac{1}{a}$

(ii) $\sqrt{2}<a$ のとき

$\dfrac{2-a^2}{a}<0$ より，$\dfrac{1}{a}<a-\dfrac{1}{a}$　　よって，$g(a)=a-\dfrac{1}{a}$

(I)，(II)(i)，(II)(ii)より，

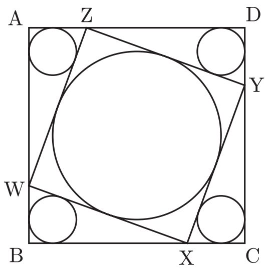
$$\boldsymbol{g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & (0<a\leqq\sqrt{2}) \\ a-\dfrac{1}{a} & (\sqrt{2}<a)\end{cases}}$$

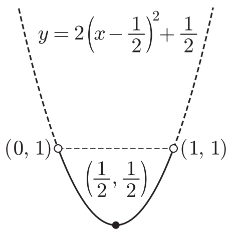
19 (1) 三角形 AWZ に三平方の定理を用いて

$$ZW^2=AZ^2+AW^2$$

$ZW=a$，$AW=x$，$AZ=1-x$ であるから，

$$a^2=(1-x)^2+x^2=2x^2-2x+1$$
$$=\boldsymbol{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$





$0<x<1$ より

$a\left(=\sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\right)$

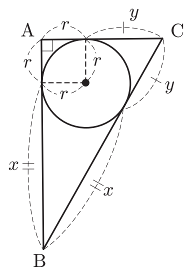
のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq a<1}$$

(2) C_0 の半径は $\dfrac{a}{2}$ である．また，C_1～C_4 の半径は

$$\frac{AW+AZ-ZW}{2}$$
$$=\frac{x+(1-x)-a}{2}$$
$$=\frac{1-a}{2}$$

← 直角三角形 ABC の内接円の半径は次のように簡単に求めることができる



$AB+AC$
$=(r+x)+(r+y)$
$=2r+x+y$
$=2r+BC$
であるから
$r=\dfrac{AB+AC-BC}{2}$

よって，

$$S=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+4\pi\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\{a^2+4(1-a)^2\}$$

$$=\frac{\pi}{4}(5a^2-8a+4)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right\}$$

したがって，$a=\frac{4}{5}$ のとき $\left(これは\ \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq a<1\ を満たす\right)$ S は，**最小値** $\frac{\pi}{5}$ をとる．

20 $A\neq 0$ **のとき，**

(i) $0^2-4AB\geqq 0$ つまり $AB\leqq 0$ **ならば，** $x=\pm\sqrt{-\frac{B}{A}}$

(ii) $AB>0$ **ならば，実数解なし．**

$A=0$ **のとき，**

(i) $B=0$ **ならば，解はすべての実数．**

(ii) $B\neq 0$ **ならば，実数解なし．**

21 $ax^2-(2a^2+2a)x+a^3+2a^2+a+1=0$ ……①

(i) $a\neq 0$ のとき，①が実数解をもつ条件は，

$$(2a^2+2a)^2-4a(a^3+2a^2+a+1)\geqq 0$$

左辺を整理して，$-4a\geqq 0$ よって，$a\leqq 0$ $a\neq 0$ より，$a<0$

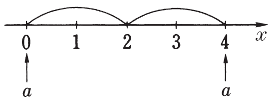
(ii) $a=0$ のとき，①は $1=0$ となり，解をもたない．

よって，$a=0$ は不適．

以上(i)，(ii)より，x の方程式①が実数解をもつような a の範囲は，$\boldsymbol{a<0}$

22 $x^2-(a+2)x+2a<0$ より $(x-a)(x-2)<0$ ……(＊)

(＊)を満たす x の整数値がただ1つ存在するような整数 a の値は **0, 4** である．



23 $x^2+(a-1)x+a-1=0$ ……① が実数解をもたない条件は，

$$(a-1)^2-4(a-1)<0$$

左辺を整理して，$(a-1)(a-5)<0$ よって，$1<a<5$ ……③

また，$x^2+2(a-1)x-a+7=0$ ……② が実数解をもたない条件は，

$\{2(a-1)\}^2-4(-a+7)<0$ 4で割って，$(a-1)^2-(-a+7)<0$

左辺を整理して，$(a+2)(a-3)<0$ よって，$-2<a<3$ ……④

③，④をともに満たす a の値の範囲は，$\boldsymbol{1<a<3}$

24 $ax^2+(a-1)x+a-1<0$ ……(＊)

$a=0$ のとき

(＊)は，$-x-1<0$ となり，これが成立しない実数 x の値が存在するので不適．

$a\neq 0$ のとき

(＊)がすべての実数 x に対して成立する条件は

$a<0$ ……①

$(D=)$ $(a-1)^2-4a(a-1)<0$ ……②

②より，　$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$

よって，$(a-1)(3a+1)>0$　したがって，$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

これと①より，　$\boldsymbol{a<-\dfrac{1}{3}}$

25 (1) $x^2+3x-40<0$ を解くと $(x+8)(x-5)<0$ より　$-8<x<5$ ……①

$x^2-5x-6>0$ を解くと $(x-6)(x+1)>0$ より　$x<-1$，$6<x$ ……②

①，②をともに満たす x の範囲は　$\boldsymbol{-8<x<-1}$

(2) $f(x)=x^2-ax-6a^2$ とおくと

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{25}{4}a^2$$

$-8<x<-1$ のとき $f(x)>0$ が成立する条件は次のようになる．

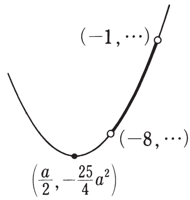
(i) $\dfrac{a}{2}\leqq-8$ つまり $a\leqq-16$ のとき

$f(-8)\geqq0$

よって，$64+8a-6a^2\geqq0$　つまり，$3a^2-4a-32\leqq0$

左辺を因数分解して　$(3a+8)(a-4)\leqq0$

よって，$-\dfrac{8}{3}\leqq a\leqq4$　これは $a\leqq-16$ に反する．



(ii) $-8<\dfrac{a}{2}<-1$ つまり $-16<a<-2$ のとき

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$ より　$-\dfrac{25}{4}a^2>0$　これを満たす a は存在しない．

(iii) $-1\leqq\dfrac{a}{2}$ つまり $-2\leqq a$ のとき

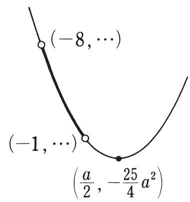
$f(-1)\geqq0$

よって，$1+a-6a^2\geqq0$　つまり，$6a^2-a-1\leqq0$

左辺を因数分解して　$(3a+1)(2a-1)\leqq0$

よって，$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

$-2\leqq a$ を考えて，　$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$



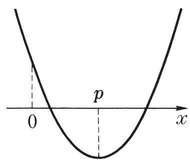
(i)～(iii)より，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}}$

26-1 $f(x)=x^2-2px+2-p$ とおくと

$f(x)=(x-p)^2-p^2-p+2$

方程式 $f(x)=0$ の2つの解がともに正となる条件は

$$\begin{cases}(\text{軸})\quad p>0\\(f(0)=)\ 2-p>0\\\left(\dfrac{D}{4}=\right)\ p^2-(2-p)\geqq0\end{cases}$$



← 重解を2つの解として扱う

よって，$p>0$，$p<2$，$(p+2)(p-1)\geqq0$

これらすべてを満たす p の値の範囲は　$\boldsymbol{1\leqq p<2}$

方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解がともに負となる条件は

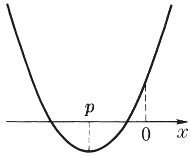
$$p<0,\ 2-p>0,\ p^2-(2-p)\geqq 0$$

よって，$p<0$，$p<2$，$(p+2)(p-1)\geqq 0$

これらすべてを満たす p の値の範囲は　　$\boldsymbol{p\leqq -2}$

方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の符号が異なる条件は　　$f(0)<0$

よって，　$2-p<0$　　したがって，$\boldsymbol{p>2}$



26-2　(1)　$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$　とおくと

$$f(x)=(x-a)^2+a^2-5$$

方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解を 1 つずつもつ条件は

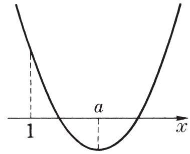
$$f(1)<0$$

よって，$2a^2-2a-4<0$　左辺を因数分解して　　$2(a-2)(a+1)<0$

したがって，　$\boldsymbol{-1<a<2}$

(2)　方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい解を 2 つもつ条件は

$$\begin{cases}(f(1)=)\ 2a^2-2a-4>0\\ (\text{軸})\ a>1\\ \left(\dfrac{D}{4}=\right)\ a^2-(2a^2-5)\geqq 0\end{cases}$$



よって，$\begin{cases}2(a-2)(a+1)>0\\ a>1\\ a^2\leqq 5\end{cases}$　　したがって，　$\boldsymbol{2<a\leqq\sqrt{5}}$

27　$f(x)=2x^2-4ax-a+1$ とおくと，$f(x)=2(x-a)^2-2a^2-a+1$

$y=f(x)$ のグラフが区間 $0\leqq x\leqq 1$ において，x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつ条件を求めればよい．

(i)　$f(0)f(1)\leqq 0$ の場合

$$(-a+1)(-5a+3)\leqq 0\qquad \text{よって，}\quad \frac{3}{5}\leqq a\leqq 1$$

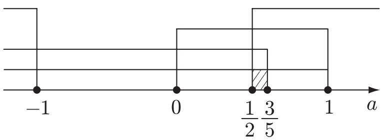
(ii)　$\begin{cases}(f(0)=)\ -a+1\geqq 0 & \cdots\cdots ①\\ (f(1)=)\ -5a+3\geqq 0 & \cdots\cdots ②\\ \text{軸}：0\leqq a\leqq 1 & \cdots\cdots ③\\ \text{判別式}：4a^2-2(-a+1)\geqq 0 & \cdots\cdots ④\end{cases}$　の場合

①より，$a\leqq 1$　　……①′　　②より，$a\leqq\dfrac{3}{5}$　　……②′

④より，$4a^2+2a-2\geqq 0$　　よって，$2(a+1)(2a-1)\geqq 0$　　……④′

したがって，　$a\leqq -1$，$\dfrac{1}{2}\leqq a$

①′，②′，③，④′ より　　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3}{5}$



(i)，(ii)より，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1}$

参考 軸の位置での場合分けによる解答

$f(x)=2x^2-4ax-a+1$ とおく．

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフの対称軸 $(x=a)$ の位置で場合分けをする．

(i) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$f(a)\leqq 0$ ……① かつ 「$f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$」 ……②

①より， $-2a^2-a+1\leqq 0$

両辺に -1 をかけて左辺を因数分解して

$$(a+1)(2a-1)\geqq 0 \quad \text{よって，} a\leqq -1,\ \frac{1}{2}\leqq a \quad \cdots\cdots①'$$

②より， $-a+1\geqq 0$ または $-5a+3\geqq 0$

よって，$a\leqq 1$ ……②′

①′ かつ②′ かつ $0\leqq a\leqq 1$ より， $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$

(ii) $a<0$ のとき

$(f(0)=)\ -a+1\leqq 0$ $(f(1)=)\ -5a+3\geqq 0$

ところが，$a<0$ より，$f(0)>0$ となり不適.

(iii) $1<a$ のとき

$(f(0)=)\ -a+1\geqq 0$ $(f(1)=)\ -5a+3\leqq 0$

ところが，$a>1$ より，$f(0)<0$ となり不適.

(i)，(ii)，(iii)より，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1}$

28-1 $x^2+ax+b=0$ ……① $x^2+bx+a=0$ ……②

(1) ①，②の共通解を α とおくと，

$\alpha^2+a\alpha+b=0$ ……③ $\alpha^2+b\alpha+a=0$ ……④

③−④ より $(a-b)(\alpha-1)=0$

よって， $a=b$ または $\alpha=1$

$a=b$ のとき，①と②が一致し，条件に反する.

よって，$\boldsymbol{\alpha=1}$

(2) ③に $\alpha=1$ を代入して

$1+a+b=0$ ……⑤

$a=b$ であると，①と②は 2 つの共通解をもつので，a，b が満たすべき条件は，

$$\boldsymbol{1+a+b=0 \text{ かつ } a\neq b} \quad \left(1+a+b=0 \text{ かつ } a\neq -\frac{1}{2} \text{ でもよい}\right)$$

(3) ⑤より，$a=-b-1$

①に代入して， $x^2-(b+1)x+b=0$

左辺を因数分解して， $(x-1)(x-b)=0$

よって，①の $x=1$ 以外の解は $x=b$ である.

同様に，⑤より，$b=-a-1$

②に代入して， $x^2-(a+1)x+a=0$

よって，$(x-1)(x-a)=0$

したがって，②の $x=1$ 以外の解は $x=a$ である.

28-2 $(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ は

$$x^2+ax+1=0 \quad \cdots\cdots ① \quad \text{または} \quad 3x^2+ax-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

と同値である．

$$(②\text{の判別式})=a^2+36>0$$

であるから，②を満たす異なる実数xは2つある．

①を満たす異なる実数xの個数は，

$(D=)\ a^2-4>0$ つまり $a<-2,\ 2<a$ のとき2個
$(D=)\ a^2-4=0$ つまり $a=\pm 2$ のとき1個
$(D=)\ a^2-4<0$ つまり $-2<a<2$ のとき0個

である．

①と②が共通解をもつときについて調べる．

共通解をαとおくと，

$$\alpha^2+a\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots ③ \qquad 3\alpha^2+a\alpha-3=0 \quad \cdots\cdots ④$$

④−③ より　$2\alpha^2-4=0$　よって，$\alpha=\pm\sqrt{2}$

$\alpha=\sqrt{2}$ のとき，③より　$a=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\alpha=-\sqrt{2}$ のとき，③より　$a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

以上より，「①」，「②」，「①かつ②」を満たす異なる実数xの個数は右のようになる．

a	$\cdots$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
①	2	2	2	1	0	1	2	2	2
②	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①かつ②	0	1	0	0	0	0	0	1	0

したがって，「①または②」を満たす異なる実数xの個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{3}{\sqrt{2}}<a<-2,} \\ \boldsymbol{2<a<\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}<a} & \textbf{のとき 4 個} \\ \boldsymbol{a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm 2} & \textbf{のとき 3 個} \\ \boldsymbol{-2<a<2} & \textbf{のとき 2 個} \end{cases}$$

29 $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$ をxについて整理して，

$$2x^2+4(y+1)x+3y^2+5y-4=0$$

これを満たす実数xが存在する条件より

$$4(y+1)^2-2(3y^2+5y-4)\geqq 0$$

整理して，　$y^2+y-6\leqq 0$

よって，　$(y+3)(y-2)\leqq 0$　したがって，　$\boldsymbol{-3\leqq y\leqq 2}$

第3章 整数の性質

30 $1111_{(2)}=2^3+2^2+2^1+2^0=8+4+2+1=\mathbf{15}$

15 を 3 で割ると商は 5 余りは 0　　5 を 3 で割ると商は 1 余りは 2

1 を 3 で割ると商は 0 余りは 1

したがって，15 を 3 進法表示すると　**120**

31 (1) $\dfrac{14}{3}<x<5$ のとき　$2<\dfrac{3}{7}x<\dfrac{15}{7}$　であるから，　$\left[\dfrac{3}{7}x\right]=2$

また，$[x]=4$ であるから，

$$\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\left[\frac{3}{7}\cdot 4\right]=\left[\frac{12}{7}\right]=1 \qquad \text{したがって，}\qquad \left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\mathbf{1}$$

(2) $\left[\dfrac{1}{2}x\right]=N$　(N は整数) とおくと，

$$\frac{1}{2}x-1<\left[\frac{1}{2}x\right]\leqq\frac{1}{2}x \qquad \text{より，}\qquad \frac{1}{2}x-1<N\leqq\frac{1}{2}x$$

x について解いて，　$2N\leqq x<2N+2$

このとき，　$[x]=2N,\ 2N+1$　であり，

$$\frac{1}{2}[x]=N,\ N+\frac{1}{2} \qquad \text{したがって，}\qquad \left[\frac{1}{2}[x]\right]=N$$

以上より，　$\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=N-N=0$

(3) $\left[\dfrac{1}{n}x\right]=N$　(N は整数) とおくと，

$$\frac{1}{n}x-1<\left[\frac{1}{n}x\right]\leqq\frac{1}{n}x \qquad \text{より，}\qquad \frac{1}{n}x-1<N\leqq\frac{1}{n}x$$

よって，　$nN\leqq x<nN+n$

このとき，　$[x]=nN,\ nN+1,\ nN+2,\ \cdots,\ nN+(n-1)$　であり，

$$\frac{1}{n}[x]=N,\ N+\frac{1}{n},\ N+\frac{2}{n},\ \cdots,\ N+\frac{n-1}{n} \qquad \text{したがって，}\qquad \left[\frac{1}{n}[x]\right]=N$$

以上より，　$\left[\dfrac{1}{n}x\right]-\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]=\mathbf{0}$

32 $P=(m-5)(m^2+m+1)$　であり，m は正の整数であるから，

$m-5\geqq-4,\ m^2+m+1\geqq3$

したがって，P が素数であることから，　$m-5=1$

よって，$m=6$　　したがって，$P=\mathbf{43}$

33 (1)
$$a=\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{2^2}\right]+\left[\frac{50}{2^3}\right]+\left[\frac{50}{2^4}\right]+\left[\frac{50}{2^5}\right]+\left[\frac{50}{2^6}\right]+\cdots$$
$$=\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{4}\right]+\left[\frac{50}{8}\right]+\left[\frac{50}{16}\right]+\left[\frac{50}{32}\right]=25+12+6+3+1=\mathbf{47}$$

(2) ${}_{100}C_{50}=\dfrac{100!}{50!50!}$　これは整数であることに注意する．

100! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]+\left[\frac{100}{3^5}\right]+\cdots$$
$$=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{9}\right]+\left[\frac{100}{27}\right]+\left[\frac{100}{81}\right]=33+11+3+1=48$$

同様に，50! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，

$$\left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{3^2}\right]+\left[\frac{50}{3^3}\right]+\left[\frac{50}{3^4}\right]+\cdots=\left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{9}\right]+\left[\frac{50}{27}\right]=16+5+1=22$$

したがって，${}_{100}C_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の b は，

$$b=48-22-22=4$$

34-1 (1)　n が偶数なら　$n=2k$　（k は自然数）
　　n が奇数なら　$n=2k-1$　（k は自然数）

と表すことができる．

　n が偶数のとき，　$n^2=(2k)^2=4\cdot k^2$
　n が奇数のとき，　$n^2=(2k-1)^2=4\cdot(k^2-k)+1$

であるから，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかである．

(2)　x，y ともに偶数でない，つまり奇数であると仮定すると，(1)より，x^2，y^2 を 4 で割ったときの余りはともに 1 である．このとき，x^2+y^2 を 4 で割ったときの余りは 2 であるが，z^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 であるので矛盾する．

⬅ 背理法を用いて証明する（背理法については標問 **99** 参照）

　したがって，x と y の少なくとも一方は偶数である．

(3)　x が偶数，y が奇数であるから，x^2+y^2 を 4 で割ったときの余りは $0+1$ つまり 1 である．よって，z^2 を 4 で割ったときの余りは 1 であり，(1)より z は奇数であることがわかる．

　したがって，

$$x=2l,\ y=2m-1,\ z=2n-1\quad (l,\ m,\ n \text{ は自然数})$$

と表すことができる．

　$x^2+y^2=z^2$ より $x^2=z^2-y^2$ であるから，　$(2l)^2=(2n-1)^2-(2m-1)^2$

　よって，$4l^2=4(n^2-n-m^2+m)$

⬅ $(2n-1)^2-(2m-1)^2$
$=(4n^2-4n+1)-(4m^2-4m+1)$
$=4(n^2-n-m^2+m)$

　したがって，$l^2=n^2-n-m^2+m$

　右辺は $(n-m)(n+m-1)$ と因数分解できて，$n-m$ と $n+m-1$ の差は

$$(n+m-1)-(n-m)=2m-1$$

であり，これは奇数である．

⬅ n^2-n-m^2+m
$=(n^2-m^2)-(n-m)$
$=(n-m)(n+m)-(n-m)$
$=(n-m)(n+m-1)$

　よって，$n-m$，$n+m-1$ の一方は偶数，他方は奇数であることがわかり，したがって，l^2 は偶数である．

　このことから l は偶数であることがわかるので，$x\,(=2l)$ は 4 の倍数である．

別解　$(l^2=)$ n^2-n-m^2+m が偶数であることは次のように示すこともできる．

$$n^2-n-m^2+m=n(n-1)-m(m-1)$$

　$n(n-1)$ は連続する 2 整数の積であるから偶数である．同様に $m(m-1)$ も偶数であるから，$n(n-1)-m(m-1)$ も偶数である．

34-2 連続 3 整数の中に必ず 3 の倍数が含まれるので，当然連続 4 整数の中にも 3 の倍数が含まれる．

また，連続 4 整数の中に必ず 4 の倍数があり，また，それ以外の 3 つの整数の中に 2 の倍数がある (4 の倍数の 2 つ隣)．

したがって，連続 4 整数の積は　$3\times4\times2$　つまり 24 の倍数であり，24 で割り切れる．

35 $m+n$ と $m+4n$ の最大公約数が 3 であるから，

$m+n=3a$　……①　　$m+4n=3b$　……②

(a と b は互いに素な自然数)

と表すことができる．このとき，$m+n$ と $m+4n$ の最小公倍数は $3ab$ であるから，

$$4m+16n=3ab$$

両辺に 3 をかけて　$12m+48n=3a\cdot3b$

これに①，②を代入して　$12m+48n=(m+n)(m+4n)$

左辺は，$12(m+4n)$ と変形できるから，$12(m+4n)=(m+n)(m+4n)$

$m+4n\neq0$ であるから，　$m+n=12$

よって，自然数 m，n ($m\geqq n$) は

$(m,\ n)=(6,\ 6),\ (7,\ 5),\ (8,\ 4),\ (9,\ 3),\ (10,\ 2),\ (11,\ 1)$

それぞれに対して，$m+4n$ の値は

$m+4n=30,\ 27,\ 24,\ 21,\ 18,\ 15$

となる．このうち，$m+n\ (=12)$ との最大公約数が 3 であるものは

$m+4n=27,\ 21,\ 15$

であり，このとき　$(m,\ n)=\mathbf{(7,\ 5),\ (9,\ 3),\ (11,\ 1)}$

36 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{120}{360}$，$\dfrac{3}{8}=\dfrac{135}{360}$　であるから，$\dfrac{1}{3}<\dfrac{m}{360}<\dfrac{3}{8}$ を満たす分数 $\dfrac{m}{360}$ (mは整数) は，次の 14 個ある．

$\dfrac{121}{360},\ \dfrac{122}{360},\ \dfrac{123}{360},\ \dfrac{124}{360},\ \dfrac{125}{360},\ \dfrac{126}{360},\ \dfrac{127}{360},\ \dfrac{128}{360},\ \dfrac{129}{360},\ \dfrac{130}{360},\ \dfrac{131}{360},\ \dfrac{132}{360},\ \dfrac{133}{360},\ \dfrac{134}{360}$

このうち，既約分数は $\dfrac{121}{360}$，$\dfrac{127}{360}$，$\dfrac{131}{360}$，$\dfrac{133}{360}$ の **4 個**ある．

そのうち，最大の m は　$m=\mathbf{133}$　である．

37 　$7l=4m+3$　……①

$l=1$ のとき $m=1$ であるから，　$7\cdot1=4\cdot1+3$　……①′

①−①′ より　$7(l-1)=4(m-1)$　……①″

右辺は 4 の倍数であり，7 と 4 は互いに素であるから，　$l-1=4k$　(k は整数) と表すことができ，このとき，①″ より　$m-1=7k$

よって，　$l=\mathbf{4}k\mathbf{+1}$，$m=\mathbf{7}k\mathbf{+1}$

これらを②に代入して

$$(4k+1)(7k+1)=139-28n^2+(4k+1)+(7k+1)$$

整理して　$28(k^2+n^2)=140$　よって，$k^2+n^2=5$

これを満たす整数 k，n の組 $(k,\ n)$ は

$(k,\ n)=(-2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-1,\ 2),$
$(1,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ -1),\ (2,\ 1)$
の 8 通りある．したがって，①，②を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は全部で 8 通りある．

38 (1) $p^2-q^2=100$ より　$(p-q)(p+q)=100$
$p-q$，$p+q$ は整数であるから，

$p-q$	-100	-50	-25	-20	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10	20	25	50	100
$p+q$	-1	-2	-4	-5	-10	-20	-50	-100	100	50	20	10	5	4	2	1

ところで，$p-q$ と $p+q$ の差は
$(p+q)-(p-q)=2q$
より偶数であることがわかるので，
$p-q$，$p+q$ は，右の表のようになる．

$p-q$	-50	-10	-2	2	10	50
$p+q$	-2	-10	-50	50	10	2

したがって，$(p,\ q)$ は
$\boldsymbol{(p,\ q)=(-26,\ 24),\ (-10,\ 0),\ (-26,\ -24),\ (26,\ 24),\ (10,\ 0),\ (26,\ -24)}$

(2) $p^2-q^2=250$ より　$(p-q)(p+q)=2\cdot5^3$
$p-q$ が偶数なら $p+q$ も偶数であるから，　⬅ $p+q=(p-q)+\underbrace{2q}_{偶数}$
$(p-q)(p+q)$ は 4 の倍数であるが $2\cdot5^3$ は 4 の倍数でない．
$p-q$ が奇数なら $p+q$ も奇数であるから，　⬅ $p+q=(p-q)+\underbrace{2q}_{偶数}$
$(p-q)(p+q)$ は奇数であるが，$2\cdot5^3$ は奇数でない．
したがって，$(p,\ q)$ は **0 個**

(3) $p^2-q^2=210000$ より　$(p-q)(p+q)=2^4\cdot3\cdot5^4\cdot7$
$2^4\cdot3\cdot5^4\cdot7$ は偶数であるから，$p-q$，$p+q$ はともに偶数であることがわかる．
よって，

$$\begin{cases} p-q=2\cdot2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d \\ p+q=2\cdot2^{2-a}\cdot3^{1-b}\cdot5^{4-c}\cdot7^{1-d} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} a=0,\ 1,\ 2\ ;\ b=0,\ 1\ ; \\ c=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ;\ d=0,\ 1 \end{matrix}\right)$$

あるいは

$$\begin{cases} p-q=-2\cdot2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d \\ p+q=-2\cdot2^{2-a}\cdot3^{1-b}\cdot5^{4-c}\cdot7^{1-d} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} a=0,\ 1,\ 2\ ;\ b=0,\ 1\ ; \\ c=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ;\ d=0,\ 1 \end{matrix}\right)$$

と表すことができるので，$(p-q,\ p+q)$ は全部で
$2\times3\cdot2\cdot5\cdot2=120$ (組)　⬅ 標問 62 約数の個数・総和参照
ある．
また，これら 120 組のすべてについて，$p-q$，$p+q$ は偶数であるから，

$$\frac{(p-q)+(p+q)}{2}\ (=p),\quad \frac{(p+q)-(p-q)}{2}\ (=q)$$

はいずれも整数となり，$(p,\ q)$ の組が 1 組ずつ定まり，しかもそれらはすべて異なる．
よって，整数の組 $(p,\ q)$ は **120 個**ある．

39-1 $xy+3x+2y=12$ より
$(x+2)(y+3)=18$
$x+2$，$y+3$ は整数であるから

$x+2$	-18	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9	18
$y+3$	-1	-2	-3	-6	-9	-18	18	9	6	3	2	1

したがって，x，y は次の通りである．

x	-20	-11	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4	7	16
y	-4	-5	-6	-9	-12	-21	15	6	3	0	-1	-2

よって，　$x+y$ **の最小値は** $\boldsymbol{-24}$　xy **の最大値は** $\boldsymbol{80}$

39-2　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}$ より　$8n+8m=mn$

よって，$(m-8)(n-8)=64\ (=2^6)$

m，n は自然数であり，$m<n$ であるから，$-7\leqq m-8<n-8$ であることに注意すると，2 つの整数 $m-8$，$n-8$ は

$m-8$	1	2	4
$n-8$	64	32	16

したがって，　$\boldsymbol{(m,\ n)=(9,\ 72),\ (10,\ 40),\ (12,\ 24)}$

40　(1)　$1\leqq c\leqq b\leqq a$ より　$1\geqq\dfrac{1}{c}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{a}>0$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{3}{c}$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ ……$(*)$ より　$\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{3}{c}$　よって，$c\leqq 9$

$c=9$ のとき $a=b=9$ とすれば，$(*)$ が成り立つ．

また，$\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$，$(*)$ より　$\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{3}$　よって，$c>3$

$c=4$ のとき，$a=b=24$ とすれば，$(*)$ が成り立つ．

したがって，c **の最大値は 9，最小値は 4** である．

(2)　$c=6$ のとき $(*)$ より　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6}$

よって，$6b+6a=ab$　したがって，$(a-6)(b-6)=36$

$a-6$，$b-6$ は整数であり，$a\geqq b\geqq 6$ より，$a-6\geqq b-6\geqq 0$

したがって，

$a-6$	36	18	12	9	6
$b-6$	1	2	3	4	6

よって，

$\boldsymbol{(a,\ b)=(42,\ 7),\ (24,\ 8),\ (18,\ 9),\ (15,\ 10),\ (12,\ 12)}$

41 (1) $x^2+2px+3p^2-8=0$ ……①

x の 2 次方程式①が実数解をもつ条件より，

$p^2-(3p^2-8)\geqq 0$ よって，$p^2\leqq 4$

したがって，$\boldsymbol{-2\leqq p\leqq 2}$

(2) p が整数のとき，(1)より，$p=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

・$p=-2$ のとき

①は，$x^2-4x+4=0$ これは，整数解 $x=2$ (重解) をもつ．

・$p=-1$ のとき

①は，$x^2-2x-5=0$ これは整数解をもたない．

・$p=0$ のとき

①は，$x^2-8=0$ これは整数解をもたない．

・$p=1$ のとき

①は，$x^2+2x-5=0$ これは整数解をもたない．

・$p=2$ のとき

①は，$x^2+4x+4=0$ これは，整数解 $x=-2$ (重解) をもつ．

以上より，①を満たす整数 x，p の組 $(x,\ p)$ は，

$(x,\ p)=(2,\ -2),\ (-2,\ 2)$

の **2 通り**ある．

42 (1) $n^2+mn-2m^2-7n-2m+25=0$

n について整理して $n^2+(m-7)n-2m^2-2m+25=0$

よって，$n=\dfrac{1}{2}\{-(m-7)\pm\sqrt{(m-7)^2-4(-2m^2-2m+25)}\}$

したがって，$\boldsymbol{n=\dfrac{7-m\pm\sqrt{9m^2-6m-51}}{2}}$

(2) m，n は自然数であるから，

$\sqrt{9m^2-6m-51}=N$ (Nは 0 以上の整数)

と表せることが必要である．このとき，

$9m^2-6m-51=N^2$ よって，$(3m-1)^2-52=N^2$

変形して $(3m-1)^2-N^2=52$

左辺を因数分解して $(3m-1+N)(3m-1-N)=52$

$3m-1+N$，$3m-1-N$ はともに整数であり，

$3m-1+N\geqq 3m-1-N$

である．また，m は自然数，N は 0 以上の整数であるから，

$3m-1+N\geqq 2$

である．よって，$3m-1+N$，$3m-1-N$ は次の 3 通り．

$3m-1+N$	52	26	13
$3m-1-N$	1	2	4

(i) $\begin{cases} 3m-1+N=52 \\ 3m-1-N=1 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて　$2N=51$　これは N が整数であることに反する．

(ii) $\begin{cases} 3m-1+N=26 \\ 3m-1-N=2 \end{cases}$ のとき

これら 2 式より，　$m=5$，$N=12$

(iii) $\begin{cases} 3m-1+N=13 \\ 3m-1-N=4 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて　$2N=9$　これはNが整数であることに反する．

以上より，$m=5$　このとき(1)より，$n=7$，-5

n は自然数であるから，$n=7$　よって，$\boldsymbol{m=5}$，$\boldsymbol{n=7}$

43-1 $x^2-mx+3m+1=0$ の 2 つの整数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=m, \qquad \alpha\beta=3m+1$$

$m=\alpha+\beta$ を $\alpha\beta=3m+1$ に代入

2 式より m を消去して

$$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)+1$$

変形して　$(\alpha-3)(\beta-3)=10$

$\alpha-3$，$\beta-3$ はともに整数であり，$\alpha-3<\beta-3$ であるから，それらの値は右表のようになる．

$\alpha-3$	-10	-5	2	1
$\beta-3$	-1	-2	5	10

よって，α，β は次の通りである．

α	-7	-2	5	4
β	2	1	8	13

$m=\alpha+\beta$ であるから，$\boldsymbol{m=-5,\ -1,\ 13,\ 17}$

43-2 $x^2-kx+4k=0$　の 2 つの解を α，β $(\alpha\leqq\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=k & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=4k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より k を消去して　$\alpha\beta=4(\alpha+\beta)$

変形して　$(\alpha-4)(\beta-4)=16$

$\alpha-4$，$\beta-4$ はともに整数であり，$\alpha-4\leqq\beta-4$ であるから，それらの値は右表のようになる．

$\alpha-4$	1	2	4	-16	-8	-4
$\beta-4$	16	8	4	-1	-2	-4

よって，α，β は次の通りである．

α	5	6	8	-12	-4	0
β	20	12	8	3	2	0

$k=\alpha+\beta$　$\cdots\cdots①$　であるから，　$k=25$，18，16，-9，-2，0

したがって，k の最小値 m は　$m=-9$　よって，$\boldsymbol{|m|=9}$

第4章 図形と計量

44 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ であるから，　$\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

45 $-\dfrac{8}{13}\left(\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}\right)=-\dfrac{8}{13}\left(\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}+\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\right)$

$=-\dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{\sin^6\theta+\cos^6\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$　⬅ $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ を $(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3$ と考えて等式 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ を利用する

$=-\dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$

$=-\dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$　……(＊)

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$　に代入して

$\dfrac{1}{5}=1+2\sin\theta\cos\theta$　　よって，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

(＊)に代入して

$$-\frac{8}{13}\left(\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}\right)=-\frac{8}{13}\cdot\frac{1-3\left(-\frac{2}{5}\right)^2}{\left(-\frac{2}{5}\right)^3}=\boldsymbol{5}$$

別解　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$

$=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$　……(＊＊)

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

であり，これに $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$ を代入して　　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{5}{2}$

したがって，

$-\dfrac{8}{13}\left(\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}\right)=-\dfrac{8}{13}\left\{\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3-3\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}$

$=5$

⬅ (＊＊)に $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{5}{2}$ を代入し，$-\dfrac{8}{13}$ 倍する

46-1 $\cos75^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)=\sin15^\circ$

したがって，

$\cos^2 15^\circ+\cos^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 75^\circ$

$=\cos^2 15^\circ+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\sin^2 15^\circ=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

46-2 $\sin 75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos 15^\circ$，$\cos 75^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ$
であるから，

$$\begin{aligned}&(\sin 75^\circ+\cos 75^\circ)^2+(\sin 15^\circ-\cos 15^\circ)^2\\&=(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)^2+(\sin 15^\circ-\cos 15^\circ)^2\\&=(\cos^2 15^\circ+2\sin 15^\circ\cos 15^\circ+\sin^2 15^\circ)+(\sin^2 15^\circ-2\sin 15^\circ\cos 15^\circ+\cos^2 15^\circ)\\&=2(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)=\mathbf{2}\end{aligned}$$

47 $P=2\cos^2\theta+\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta=-2\left(\sin\theta-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから，　$0\leqq\sin\theta\leqq1$

したがって，Pは

$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{8}}$　　$\sin\theta=1$ のとき，**最小値 1**　をとる.

48 余弦定理より，　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

この式の右辺に，$a^2=b^2+c^2+bc$ を代入して

$\cos A=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$　　よって，$A=\mathbf{120^\circ}$

49 正弦定理より

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$　（Rは三角形 ABC の外接円の半径）

であるから，　$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$　より

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$　　よって，$a^2=b^2+c^2$

したがって，　$A=\mathbf{90^\circ}$

50 (1)　$\cos A=\dfrac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$

よって，　$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{63}{8^2}$

$\sin A>0$ であるから，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

よって，　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{7}}{4}}$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})$ であるから，

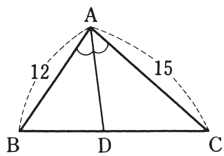
$\dfrac{r}{2}(4+6+5)=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$　　よって，$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

51 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}$ であるから，

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$
$=12:15=4:5$

したがって，

$\mathrm{BD}=\dfrac{4}{9}\mathrm{BC}=8$



三角形 ABC に余弦定理を用いて

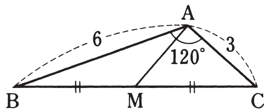
$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{12^2+18^2-15^2}{2\cdot 12\cdot 18}=\frac{9}{16}$$

さらに，三角形 ABD に余弦定理を用いて

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=12^2+8^2-2\cdot 12\cdot 8\cdot\frac{9}{16}=100$$

よって，AD=**10**

52 余弦定理より



$$BC^2=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\cos 120^\circ=63$$

よって，

$$BC=3\sqrt{7}$$

また，

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{6^2+63-3^2}{2\cdot 6\cdot 3\sqrt{7}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

ここで，三角形 ABM に余弦定理を用いて

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B=6^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot 6\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{27}{4}$$

よって，AM=$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解　上のように，BC=$3\sqrt{7}$ を求めたあと
$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ （中線定理）より

$$6^2+3^2=2\left\{AM^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2\right\}$$

よって，$AM^2=\frac{27}{4}$　　したがって，$AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

53 (1) $b\sin^2A+a\cos^2B=a$ より，$b\sin^2A=a(1-\cos^2B)$

よって，$b\sin^2A=a\sin^2B$

正弦定理より　$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$ （Rは外接円の半径） であるから，

$$b\left(\frac{a}{2R}\right)^2=a\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

分母を払って，$a^2b=ab^2$　　よって，$a=b$

したがって，**BC=CA の二等辺三角形**である．

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

を $a\cos A=b\cos B$ に代入して

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $2abc$ をかけて

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

整理して，　$a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$

よって，$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$
左辺を因数分解して　　$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$
よって，$a^2=b^2$ または $c^2=a^2+b^2$
したがって，**BC=CA の二等辺三角形** **または，∠C=90° の直角三角形**である．

54 (1) $\sqrt{x^2-2x}$ の辺が他の 2 辺より長さが短くないことより，

$$0<4-x\leqq\sqrt{x^2-2x}\quad\cdots\cdots①\qquad(0<)\ 2\leqq\sqrt{x^2-2x}\quad\cdots\cdots②$$

①より　　$x<4$ かつ $(4-x)^2\leqq x^2-2x$
よって，　　$x<4$ かつ $6x\geqq16$
したがって，

$$\frac{8}{3}\leqq x<4\quad\cdots\cdots①'$$

②より，$x^2-2x\geqq4$
よって，

$$x\leqq1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\leqq x\quad\cdots\cdots②'$$

(最大辺の長さ)<(他の 2 辺の長さの和)　より，

$$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2\qquad\text{よって，}\sqrt{x^2-2x}<6-x\quad\cdots\cdots③$$

①′より $6-x>0$ であるから，③の両辺を 2 乗して

$$x^2-2x<(6-x)^2$$

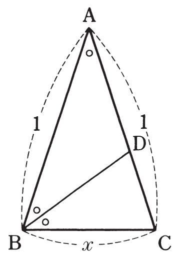
よって，$x<\dfrac{18}{5}$　　　　$\cdots\cdots③'$

①′，②′，③′より　　$\boldsymbol{1+\sqrt{5}\leqq x<\dfrac{18}{5}}$

(2) 最小の辺は，$4-x$，2 のどちらかであるが，(1)の結果より，最小の辺は $4-x$ である．
この対角が θ であるから，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2+2^2-(4-x)^2}{2\cdot\sqrt{x^2-2x}\cdot2}=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

55 ∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とすると



$$\angle\text{CBD}=\frac{1}{2}\angle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180°-\angle\text{A}}{2}$$
$$=36°=\angle\text{A}$$

よって，△ABC∽△BDC

$$\left(\begin{array}{l}\angle\text{CAB}=\angle\text{CBD},\\ \angle\text{ACB}=\angle\text{BCD}\ \text{より，}\end{array}\right)$$

したがって，AB：BD=AC：BC であり，BC=x とおくと，
　1：BD=1：x　　よって，　BD=x
また，AB：BD=BC：DC　　よって，　1：x=x：DC
したがって，　DC=x^2
さらに ∠DAB=∠DBA より　　AD=BD (=x)
したがって，AD+DC=AC より
　$x+x^2=1$　　よって，$x^2+x-1=0$

$x>0$ であるから，$x=\dfrac{\boldsymbol{-1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}}$

$$\cos A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{1+1-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{1}{2}(2-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\ (x^2=1-x\ \text{より})$$
$$=\frac{\boldsymbol{1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}$$

56 (1) (ア) 三角形 ABC に余弦定理を用いて

$$\boldsymbol{x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta}\quad\cdots\cdots①$$

(イ) 三角形 DAC に余弦定理を用いて

$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle\mathrm{CDA}$$

$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-\theta$ であるから，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

よって，$\boldsymbol{x^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta}$ ……②

(2) ①×cd＋②×ab より

$$(cd+ab)x^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$$
$$\text{右辺}=(a^2cd+abc^2)+(b^2cd+abd^2)$$
$$=ac(ad+bc)+bd(bc+ad)$$
$$=(ad+bc)(ac+bd)$$

よって，

$$(ab+cd)x^2=(ad+bc)(ac+bd)\quad\cdots\cdots③$$

上と同じようにして，$\mathrm{BD}=y$ とおくと

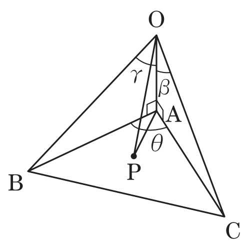
$$(ad+bc)y^2=(ab+cd)(ac+bd)\quad\cdots\cdots④$$

③×④ より $x^2y^2=(ac+bd)^2$ よって，$xy=ac+bd$

つまり，$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}=ac+bd$

57 (1) $\mathrm{OB}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\cos\gamma}=\sqrt{3}$,

$\mathrm{OC}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\cos\beta}=\sqrt{3}$



三角形 OBC に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\alpha$$
$$=3+3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$$

よって，$\mathrm{BC}=\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OA}^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OA}^2}=\sqrt{2}$

三角形 ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{2+2-\frac{9}{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}$$

(3)　三角形 ABC の外接円の半径 R は，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\theta}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

したがって，　$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+R^2}=\sqrt{1+\frac{8}{7}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{15}{7}}}$

58　Bから面 ACD に垂線 BH をひくと，Hは三角形 ACD の重心である．

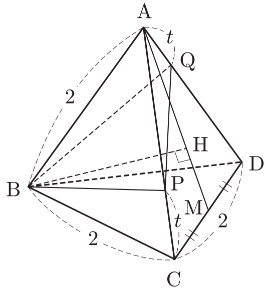
線分 CD の中点を M とすると，

$\mathrm{AM}=\sqrt{3}$　であるから，

$$\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

← $\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{CM}^2}=\sqrt{2^2-1^2}$

← 重心Hは中線 AM を　2：1 に内分する



よって，

$$\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

したがって，三角錐 ABPQ の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{APQ}\cdot\mathrm{BH}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t(2-t)\sin 60^\circ\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}t(2-t)\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}\{-(t-1)^2+1\}\end{aligned}$$

← $\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AP}\sin 60^\circ$
$=\frac{1}{2}t(2-t)\sin 60^\circ$

← $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t(2-t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$=\frac{\sqrt{2}}{6}t(2-t)$

よって，V は　$t=1$　のときに最大値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}$ をとる．

第5章 順列と組合せ

59 3の倍数となるのは各位の数字の和が3の倍数のときであるから，0，1，2，3から和が3の倍数になる異なる3つの数字を選ぶと

(0，1，2)，(1，2，3)

0，1，2を並べて3桁の整数をつくると

102，120，201，210

の4通りできる．

1，2，3を並べて3桁の整数をつくると

123，132，213，231，312，321

の6通りできる．

したがって，全部で $4+6=\mathbf{10}$ **(通り)** できる．

60 大のさいころの目が1，3，5のとき，小のさいころの目は4．

大のさいころの目が2または6のとき，小のさいころの目は，2，4，6のいずれか．

大のさいころの目が4のとき，小のさいころの目は1～6のいずれでもよい．

したがって，　$3\times1+2\times3+1\times6=\mathbf{15}$ **(通り)**

61 n 人のひとりひとりについて，A，Bのいずれに配分するかは2通りあるので

$\mathbf{2^n}$ **(通り)**　……(ア)

このうち，A，Bどちらか一方に n 人すべてを配分する方法は

2 (通り)　……(イ)

したがって，A，Bのどちらにも少なくとも1人の学生を配分する方法は

$\mathbf{2^n-2}$ **(通り)**　……(ウ)

62 $400=2^4\times5^2$ であるから，400の正の約数の個数は　$(4+1)\cdot(2+1)=\mathbf{15}$ **(個)**

63 (1)　5桁目が1である整数　1□□□□　は $9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$ (通り) ある．5桁目が2，3，4である整数もそれぞれ3024通りあるので，5桁目が1，2，3，4のいずれかである整数は

$3024\times4=\mathbf{12096}$ **(通り)**

ある．

(2)　50□□□，51□□□，52□□□，53□□□，54□□□

という整数は，全部で　$5\times8\cdot7\cdot6=1680$ (個) ある．

560□□，561□□，562□□，563□□，564□□

という整数は，全部で　$5\times7\cdot6=210$ (個) ある．

5670□，5671□，5672□，5673□，5674□，

という整数は，全部で　$5\times6=30$ (個) ある．

5678□

という整数で，56789以下のものは

56780，56781，56782，56783，56784，56789

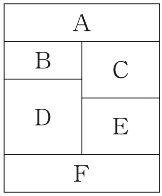
の6個ある．

5 桁目が 4 以下である整数は(1)より 12096 個あるので，56789 以下の整数は，全部で

$$12096+1680+210+30+6=\mathbf{14022}\ (\textbf{個})$$

ある．

64 (1) 図のように各区画をA～Fとする．



3 色で塗り分けるとき

A と D，B と E，C とF

は同じ色を塗ることになる．

赤，青，黄の 3 色で塗り分けるとき

AとDを何色にするかが 3 通り，

BとEを何色にするかは，残った 2 色のいずれにするかで 2 通り，

CとFは残った色を塗る

ことになる．

したがって，塗り分け方は

$$3\times2\times1=\mathbf{6}\ (\textbf{通り})$$

ある．

(2) Aに何色を塗るかは 4 通りあり，Bに何色を塗るかはA以外の 3 通り，Cに何色を塗るかは A，B 以外の 2 通りある．

Dに何色を塗るかは，B，C 以外の 2 通りある．Eに何色を塗るかは，C，D 以外の 2 通りある．

Fに何色を塗るかは，D，E 以外の 2 通りある．

したがって，4 色（使わない色があってもよい）で塗り分ける方法は

$$4\times3\times2\times2\times2\times2=192\ (\text{通り})$$

ある．このうち，3 色しか使っていない塗り分け方は除く．3 色の選び方が 4 通りあり，それぞれについて(1)より 6 通りの塗り分け方があるから，3 色で塗り分ける方法は

$$4\times6=24\ (\text{通り})$$

ある．したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は

$$192-24=\mathbf{168}\ (\textbf{通り})$$

ある．

別解　4 色で塗り分けるとき，

A と D，B とEは同色を使う．
A と D，B とFは同色を使う．
A と D，C とFは同色を使う．
A と E，B とFは同色を使う．
A と E，C とFは同色を使う．
A と F，B とEは同色を使う．
B と E，C とFは同色を使う．

場合があり，それぞれについて 4! 通りの塗り分け方がある．

したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は

$$4!\times7=168\ (\text{通り})$$

ある．

65 10 個の異なる整数から 2 個取り出す方法は

$_{10}C_2=45$ (通り)　　⬅組合せ

ある．整数 1，2，…，10 のうち，3 の倍数でないものは，1，2，4，5，7，8，10 の 7 個あり，これらから 2 個取り出す方法は

$_7C_2=21$ (通り)

ある．取り出した 2 数の積が 3 の倍数になる組の数は，全体から，2 数とも 3 の倍数でない組の数を引けばよいので，　$45-21=\mathbf{24}$ (**組**)

⬅全事象を U，「3 の倍数となる」という事象を A とすると，$n(A)=n(U)-n(\overline{A})$

66 1 以上 1000 以下の整数のうち，2 の倍数は **500** 個ある．

また，3 の倍数は **333** 個，6 の倍数は，**166** 個ある．

2 の倍数のうち，3 の倍数とならないものは，2 の倍数の個数から 6 の倍数の個数をひいた　$500-166=\mathbf{334}$ (**個**)　ある．

67 (1)　両端の 1 の間に

0 と書いたカード 2 枚，2 と書いたカード 3 枚

を並べる方法は　$\dfrac{5!}{2!3!}=\mathbf{10}$ (**通り**)　ある．

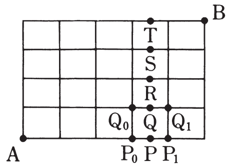
(2)　これら 7 枚のカードを並べる方法は　$\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$ (通り)　ある．このうち，左端が 0 と書いたカードであるものは　$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ (通り)　ある．

よって，7 桁の整数は全部で　$210-60=\mathbf{150}$ (**通り**)　できる．

68 (1)　A から B までの最短経路は

$\dfrac{9!}{5!4!}=\mathbf{126}$ (**通り**)

ある．



(2)　A→P_0→P_1→B について

$1\times1\times\dfrac{5!}{1!4!}=\mathbf{5}$ (**通り**)

(3)　A→Q_0→Q_1→B について

$\dfrac{4!}{3!1!}\times1\times\dfrac{4!}{1!3!}=\mathbf{16}$ (**通り**)

(4)　(1)のうち，図の R，S，T のいずれかを通る最短経路の数を求めればよい．

これは，(1)の場合の数から(2)と(3)の場合の数を引けば求まるので

$126-5-16=\mathbf{105}$ (**通り**)

69-1 大人 3 人，子供 6 人の計 9 人を A に 4 人，B に 3 人，C に 2 人を割り当てる方法は

$_9C_4\times{}_5C_3=126\times10=\mathbf{1260}$ (通り)

また，大人 3 人を A，B，C に割り当てる方法は，3! 通りあり，子供 6 人を A，B，C に 2 人ずつ割り当てる方法は，$_6C_2\cdot{}_4C_2$ 通りある．

よって，　$3!\times{}_6C_2\cdot{}_4C_2=6\times15\cdot6=\mathbf{540}$（通り）

69-2　人も車も区別しないで，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

（1 人，9 人），（2 人，8 人），（3 人，7 人），（4 人，6 人），（5 人，5 人）

の **5** 通りある．

人は区別しないが車は区別して，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

（1 人，9 人），（2 人，8 人），（3 人，7 人），（4 人，6 人），（5 人，5 人），
（6 人，4 人），（7 人，3 人），（8 人，2 人），（9 人，1 人）

の **9** 通りある．

人も車も区別する場合について，バスを A，B として区別して考える．

A に乗るのは 1 人，2 人，3 人，…，9 人の場合があり，それぞれだれが乗るかが

${}_{10}C_1$ 通り，${}_{10}C_2$ 通り，${}_{10}C_3$ 通り，…，${}_{10}C_9$ 通り

ある．

したがって，人も車も区別する場合，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

$${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_9$$
$$=10+45+120+210+252+210+120+45+10=\mathbf{1022}\text{（通り）}$$

別解　人も車も区別する場合，それぞれの乗客は A か B のバスに乗るので，10 人が A か B のバスに乗る方法は，2^{10} 通りある．

そのうち，10 人全員が A に乗る場合と，10 人全員が B に乗る場合は題意に適さないので，求める方法は

$$2^{10}-2=1022\text{（通り）}$$

70　(1)　${}_{10}C_2\times{}_8C_3=\mathbf{2520}$（**通り**）

⬅ ${}_{10}C_2=45$，${}_8C_3=56$

(2)　$\dfrac{{}_{10}C_3\times{}_7C_3}{2!}=\dfrac{120\times35}{2}=\mathbf{2100}$（**通り**）

⬅ 3 人のグループが 2 つあるので 2! で割る

(3)　$\dfrac{{}_{10}C_2\times{}_8C_2\times{}_6C_3}{2!2!}=\dfrac{45\times28\times20}{2\times2}=\mathbf{6300}$（**通り**）

⬅ 2 人のグループが 2 つあるので 2! で割る．また 3 人のグループも 2 つあるので 2! で割る

71　12 個の頂点から 3 頂点を選ぶ選び方を考えて

$${}_{12}C_3=\mathbf{220}\text{（個）}$$

このうち，外接円の直径の両端ともう 1 つの頂点を選ぶときに直角三角形ができる．

直径の両端の選び方が 6 通りあり，それぞれに対してもう 1 つの頂点の選び方が 10 通りあるから，直角三角形は

$$6\times10=\mathbf{60}\text{（個）}$$

である．また，正三角形は **4** 個ある．

72　(1)　1 辺の長さが 1，2，…，8 の正方形がそれぞれ

8^2，7^2，…，2^2，1^2

個あるから，

$$8^2+7^2+\cdots+2^2+1^2=64+49+36+25+16+9+4+1=\mathbf{204}\text{（個）}$$

(2)　縦横それぞれ 9 本の平行線から 2 本ずつ選べば長方形が 1 つ決まるので

$${}_9C_2\times{}_9C_2=\mathbf{1296}\ (\textbf{個})$$

ある.

73 女子 2 人が両端にくる場合：

左端の女子の決め方が 4 通り，右端の女子の決め方が 3 通りある．残りの 2 人の女子と 3 人の男子の並べ方が 5! 通りあるので

$$4\times3\times5!=\mathbf{1440}\ (\text{通り})$$

女子 4 人が隣り合う場合：

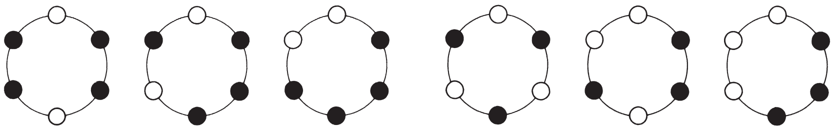
4 人の女子を 1 人と考えて，3 人の男子と並べる方法は 4! 通りある．そして 4 人の女子の並べ方は 4! 通りあるので

$$4!\times4!=\mathbf{576}\ (\text{通り})$$

74-1 $(6-1)!=5!=\mathbf{120}$ (**通り**)

74-2 黒 6 個のもの ……1 種類　　黒 5 個，白 1 個のもの ……1 種類

黒 4 個，白 2 個のもの ……3 種類　　黒 3 個，白 3 個のもの ……3 種類



黒 2 個，白 4 個のもの ……3 種類 （黒 4 個，白 2 個のものと同様）

黒 1 個，白 5 個のもの ……1 種類　　白 6 個のもの ……1 種類

したがって，　$1+1+3+3+3+1+1=\mathbf{13}$ (**種類**)

75 (1) 全部で　$9\cdot8=\mathbf{72}$ (**個**)　ある．

これら 72 個の一の位の数字は 1 〜 9 のいずれも同じ回数 (8 回) ずつ現れるから，この 72 個の一の位の和は

$$8(1+2+3+\cdots+8+9)=360$$

十の位についても同様だから，72 個の整数の総和は

$$360\times10+360=\mathbf{3960}$$

(2) 全部で　$9\cdot8\cdot7=\mathbf{504}$ (**個**)　できる．

これら 504 個の一の位の数字は 1 〜 9 のいずれも 56 回ずつ現れるから，これら 504 個の一の位の和は

$$56(1+2+3+\cdots+8+9)=2520$$

十の位，百の位についても同様だから，504 個の整数の総和は

$$2520\times100+2520\times10+2520=\mathbf{279720}$$

76 (1) 3 種類のものから重複を許して 10 個選ぶ方法であり

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=\mathbf{66}\ (\textbf{通り})$$

(2) 球と立方体を 1 個ずつ入れ，残りの 8 個を 3 種類のものから重複を許して選べばよいので

$${}_3H_8={}_{10}C_8=\mathbf{45}\ (\textbf{通り})$$

第6章 確　率

77　2つのさいころの目の出方は全部で，$6\times6=36$（通り）ある．

このうち，目の和が3の倍数になるのは

$$(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (3,\ 6),$$
$$(4,\ 2),\ (4,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 6)$$

の12通りあるので，求める確率は　$\dfrac{12}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

78-1　(1)　10枚の札を円形に並べる方法は　$(10-1)!=9!$（通り）　ある．

このうち，時計回りに見て，1，2の順で札が並ぶものは，これら2枚を1枚の札と考えて，全部で9枚の札を並べる方法の

$$(9-1)!=8!\ （通り）$$

ある．したがって，求める確率は　$\dfrac{8!}{9!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(2)　0，1の札，2，3の札をそれぞれ1枚の札と考えて並べる方法は

$$(8-1)!=7!\ （通り）$$

ある．したがって，求める確率は　$\dfrac{7!}{9!}=\boldsymbol{\dfrac{1}{72}}$

78-2　a，b の組 $(a,\ b)$ は全部で $50\cdot49$ 通りある．

1から50までの整数を7で割った余りで分類すると

7で割った余りが1のものは8個，

7で割った余りが0，2，3，4，5，6のものはそれぞれ7個ずつ

ある．

$ab(a+b)$ が7で割り切れないのは，a，b，$a+b$ がいずれも7で割り切れないときである．

このような a，b の組を数える．

a を7で割った余りが1のとき，a は8通りあり，

b は，残り49個の整数のうち，7で割った余りが0，6でない35通りあるので

$$8\cdot35=280\ （通り）$$

a を7で割った余りが2のとき，a は7通りあり，

b は，7で割った余りが0，5でない35通りあるので

$$7\cdot35=245\ （通り）$$

a を7で割った余りが3，4，5のときも，それぞれ

$$7\cdot35=245\ （通り）$$

a を7で割った余りが6のとき，a は7通りあり，

b は，7で割った余りが0，1でない34通りあるので

$$7\cdot34=238\ （通り）$$

したがって，$ab(a+b)$ が7で割り切れない確率は

$$\frac{280+4\times245+238}{50\cdot49}=\boldsymbol{\frac{107}{175}}$$

79 (1)　3 つのさいころの目の出方は全部で 6^3 通りある.

3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の組は
(4, 4, 4), (4, 4, 3)　の 2 組ある.

(4, 4, 4) となる目の出方は 1 通り，(4, 4, 3) となる目の出方は 3 通りあるから，3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の出方は　$1+3=4$ (通り)　ある.

3 つの目の数がどれも 4 以下であるような目の出方は　$4^3=64$ (通り)　あるので，3 つの目の数がどれも 4 以下であり，しかもこれらの積が 40 以下であるような目の出方は　$64-4=60$ (通り)　ある.

したがって，求める確率は　$\dfrac{60}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{18}}$

(2)　3 つの目の数のうち，少なくとも 1 つが 5 以上で，これらの積が 40 以下となる組は

(6, 6, 1), (6, 5, 1), (6, 4, 1), (6, 3, 2), (6, 3, 1), (6, 2, 2)
(6, 2, 1), (6, 1, 1), (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 4, 1), (5, 3, 2)
(5, 3, 1), (5, 2, 2), (5, 2, 1), (5, 1, 1)

の 16 組ある.

の 6 組について，それぞれ目の出方は 3 通り，
の 10 組について，それぞれ目の出方は 6 通りあるから，少なくとも 1 つ 5 以上の目が出て，3 つの目の数の積が 40 以下となる目の出方は　$3\times6+6\times10=78$ (通り)　ある.

3 つの目の数すべてが 4 以下で，これらの積が 40 以下となる目の出方は(1)より 60 通りあるので，積が 40 以下となる目の出方は　$78+60=138$ (通り)　ある.

したがって，求める確率は　$\dfrac{138}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{23}{36}}$

80　3 人の生まれた日の曜日は $7\cdot7\cdot7$ (通り) ある.
このうち，3 人の生まれた日の曜日がすべて異なるものは $7\cdot6\cdot5$ (通り) ある.
したがって，3 人のうち少なくとも 2 人が同じ曜日生まれである事象 A の確率は

$$1-\frac{7\cdot6\cdot5}{7\cdot7\cdot7}=\boldsymbol{\frac{19}{49}}$$

81 (1)　すべて奇数の目である確率から，3 か 5 の目以外は出ていない確率をひいて　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\boldsymbol{\dfrac{3^n-2^n}{6^n}}$

(2)　1 の目が出ていない確率は　$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　であるから，事象 B の起こる確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\left(\frac{3}{6}\right)^n+1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{3^n-2^n}{6^n}=\boldsymbol{\frac{6^n+2^n-5^n}{6^n}}\end{aligned}$$

82 1つのさいころを投げるとき，偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，3回とも偶数の目が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

83 (1) $A \to C_1$ と進む確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ であり，$C_1 \to B$ と進む確率は1であるから，

求める確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$

(2) $A \to C_2$ について

(i) 上，右，右，右と進む　(ii) 右，上，右，右と進む
(iii) 右，右，上，右と進む　(iv) 右，右，右，上と進む
(v) 右上，右，右と進む　(vi) 右，右上，右と進む
(vii) 右，右，右上と進む

(i)〜(iii)の確率はそれぞれ $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{128}$

(iv)の確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

(v)〜(vii)の確率はそれぞれ $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{64}$

したがって，$A \to C_2$ と進む確率は

$$3\cdot\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{11}{128}$$

$C_2 \to B$ と進む確率は1であるから，求める確率は $\boldsymbol{\frac{11}{128}}$

84 (1) 3回目にAに戻るのは

A → B → C → A　A → B → D → A
A → C → B → A　A → C → D → A
A → D → B → A　A → D → C → A

の6通りあり，これらの確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) 何回目にBにいるかに注目して

(i) A → B → X → Y → A　(ii) A → X → B → Y → A
(iii) A → X → Y → B → A

の3つの型がある．

(i)には，A → B → A → C → A　A → B → A → D → A
A → B → C → D → A　A → B → D → C → A
(ii)には，A → C → B → C → A　A → C → B → D → A
A → D → B → C → A　A → D → B → D → A
(iii)には，A → C → A → B → A　A → C → D → B → A
A → D → A → B → A　A → D → C → B → A

があるから，求める確率は　$12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\mathbf{\frac{4}{27}}$

85 (1)　だれが勝つかが 4 通り，どの手で勝つかが 3 通りあるから　$\frac{4\cdot3}{3^4}=\mathbf{\frac{4}{27}}$

(2)　2 人が勝つ確率，3 人が勝つ確率はそれぞれ　$\frac{{}_4C_2\cdot3}{3^4}$，$\frac{{}_4C_3\cdot3}{3^4}$　である．あいこになる確率は，1 から，1 人が勝つ確率，2 人が勝つ確率，3 人が勝つ確率を引けば求まる．

$$1-\frac{4}{27}-\frac{{}_4C_2\cdot3}{3^4}-\frac{{}_4C_3\cdot3}{3^4}=\frac{27-4-6-4}{27}=\mathbf{\frac{13}{27}}$$

別解　あいこになるのは，4 人全員が同じ手を出すときか，2 人が同じ手を出し，他の 2 人はこの手以外の互いに異なる手を出すときであるから，

$$\frac{3}{3^4}+\frac{{}_4C_2\cdot3\cdot2\cdot1}{3^4}=\frac{13}{27}$$

86 (1)　1 が 1 回，2 が 1 回，3 が 1 回のときと，2 が 3 回のときがある．

1 が 1 回，2 が 1 回，3 が 1 回出るのは

123，132，213，231，312，321

の 6 通りあるから，和が 6 となる確率は

$$6\times\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{36+8}{6^3}=\mathbf{\frac{11}{54}}$$

(2)　和が 7 となるのは

1 が 1 回，3 が 2 回　　2 が 2 回，3 が 1 回

のときがある．

1 が 1 回，3 が 2 回出るのは　133，313，331　の 3 通りあり，2 が 2 回，3 が 1 回のときも 3 通りある．

したがって，和が 7 となる確率は　$3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{7}{24}}$

87 (1)　2 秒後に (1,　1) にいるのは，上と右に 1 回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{2}{25}}$$

また，2 秒後に (1,　−1) にいるのは，下と右に 1 回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

(2)　2 秒後に (0,　0) にいるのは，上下に 1 回ずつ，あるいは左右に 1 回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+{}_2C_1\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{7}{25}}$$

(3)　4 秒後に (1,　1) にいるのは「上に 2 回，下に 1 回，右に 1 回進むとき」と「上に 1 回，左に 1 回，右に 2 回進むとき」である．

したがって，4 秒後に (1,　1) にいる確率は

$$\frac{4!}{2!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4!}{1!1!2!}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2=\mathbf{\frac{42}{625}}$$

88 $X=k\ (k=2,\ \cdots,\ n)$ となる確率は

$(X\leqq k$ となる確率$)-(X\leqq k-1$ となる確率$)$

$$=\left(\frac{k}{n}\right)^3-\left(\frac{k-1}{n}\right)^3=\frac{k^3-(k-1)^3}{n^3}\quad (k=2,\ \cdots,\ n)\qquad\cdots\cdots(*)$$

また，$X=1$ となる確率は，3 回とも 1 が出る確率であり，

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

⬅ $(*)$ に $k=1$ を代入した値と一致するので $k=1$ のときも $(*)$ が使える

よって，$X=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ となる確率は

$$\boldsymbol{\frac{k^3-(k-1)^3}{n^3}\left(=\frac{3k^2-3k+1}{n^3}\right)}$$

89 白球が n 回取り出される確率を p_n とすると

$$p_n={}_{40}\mathrm{C}_n\left(\frac{10}{70}\right)^n\left(\frac{60}{70}\right)^{40-n}=\frac{40\,!}{n\,!(40-n)\,!}\cdot\frac{6^{40-n}}{7^{40}}$$

であるから，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\dfrac{40\,!}{(n+1)\,!(39-n)\,!}\cdot\dfrac{6^{39-n}}{7^{40}}}{\dfrac{40\,!}{n\,!(40-n)\,!}\cdot\dfrac{6^{40-n}}{7^{40}}}=\frac{40-n}{n+1}\cdot\frac{1}{6}$$

よって，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\gtrless 1 \iff \dfrac{40-n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{6}\gtrless 1 \iff 40-n\gtrless 6(n+1) \iff 7n\lessgtr 34$

したがって，$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5>p_6>\cdots$

よって，**白球が 5 回取り出される確率**がもっとも大きい．

90 (1) a_2 は 1 回目に白球，2 回目に赤球を取り出す確率であるから，

$$a_2=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\boldsymbol{\frac{7}{30}}$$

a_3 は，1，2 回目に白球，3 回目に赤球を取り出す確率であるから，

$$a_3=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\boldsymbol{\frac{7}{40}}$$

(2) (1)と同様に，

$$a_1=\frac{3}{10}\qquad a_4=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\qquad a_5=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

したがって，a_1 から a_5 の中で最大のものは a_1 である．よって，$\boldsymbol{k=1}$

91 A から取り出した 3 個の球の色に注目して，次の(i)〜(iv)の場合に分けて調べる．

(i) A から白 3 個を取り出した場合 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{96}{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2}$

(ii) A から白 2 個，黒 1 個を取り出した場合 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{450}{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2}$

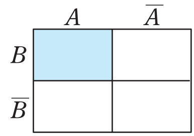
(iii) A から白 1 個，黒 2 個を取り出した場合 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{288}{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2}$

(iv) A から黒 3 個を取り出した場合 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{21}{{}_7\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2}$

したがって，求める確率は

$$\frac{96+450+288+21}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}=\frac{855}{35\cdot45}=\mathbf{\frac{19}{35}}$$

92 (1) $P(A)+P(B)-\{P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\}=2P(A\cap B)$ であるから，



$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{24}$$

したがって，$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

(2) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{24}=\dfrac{5}{24}$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

したがって，$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

93 (1) 取り出された 3 個の玉が，3 個とも赤玉となるのは，袋Aから赤玉を取り出し，さらに袋Bから赤玉 2 個を取り出すときであるから，この確率は

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{{}_5C_2}=\mathbf{\frac{1}{30}}$$

(2) (i) A から赤玉を取り出し，B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す場合

(ii) A から白玉を取り出し，C から赤玉 2 個を取り出す場合

の 2 つの場合がある．

(i)の確率は $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2\cdot3}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{5}$

(ii)の確率は $\dfrac{4}{6}\times\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{4}{15}$

よって，取り出された 3 個の玉のうち，2 個が赤玉で，1 個が白玉である確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\mathbf{\frac{7}{15}}$$

(3) 取り出された 3 個の玉のうち少なくとも 1 個が白玉である確率は，白玉が出ない，つまり 3 個とも赤玉である確率（これは(1)で求めてある）を 1 から引いて，

$$1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$$

したがって，求める条件つき確率は $$\frac{\frac{7}{15}}{\frac{29}{30}}=\mathbf{\frac{14}{29}}$$

94 A，B の 2 人が出したさいころの目をそれぞれ a，b とする．
$(a,\ b)$ は全部で $8^2=64$（通り）ある．
A の得点が 2 となる $(a,\ b)$ は　$(2,\ 1)$　……1 通り
A の得点が 3 となる $(a,\ b)$ は
　$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$　……2 通り
A の得点が 4 となる $(a,\ b)$ は
　$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$　……3 通り
　⋮
A の得点が 8 となる $(a,\ b)$ は
　$(8,\ 1)$，$(8,\ 2)$，…，$(8,\ 7)$　……7 通り

⬅ 得点が 1 点となることはなく，また，得点が 0 点となる確率を求めることはやっかいであるが，期待値を求める際，
$0\times$(得点が 0 の確率)$=0$
↑得点
であるから，得点が 0 点となる確率を求める必要はない

したがって，A の得点の期待値は

$$2\times\frac{1}{64}+3\times\frac{2}{64}+4\times\frac{3}{64}+5\times\frac{4}{64}+6\times\frac{5}{64}+7\times\frac{6}{64}+8\times\frac{7}{64}$$
$$=\frac{1}{64}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times7)$$
$$=\frac{168}{64}$$
$$=\boldsymbol{\frac{21}{8}}$$

⬅ カッコ内の計算は数列の知識を使えば次のように求めることもできる
$$\sum_{k=1}^{7}(k+1)k=\sum_{k=1}^{7}(k^2+k)$$
$$=\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\frac{7\cdot8}{2}=\frac{7\cdot8}{6}(15+3)=168$$

95-1 1 つのさいころに対する得点の期待値は
$$p\times\frac{1}{6}+q\times\frac{1}{6}=\frac{p+q}{6}$$
よって，2 つのさいころに対する得点の合計の期待値は
$$\frac{p+q}{6}+\frac{p+q}{6}=\boldsymbol{\frac{p+q}{3}}$$

⬅ さいころ 1 に対する得点を A，さいころ 2 に対する得点を B とするとき
$E(\mathrm{A}+\mathrm{B})=E(\mathrm{A})+E(\mathrm{B})$

95-2 (1) 1 本のくじを引くときの賞金の期待値は
$$1000\times\frac{1}{100}+500\times\frac{2}{100}+200\times\frac{5}{100}\underbrace{\left(+0\times\frac{92}{100}\right)}=\mathbf{30}\ (\text{円})$$
↑どうせ 0 なので最初から無視してかまわない

(2) 1 本のくじを引くときの賞金の期待値が 30（円）であるから，2 本のくじを引くときの賞金の合計金額の期待値は，
$$30+30=\mathbf{60}\ (\text{円})$$

第7章 論　理

96 (1)　$x>0 \;\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}\; x\geqq 0$　であるから，

「$x>0$」は「$x\geqq 0$」であるための十分条件であるが必要条件ではない．　……②

(2)　$x=0 \;\substack{\not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}\; x^2+y^2=0$　であるから，

「$x=0$」は「$x^2+y^2=0$」であるための必要条件であるが十分条件ではない．　……③

(3)　$xy=0 \;\substack{\not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}\; x=0$ かつ $y=0$　であるから，

「$xy=0$」は「$x=0$ かつ $y=0$」であるための必要条件であるが十分条件ではない．
……③

(4)　$x^2+y^2=1 \;\substack{\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}\; x+y=0$　であるから，

「$x^2+y^2=1$」は「$x+y=0$」であるための必要条件でも十分条件でもない．　……④

(5)　「すべての x について $xy=0$」$\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}$ $y=0$　であるから，

「すべての x について $xy=0$」は「$y=0$」であるための必要十分条件である．…①

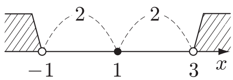
(6)　$(xy)^2$ が無理数である $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ x または y が無理数である　であるから，

「$(xy)^2$ が無理数である」は「x または y が無理数である」ための十分条件であるが必要条件ではない．　……②

((6)の$\not\Longleftarrow$の証明）反例：$x=\sqrt{2}$，$y=0$

97 (1)　$|x-1|>2$ を解くと　$x<-1$，$3<x$

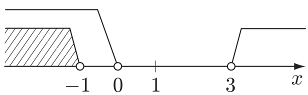
←$|x-1|>2$ は x が1から，2より大きく離れているということを意味する



よって，

$x<0$ かつ $|x-1|>2$ を満たす x の範囲は

$x<-1$



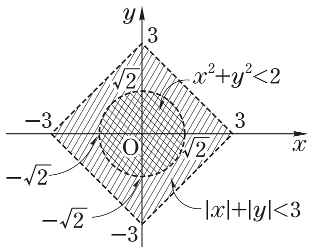
したがって，

「$x<-1$」は「$x<0$ かつ $|x-1|>2$」であるための必要十分条件である．　……(ウ)

(2)　「$x^2+y^2<2$」$\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$「$|x|+|y|<3$」

したがって，

$x^2+y^2<2$ は $|x|+|y|<3$ であるための十分条件であるが必要条件でない．　……(イ)



98 「$ab=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$」……①　について，

①の逆は，**「$a=0$ かつ $b=0$ ならば，$ab=0$」**　……②

①の裏は，**「$ab\neq 0$ ならば，$a\neq 0$ または $b\neq 0$」**　……③

①の対偶は，**「$a\neq 0$ または $b\neq 0$ ならば，$ab\neq 0$」**……④

②**は真**　　③（②の対偶）**は真**　　④**は偽**（反例：$a=0$，$b=1$）

99-1 (1) **真**

(証明) 背理法を用いて証明する．

α が無理数，γ が 0 でない有理数 かつ 積 $\alpha\gamma$ が有理数であると仮定する．

$\alpha\gamma$ と $\gamma(\neq 0)$ が有理数であることより $\dfrac{\alpha\gamma}{\gamma}$ も有理数になる．

$\dfrac{\alpha\gamma}{\gamma}=\alpha$ であるから，α が有理数となり矛盾が生じる．

したがって，α が無理数で，γ が 0 でない有理数ならば，積 $\alpha\gamma$ は無理数である．

(2) **偽**

(理由) $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ はともに無理数であるが，
積 $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})\,(=-2)$ は無理数でない．

⬅ 偽であることを証明するには成立しない例(反例という)を1つ述べればよい

99-2 (1) 対偶である「n が奇数ならば n^2 も奇数となる」を示す．

n が奇数ならば，$n=2k+1$ (k は整数) と表すことができ，

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから n^2 は奇数である．

したがって，n が整数であるとき，n^2 が偶数ならば n も偶数となる．

(2) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．

このとき，$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p，q は互いに素な整数) と表すことができる．

両辺を平方して，$2=\dfrac{q^2}{p^2}$　　よって，$q^2=2p^2$　　……①

右辺は偶数であるから，q^2 も偶数であり，(1)より q は偶数である．

したがって，$q=2q'$ (q' は整数) と表すことができる．

①に代入して，$4q'^2=2p^2$　　よって，$p^2=2q'^2$

したがって，p^2 も偶数であり，(1)より p は偶数である．すると，p，q は 2 を公約数にもつことになり，p，q が互いに素な整数であることに矛盾する．

以上より，$\sqrt{2}$ は無理数である．

99-3 まず，「$a+bx=c+dx$ ならば $b=d$」を背理法を用いて示す．

$a+bx=c+dx$ かつ $b\neq d$ と仮定する．

このとき，$a+bx=c+dx$ より，　$(b-d)x=c-a$

$b-d\neq 0$ であるから，$x=\dfrac{c-a}{b-d}$ が得られる．

ところが，左辺は無理数，右辺は有理数であり矛盾が生じる．

よって，$a+bx=c+dx$ ならば $b=d$

このとき，$a+bx=c+dx$ より $a=c$ が得られる．

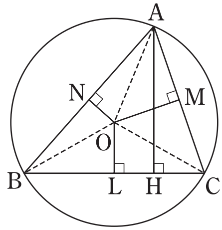
したがって，a，b，c，d が有理数，x が無理数のとき，

「$a+bx=c+dx$ ならば，$a=c$ かつ $b=d$」

が成り立つ．

第8章 図形の性質

100 3辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとし，3辺の垂直二等分線の交点（つまり三角形ABCの外心）をOとする．



三角形ABCの内部にあって，

$$PA \leqq PB,\ PA \leqq PC$$

を満たす点Pの全体がつくる領域Gは，四角形ANOMの周および内部である（ただし，辺AN，AM上の点は除く）．

ところで，

$$\triangle OAN \equiv \triangle OBN,\ \triangle OAM \equiv \triangle OCM$$

であるから，

$$\triangle OBN + \triangle OCM = \triangle OAN + \triangle OAM = (\text{四角形 ANOM})$$

したがって，　$\triangle ABC = 2 \times (\text{四角形 ANOM}) + \triangle OBC$

条件より，$\triangle ABC = 3 \times (\text{四角形 ANOM})$　であるから，

$$\triangle OBC = (\text{四角形 ANOM}),\ \triangle ABC = 3 \times \triangle OBC$$

したがって，AからBCに引いた垂線とBCの交点をHとすると，

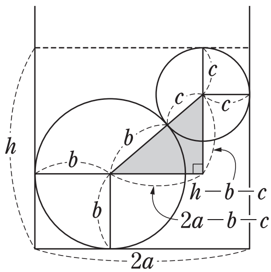
$$AH = 3OL \qquad \cdots\cdots ①$$

$A = 60°$ であるから，$\angle BOC = 120°$ であり，三角形ABCの外接円の半径をrとすると，$OL = \dfrac{r}{2}$

①より，$AH = \dfrac{3}{2}r$

また，$OA = r$ であるから，Aは半直線LO上にあり，三角形ABCは $AB = AC$ の二等辺三角形となる．これと $A = 60°$ であることから，三角形ABCは**正三角形**である．

101 2球の中心を通り，底面に垂直な平面による切り口は右のようになる．



図の網の直角三角形に注目して，

$$(b+c)^2 = (2a-b-c)^2 + (h-b-c)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ①に，$a=8$，$b=c=5$ を代入して，

$$10^2 = 6^2 + (h-10)^2$$

よって，　$(h-10)^2 = 64$

したがって，$h-10 = \pm 8$

これより，$h = 18,\ 2$

hは球の直径（$=10$）以上であるから，$h = \mathbf{18}$

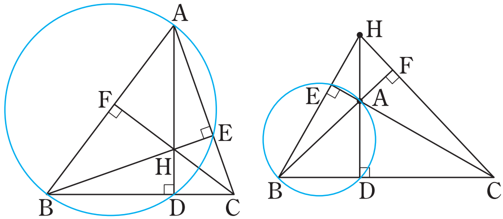
(2) ①に，$a=9$，$b=7$，$c=6$　を代入して，

$$13^2 = 5^2 + (h-13)^2$$

これより，$h = 25,\ 1$

hは球の直径（$=14$，12）以上であるから，　$h = \mathbf{25}$

102 $\angle ADB=\angle AEB$ $(=90°)$
であるから，4 点 A，B，D，E は，同一円周上にある．



したがって，方べきの定理より

$AH\cdot HD=BH\cdot HE$

同様に，4 点 B，C，E，F は同一円周上にあり，

$BH\cdot HE=CH\cdot HF$

以上より，　$AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$

103 チェバの定理より，　$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$　……①

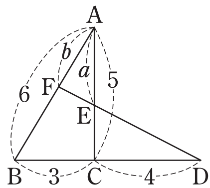
Dは線分 BC の中点であるから，　$\dfrac{BD}{DC}=1$　　①に代入して，$\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$

したがって，$AF:FB=AE:EC$　　よって，FE∥BC

104

(1)　メネラウスの定理より，

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$



したがって，

$$\frac{b}{6-b}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{5-a}{a}=1$$

よって，　$7b(5-a)=4a(6-b)$

整理して，　$\boldsymbol{3ab+24a-35b=0}$　……①

(2)　4 点 B，C，E，F が同一円周上にあるとき，方べきの定理より，

$$AF\cdot AB=AE\cdot AC$$

したがって，$6b=5a$　　よって，　$b=\dfrac{5}{6}a$

①に代入して，　$\dfrac{5}{2}a^2+24a-\dfrac{175}{6}a=0$

整理して，$15a^2-31a=0$

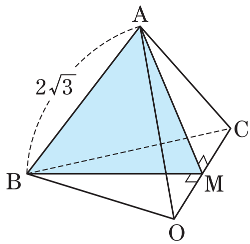
$0<a<5$ であるから，$a=\boldsymbol{\dfrac{31}{15}}$

105 辺 OC の中点をMとする．

$AM\perp OC$，$BM\perp OC$

であるから，

平面 $ABM\perp OC$



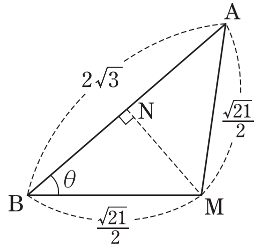
三角形 AOC は 1 辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形であるから，

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{7}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

また，$BM=AM=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

$\angle MBA=\theta$，辺 AB の中点をNとおくと，

$$\cos\theta=\frac{NB}{MB}=\frac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$



よって，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

したがって，

$$\triangle ABM=\frac{1}{2}AB\cdot BM\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

三角錐 OABC の体積は

$$(\text{三角錐 CABM})+(\text{三角錐 OABM})=\frac{1}{3}CM\cdot\triangle ABM+\frac{1}{3}OM\cdot\triangle ABM$$

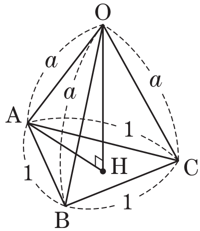
$$=\frac{1}{3}(CM+OM)\triangle ABM=\frac{1}{3}OC\cdot\triangle ABM$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{2}}$$

106 (1) $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{a^2-OH^2}$

$BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{a^2-OH^2}$

$CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=\sqrt{a^2-OH^2}$



より，AH=BH=CH であるから，H は三角形 ABC の外心である．

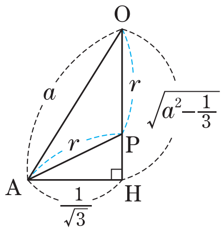
よって，AH は 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC の外接円の半径であり，正弦定理より，

$$AH=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2) $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\boldsymbol{\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}$

(3) 四面体 OABC の外接球 S の中心をPとする．

Pから底面 ABC に引いた垂線と底面の交点は三角形 ABC の外心であるから，P は線分 OH 上にある．



$PH^2+AH^2=PA^2$ より

$$\left(\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}-r\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=r^2$$

よって，$\quad a^2-2r\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}=0$

したがって，$\quad r=\boldsymbol{\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}}$

第 9 章 データの分析

107-1 $\dfrac{2+8+1+9+4+a}{6}=7$ より　$\dfrac{a+24}{6}=7$

よって，　$a=\mathbf{18}$

107-2 $x \leqq 13$ だと中央値は $\dfrac{13+15}{2}=14$ となり不適である．

$x \geqq 20$ だと中央値は $\dfrac{15+20}{2}=17.5$ となり不適である．

したがって，$13<x<20$ であり，このとき中央値は，$\dfrac{15+x}{2}$ である．

これが 17 である条件は，　$\dfrac{15+x}{2}=17$　より　$x=19$

これは $13<x<20$ を満たすので，求める x の値は **19** である．

108 変量 y についての n 個のデータ　$y_k=k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$　と変量 z についての n 個のデータ　$z_k=ck$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$　の間には，

$$z_k=cy_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

の関係があるので，

$$(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n \text{ の分散})=c^2(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n \text{ の分散})$$

が成り立つ．

したがって，y_1，y_2，$\cdots$，y_n の分散が z_1，z_2，$\cdots$，z_n の分散より大きくなる条件は，

$c^2<1$　　よって，　$\mathbf{-1<c<1}$

109-1 $f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 \left(=\dfrac{1}{n}\{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2\}\right)$

$$=\frac{1}{n}\{na^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)a+x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\}$$

$$=\left(a-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2+\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}{n}$$

⬆ a に関して平方完成

したがって，$f(a)$ を最小にする a は

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

つまり，x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均値であり，そのときの最小値は

$$\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

すなわち，x_1，x_2，$\cdots$，x_n の分散である．

参考 $a=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ $(=\overline{x})$ のとき，$f(a)=f(\overline{x})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$ で，これは分散の定義式そのものである．これより，$f(a)$ の最小値は，x_1，x_2，$\cdots$，x_n の分散である，と述べてもよい．

109-2 (1) 3つの正の数 a, b, c の平均値が14であるから,

$$\frac{1}{3}(a+b+c)=14$$

よって, $a+b+c=42$ ……①

また, 標準偏差が8であるから, 分散は 8^2 であり

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-14^2=8^2$$

よって, $a^2+b^2+c^2=\mathbf{780}$ ……ア ……②

等式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ に①, ②を代入して

$$42^2=780+2(ab+bc+ca)$$

よって, $ab+bc+ca=\mathbf{492}$ ……イ

(2) 集団全体の平均値は, $\dfrac{16\times20+12\times60}{80}=\mathbf{13}$ ……ウ

Aグループの20個のデータの2乗の合計を K_A

Bグループの60個のデータの2乗の合計を K_B

とする.

Aグループの20個のデータの平均値が16, 分散が24であることから,

$$\frac{K_A}{20}-16^2=24 \quad よって, \quad K_A=5600$$

Bグループの60個のデータの平均値が12, 分散が28であることから,

$$\frac{K_B}{60}-12^2=28 \quad よって, \quad K_B=10320$$

したがって, 集団全体の分散は,

$$\frac{K_A+K_B}{80}-13^2=\frac{5600+10320}{80}-169=\mathbf{30}$$ ……エ

110 $$\bar{x}=\frac{1}{n}\{100+99\times(n-1)\}=\frac{99n+1}{n}$$

$$v=\frac{1}{n}\{100^2+99^2(n-1)\}-\left(\frac{99n+1}{n}\right)^2$$

⬅(分散)=(2乗の平均値)−(平均値)^2

$$=\frac{99^2n+199}{n}-\frac{(99n+1)^2}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$$

よって, $(\bar{x},\ v)=\left(\boldsymbol{\dfrac{99n+1}{n}},\ \boldsymbol{\dfrac{n-1}{n^2}}\right)$ ……ア

また,

$$t_1=50+\frac{10\left(100-\dfrac{99n+1}{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2}}}=50+\frac{10(n-1)}{\sqrt{n-1}}=50+10\sqrt{n-1}$$

よって, $t_1\geqq100$ となる条件は

$$50+10\sqrt{n-1}\geqq100$$

したがって, $\sqrt{n-1}\geqq5$

これを満たす最小の n は, **26** である. ……イ

111 (1) $\overline{x}=\frac{1}{4}\{0+1+a+(a+1)\}=\boldsymbol{\frac{a+1}{2}}$, $\overline{y}=\frac{1}{4}(0+0+1+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $s_x{}^2=\frac{1}{4}\{0^2+1^2+a^2+(a+1)^2\}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2=\frac{2a^2+2a+2}{4}-\frac{a^2+2a+1}{4}=\boldsymbol{\frac{a^2+1}{4}}$

$s_y{}^2=\frac{1}{4}(0^2+0^2+1^2+1^2)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(3) $s_{xy}=\frac{1}{4}\left\{\left(0-\frac{a+1}{2}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{a+1}{2}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)\right.$

$\left.+\left(a-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(a+1-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a+1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{a}{4}}$

(4) $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{\frac{a}{4}}{\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$

112 (1) $w_i=ax_i+b$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ ……(＊) であるから，$\overline{w}=\boldsymbol{a\overline{x}+b}$

であり，w_1, w_2, $\cdots$, w_n の分散 $s_w{}^2$ は，$s_w{}^2=a^2s_x{}^2$ ⬅ 標問 108 参照

よって，

$s_w=\sqrt{a^2s_x{}^2}=|a|s_x=\boldsymbol{as_x}$ （$a>0$ より）

(2) x と y の共分散を s_{xy}，w と y の共分散を s_{wy} とすると，(＊) より

$s_{wy}=as_{xy}$

⬅ $y_i=1\cdot y_i+0$ と考えて
$s_{wy}=a\cdot 1s_{xy}=as_{xy}$
標問 112 精講参照

したがって，w と y の相関係数を r_{wy}，x と y の相関係数を r_{xy} とすると

$r_{wy}=\frac{s_{wy}}{s_w s_y}=\frac{as_{xy}}{as_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=r_{xy}$

113 (1) $\overline{x}=\frac{1}{10}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})=\frac{55}{10}=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$

$\overline{y}=\frac{1}{10}(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=\frac{75}{10}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$

$z_i=2x_i+3$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$ であるから，$\overline{z}=2\overline{x}+3=\boldsymbol{14}$ ⬅ 標問 108 参照

$w_i=y_i-4$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$ であるから，$\overline{w}=\overline{y}-4=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

(2) $s_x{}^2=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2\}$

$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$

$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2\cdot 10\overline{x}\cdot\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$

$=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2$

したがって，　$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2=10\{s_x{}^2+(\overline{x})^2\}$

また，

$$s_{xy}=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_{10}-\overline{x})(y_{10}-\overline{y})\}$$

$$=\frac{1}{10}\{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{y}$$

$$-(y_1+y_2+\cdots+y_{10})\overline{x}+10\overline{x}\overline{y}\}$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-10\overline{x}\cdot\overline{y}-10\overline{y}\cdot\overline{x}+10\overline{x}\overline{y})$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\overline{y}$$

したがって，　$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}=10(s_{xy}+\overline{x}\overline{y})$

(3)　$s_{xy}=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\overline{y}=\frac{445}{10}-\frac{11}{2}\times\frac{15}{2}=\boldsymbol{\frac{13}{4}}$

また，

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2=\frac{385}{10}-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{10}(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)-(\overline{y})^2=\frac{645}{10}-\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$$

したがって，　$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=\frac{\frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{33}{4}}\sqrt{\frac{33}{4}}}=\boldsymbol{\frac{13}{33}}$

$z_i=2x_i+3$，$w_i=y_i-4$（$i=1$，2，…，10）であるから，

$$s_{zw}=2\cdot1s_{xy}=2\times\frac{13}{4}=\boldsymbol{\frac{13}{2}}$$

⬅ 標問 **112** 参照

z，w の分散，標準偏差をそれぞれ $s_z{}^2$，$s_w{}^2$，s_z，s_w とおくと

$s_z{}^2=2^2s_x{}^2$，$s_w{}^2=1^2s_y{}^2$ より　$s_z=2s_x$，$s_w=s_y$

したがって，　$r_{zw}=\frac{s_{zw}}{s_zs_w}=\frac{2s_{xy}}{2s_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=r_{xy}=\boldsymbol{\frac{13}{33}}$

114　コインを 25 回投げたとき，表が 19 回以上出る確率は

$0.0053+0.0016+0.0004+0.0001=0.0074<0.01$

表が 18 回以上出る確率は，

$0.0143+0.0053+0.0016+0.0004+0.0001=0.0217>0.01$

したがって，25 試合中 **19 試合**以上で予想が的中すれば，有意水準 1％ で仮説が否定される．

第10章 総合問題

115 (1) $a_n \equiv 10^n \pmod{13}$ であるから，　$10a_n \equiv 10^{n+1} \pmod{13}$

また，$a_{n+1} \equiv 10^{n+1} \pmod{13}$，$0 \leqq a_{n+1} \leqq 12$ であるから，

$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$，$0 \leqq a_{n+1} \leqq 12$

よって，a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい．

(2) 13 を法として，$a_1 \equiv 10$ より，$\boldsymbol{a_1=10}$

$10 \equiv -3$ より，$10^2 \equiv (-3)^2 = 9$　よって，$\boldsymbol{a_2=9}$

$10^3 \equiv 9 \cdot 10 \equiv 12$　よって，$\boldsymbol{a_3=12}$

←$10^3 \equiv (-3)^3 = -27 \equiv 12 (=a_3)$ のように考えてもよい

$10^4 \equiv 12 \cdot 10 \equiv 3$　よって，$\boldsymbol{a_4=3}$

$10^5 \equiv 3 \cdot 10 \equiv 4$　よって，$\boldsymbol{a_5=4}$

$10^6 \equiv 4 \cdot 10 \equiv 1$　よって，$\boldsymbol{a_6=1}$

(3) 条件(A)，(B)より，N の 10^5 の位を x ($x=1$，2，3，……，9)，1 の位を y ($y=0$，1，2，……，9) とすると，

$$N = x \cdot 10^5 + 20160 + y$$

と表すことができる．

13 を法として，

$$N \equiv x \cdot 4 + 2 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 + y = 4x + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + y$$
$$= 4x + y + 75 \equiv 4x + y - 3$$

よって，条件(C)より，　$4x+y-3 \equiv 0$　したがって，$y \equiv 3-4x$

$x=1$ のとき，$y \equiv -1 \equiv 12$　←y は 0，1，2，……，9 のいずれかであるから不適

$x=2$ のとき，$y \equiv -5 \equiv 8$

$x=3$ のとき，$y \equiv -9 \equiv 4$

$x=4$ のとき，$y \equiv -13 \equiv 0$

$x=5$ のとき，$y \equiv -17 \equiv 9$

$x=6$ のとき，$y \equiv -21 \equiv 5$

$x=7$ のとき，$y \equiv -25 \equiv 1$

$x=8$ のとき，$y \equiv -29 \equiv 10$　←y は 0，1，2，……，9 のいずれかであるから不適

$x=9$ のとき，$y \equiv -33 \equiv 6$

以上より，N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

117 (1) $(1+2\sqrt{2})(x_1+y_1\sqrt{2})=7$ より，

$$x_1+y_1\sqrt{2} = \frac{7}{1+2\sqrt{2}} = \frac{7(1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = -1+2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(*)$$

x_1，y_1 は整数（したがって有理数），$\sqrt{2}$ は無理数であるから，

$\boldsymbol{x_1=-1}$，$\boldsymbol{y_1=2}$

また，$(1+2\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2})=7\sqrt{2}$ より

$$x_2+y_2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}(-1+2\sqrt{2})$$
$$=4-\sqrt{2}$$

←$(*)$ の $\sqrt{2}$ 倍

x_2，y_2 は整数，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，　　$\boldsymbol{x_2=4}$，$\boldsymbol{y_2=-1}$

(2)　z が L の要素であるとき，z は整数 x，y を用いて，

$$z=(1+2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots①$$

と表すことができる．

(1)より，

$$7=(1+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots②$$

$$7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots③$$

であるから，①+②，①+③ より，

$$z+7=(1+2\sqrt{2})\{(x-1)+(y+2)\sqrt{2}\}$$

$$z+7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})\{(x+4)+(y-1)\sqrt{2}\}$$

$x-1$，$y+2$，$x+4$，$y-1$ はすべて整数であるから，$z+7$，$z+7\sqrt{2}$ はともに L の要素である．

次に，z が L の要素でないとき，$z+7$ は L の要素でないことを示す．

この対偶である，$z+7$ が L の要素であるとき，z が L の要素であることを示せばよい．

$z+7$ が L の要素であるとき，$z+7$ は整数 x'，y' を用いて

$$z+7=(1+2\sqrt{2})(x'+y'\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots④$$

と表すことができる．

このとき，④−② より

$$z=(1+2\sqrt{2})\{(x'+1)+(y'-2)\sqrt{2}\}$$

$x'+1$，$y'-2$ は整数であるから，z は L の要素である．

したがって，z が L の要素でないとき，$z+7$ は L の要素でない．

また，$z+7\sqrt{2}$ が L の要素であるとき，$z+7\sqrt{2}$ は整数 x''，y'' を用いて

$$z+7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(x''+y''\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots⑤$$

と表すことができ，⑤−③ より

$$z=(1+2\sqrt{2})\{(x''-4)+(y''+1)\sqrt{2}\}$$

$x''-4$，$y''+1$ は整数であるから，z は L の要素である．

したがって，z が L の要素でないとき，$z+7\sqrt{2}$ は L の要素でない．