数学Ⅲ標準問題精講［三訂版］

木村光一著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

第1章

1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

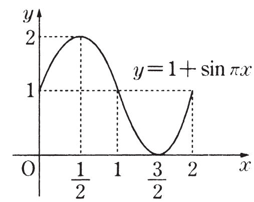
2 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n}-n^{\frac{3}{2}})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n^2+1}-n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}=\boldsymbol{0}$

3 (1) グラフより

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=\begin{cases}\boldsymbol{1} & (\boldsymbol{x=0,\ 1,\ 2})\\ \boldsymbol{\infty} & (\boldsymbol{0<x<1})\\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{1<x<2})\end{cases}$$



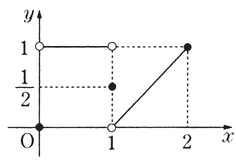
(2) (1)より

$f(0)=0,\quad f(1)=\dfrac{1}{2},\quad f(2)=1$

$0<x<1$ のとき, $\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{x-1}{(1+\sin\pi x)^n}}{1+\frac{1}{(1+\sin\pi x)^n}}=1$

$1<x<2$ のとき, $f(x)=x-1$

以上から, $y=f(x)$ のグラフは右図.



4 $\displaystyle f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}(\sin^{2n}a+1)}{1+a^{2n}}$ とおく.

(i) $|a|<1\ \left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき, $|\sin a|<1$ より, $f(a)=\boldsymbol{0}$

(ii) $|a|=1$ のとき, $a^{2n}=1$, $|\sin a|<1$ より, $f(a)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(iii) $|a|>1$ のとき，

$a=\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ (mは整数) ならば，

$$\sin^{2n}a=1 \text{ より，} f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{2n}}{1+a^{2n}}=\mathbf{2}$$

$a\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi$ ならば，

$$|\sin a|<1 \text{ より，} f(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{2n}a+1}{\dfrac{1}{a^{2n}}+1}=\mathbf{1}$$

5-1 (1) 自然数$n(>1)$に対して，$\sqrt[n]{n}>1$ であるから，

$\sqrt[n]{n}=1+h_n$ とおくと，$h_n>0$ であり，

$$n=(1+h_n)^n\geqq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2>\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2$$

$$\therefore\quad h_n{}^2<\frac{2}{n-1}\qquad\therefore\quad 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

(2) (1)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$ ゆえ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=\mathbf{1}$

5-2 $a\geqq b$ のとき，$\sqrt[n]{a^n}\leqq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqq\sqrt[n]{a^n+a^n}$ より，$a\leqq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqq a\cdot 2^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\boldsymbol{a}$$

$a\leqq b$ のとき，同様にして，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\boldsymbol{b}$

6-1 (1) $a_n>0$ ゆえ，$a_n{}^p a_{n-1}{}^q=a$ の対数をとると

$p\log a_n+q\log a_{n-1}=\log a$ より，$\quad\log a_n=-\dfrac{q}{p}\log a_{n-1}+\dfrac{\log a}{p}$

$$\log a_n-\frac{\log a}{p+q}=-\frac{q}{p}\left(\log a_{n-1}-\frac{\log a}{p+q}\right)$$

$$\log a_n-\frac{\log a}{p+q}=\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\left(\log a_1-\frac{\log a}{p+q}\right)=-\frac{\log a}{p+q}\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

$$\log a_n=\frac{\log a}{p+q}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\quad\boldsymbol{a_n=a^{\frac{1}{p+q}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}}}$$

(2) $p>q>0$ より，$\left|-\dfrac{q}{p}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{a^{\frac{1}{p+q}}}$$

6-2 $a_{n+1}-3=\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}-3=\dfrac{2(a_n-3)}{a_n+3}$，$\quad a_{n+1}+1=\dfrac{6(a_n+1)}{a_n+3}$ より

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\frac{2}{6}\cdot\frac{a_n-3}{a_n+1}=\frac{1}{3}b_n\qquad\therefore\quad b_n=b_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\mathbf{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+b_n}{1-b_n}=\mathbf{3}$

6-3 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ より，$a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{2-a_n}$

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{-(a_n-1)+1}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

$$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{a_1-1}-(n-1)=\frac{1}{c-1}-(n-1)$$

$$\therefore\quad a_n=1+\frac{c-1}{1-(c-1)(n-1)}\to 1\quad (n\to\infty)$$

7 (1) $0<a_1<1$ である．次に，ある n に対して $0<a_n<1$ と仮定すると

$$a_{n+1}=\frac{na_n{}^2+2n+1}{a_n+3n}>0$$

$$1-a_{n+1}=\frac{a_n+n-na_n{}^2-1}{a_n+3n}=\frac{(1-a_n)\{n(1+a_n)-1\}}{a_n+3n}>0\qquad\cdots\cdots①$$

したがって，$0<a_{n+1}<1$ となり，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$0<a_n<1$$

(2) ①：$1-a_{n+1}=\dfrac{n(1+a_n)-1}{a_n+3n}(1-a_n)$ において，$0<a_n<1$ より，

$n(1+a_n)-1<2n-1<2n$，$a_n+3n>3n$ であるから，

$$0<\frac{n(1+a_n)-1}{a_n+3n}<\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad 0<1-a_{n+1}<\frac{2}{3}(1-a_n)$$

$$\therefore\quad 0<1-a_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(1-a_1)=0$ ゆえ，$\lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{1}$

8 $a_n>(n+2)^2$ を数学的帰納法で証明する．$n=1$ のときは成立するから，ある n ($\geqq 2$) に対して，$a_{n-1}>(n+1)^2$ が成り立つと仮定すると，

$$a_n=1+\frac{a_{n-1}{}^2}{n^2}>1+\frac{(n+1)^4}{n^2}=1+\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{n^2}$$

$$>\frac{n^4+4n^3+4n^2}{n^2}=(n+2)^2$$

$$\therefore\quad a_n>(n+2)^2\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

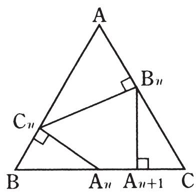
$\lim_{n\to\infty}(n+2)^2=\infty$ より，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

10-1 $\mathrm{BA}_n=x_n$ とおく．

$$\mathrm{AC}_n=a-\frac{1}{2}\mathrm{BA}_n=a-\frac{1}{2}x_n$$

$$\mathrm{CB}_n=a-\frac{1}{2}\mathrm{AC}_n=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}x_n$$

$$\mathrm{BA}_{n+1}=a-\frac{1}{2}\mathrm{CB}_n=\frac{3}{4}a-\frac{1}{8}x_n=x_{n+1}$$



$x_{n+1}-\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{2}{3}a\right)$ より，

$$x_n-\frac{2}{3}a=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}a\right)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

10-2 (1) A → D → A または A → B → A と移動する確率だから

$$a_1=\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 2=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$$

(2) 偶数回後にはQはAかCにあるから，$2n+2$ 回後にAにあるのは，$2n$ 回後にAにあって，(1)と同じように2回でAにもどるときか，または $2n$ 回後にCにあって，C → D → A または C → B → A と移動するときである．

$$\therefore\ a_{n+1}=\frac{5}{18}a_n+\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}(1-a_n)=\boldsymbol{-\frac{4}{9}a_n+\frac{13}{18}}$$

(3) $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{4}{9}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$a_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{2}{9}\left(-\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

11 (1) $x+3=A(x+1)+Bx$ より

$$A=\boldsymbol{3},\quad B=\boldsymbol{-2}$$

(2) $a_n=\dfrac{n+3}{n(n+1)}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n+1}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=3\left\{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}3\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}=\boldsymbol{2}$$

12-1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=0$ のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})$ とおくと

$$S_n=a_1-a_2+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+(n-1)(a_{n-1}-a_n)$$

$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}-(n-1)a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}na_n=1$$

12-2 $\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ より

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1\to\infty\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

注 標問 **82** の評価法を使えばもっと自然に証明できる．

次に，$\dfrac{1}{\sqrt{2k+2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ より　(気づくかどうかは経験の問題)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_n-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{1}{a_n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ だから，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

13-1 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{-\frac{1}{3^2}}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=\mathbf{-\frac{1}{10}}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

13-2 S と T の収束条件は

$\left|\frac{a}{2}\right|<1$，$\left|-\frac{1}{2-a}\right|<1$ より，$|a|<2$，$|a-2|>1$ $\quad\therefore\quad -2<a<1$ ……①

このとき，$S=T$ より

$$S-T=\frac{1}{1-\frac{a}{2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2-a}}=\frac{2+2a-a^2}{(2-a)(3-a)}=0$$

$\therefore\quad a^2-2a-2=0 \qquad \therefore\quad a=1\pm\sqrt{3}$ ……②

①，②より，

$\mathbf{a=1-\sqrt{3}}$

14 $S_n=a^{-1}+2^2\cdot a^{-2}+3^2\cdot a^{-3}+\cdots+n^2a^{-n}$ ……①

とおくと

$a^{-1}S_n=\qquad a^{-2}+2^2\cdot a^{-3}+\cdots+(n-1)^2a^{-n}+n^2a^{-(n+1)}$ ……②

①−② より

$(1-a^{-1})S_n=a^{-1}+3a^{-2}+5a^{-3}+\cdots+(2n-1)a^{-n}-n^2a^{-(n+1)}$

さらに

$$T_n=a^{-1}+3a^{-2}+\cdots+(2n-1)a^{-n} \qquad \cdots\cdots③$$

とおくと

$$a^{-1}T_n= \qquad a^{-2}+\cdots+(2n-3)a^{-n}+(2n-1)a^{-(n+1)} \qquad \cdots\cdots④$$

③−④ より

$$(1-a^{-1})T_n=a^{-1}+2(a^{-2}+\cdots+a^{-n})-(2n-1)a^{-(n+1)}$$

$$=a^{-1}+2\cdot\frac{a^{-2}(1-a^{-(n-1)})}{1-a^{-1}}-(2n-1)a^{-(n+1)}$$

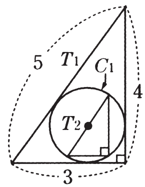
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{1-a^{-1}}\left(a^{-1}+\frac{2a^{-2}}{1-a^{-1}}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-a^{-1}}\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{a^{-1}+a^{-2}}{(1-a^{-1})^3}=\boldsymbol{\frac{a(a+1)}{(a-1)^3}}$$

15-1 T_1, T_2, …はすべて直角三角形である．よって，T_2 の斜辺は円 C_1 の直径と一致する．そこで，円 C_1 の半径を r とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}(3+4+5)r$$

$$\therefore\ S_1=6,\ r=1$$



面積比は，斜辺の比の 2 乗に等しいから

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{\infty}S_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^{i-1}S_1=\frac{6}{1-\frac{4}{25}}=\boldsymbol{\frac{50}{7}}$$

15-2 (1) 図のように座標軸を設定すると

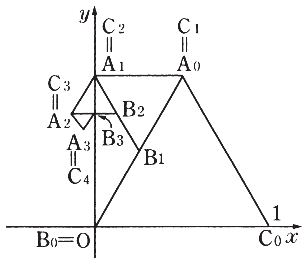
$$\overrightarrow{C_0C_3}=\overrightarrow{C_0C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{9}{8},\ \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{C_0C_3}|=\frac{3\sqrt{3}}{8}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$



(2) $\overrightarrow{C_{k+3}C_{k+4}}=-\dfrac{1}{8}\overrightarrow{C_kC_{k+1}}$ より

$$\overrightarrow{C_0C_{3n}}=\sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{C_{3k}C_{3k+1}}+\overrightarrow{C_{3k+1}C_{3k+2}}+\overrightarrow{C_{3k+2}C_{3k+3}})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^k(\overrightarrow{C_0C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2C_3})=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^k\overrightarrow{C_0C_3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}|\overrightarrow{C_0C_{3n}}|=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

15-3 (1) A_n の各辺は A_{n+1} の 4 辺になるから，$a_{n+1}=4a_n$.
$a_1=3$ であるから

$$a_n=\mathbf{3\cdot 4^{n-1}}$$

(2) A_n につけ加える小三角形の 1 辺の長さは A_1 の 1 辺の長さの $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 倍だから，その面積は $S_1\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}^2=\left(\frac{1}{9}\right)^n$ である．つけ加える個数は a_n だから

$$S_{n+1}=S_n+\left(\frac{1}{9}\right)^n a_n=S_n+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad S_n=S_1+\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1}-S_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\mathbf{\frac{8}{5}}$$

⬅ A_1 の外接円の面積は $\frac{4\sqrt{3}\,\pi}{9}$ (≒2.4)

16-1 $Q=a_1\cdots a_m.b_1\cdots b_n$ (有限小数) とすると

$$Q=\frac{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n}{10^n}=\frac{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n}{2^n\cdot 5^n}$$

ゆえに，約分すると分母は 2 または 5 の素因数だけからなる．

逆に，$Q=\frac{q}{2^\alpha\cdot 5^\beta}$ とすると，分母，分子に 2 あるいは 5 を適当に掛けて

$Q=\frac{q'}{2^n\cdot 5^n}=\frac{q'}{10^n}$ とすることができる．したがって，Q は有限小数．

16-2 $1\leqq b<a\leqq 9,\qquad \frac{b}{a}\leqq 0.\dot{b}\dot{a}$ ……①

$c=0.\dot{b}\dot{a}$ とおく．$100c=ba.\dot{b}\dot{a}$ との差をとり

$$99c=ba \qquad \therefore\quad c=\frac{10b+a}{99} \quad ……②$$

①，②より

$$\frac{b}{a}\leqq\frac{10b+a}{99} \qquad \therefore\quad b\leqq\frac{a^2}{99-10a}\ \left(=f(a)\text{ とおく}\right)$$

$f(a)$ は a の増加関数であり

$$f(6)=\frac{36}{39}<1,\quad f(7)=\frac{49}{29}=1.\cdots,\quad f(8)=\frac{64}{19}=3.\cdots,\quad f(9)=9$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \boldsymbol{a=7} \text{ のとき，} \boldsymbol{b=1} \\ \boldsymbol{a=8} \text{ のとき，} \boldsymbol{b=1,\ 2,\ 3} \\ \boldsymbol{a=9} \text{ のとき，} \boldsymbol{b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8} \end{cases}$$

第2章

17　$x=-t$ とおくと

$$与式=\lim_{t\to\infty}(-3t+1+\sqrt{9t^2-4t+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t-1}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

19-1　(1)　余弦定理により，$2^2=x^2+1^2-2x\cos\theta$

$\therefore\ x^2-2x\cos\theta-3=0$　　$\therefore\ x=\boldsymbol{\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}$

(2)　(1)より，$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})\sin\theta$ となるから

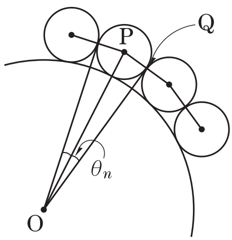
$$\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})\frac{\sin\theta}{\theta}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(3)　$\mathrm{CD}=3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}=\dfrac{(3-\cos\theta)^2-(\cos^2\theta+3)}{3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}$

$$=\frac{6(1-\cos\theta)}{3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}}=\frac{6\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{6}{(1+\cos\theta)(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3})}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

19-2　半径 1 の円の中心を O，半径 $\dfrac{1}{n}$ の小円の中心を P，O から小円に引いた接線の接点を Q，$\angle\mathrm{POQ}=\theta_n$ とすると，a_n の定義より



$$\frac{2\pi}{2\theta_n}-1<a_n\leqq\frac{2\pi}{2\theta_n}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{n\theta_n}-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}\leqq\frac{\pi}{n\theta_n}\quad\cdots\cdots①$$

$\sin\theta_n=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ であるから

$$n\theta_n=n\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}$$

$$\to1\quad(n\to\infty)\quad\cdots\cdots\cdots②$$

①，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\boldsymbol{\pi}$

← $n\theta_n$ の極限を直接求めることはできないから，$\sin\theta_n$ を媒介して考える。直感的には n が十分大きいとき，$\theta_n\fallingdotseq\sin\theta_n$ とみてよいから $\left(なぜなら\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}=1\right)$

$n\theta_n\fallingdotseq n\sin\theta_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\to1$

注　n が十分大きいとき，a_n 個の小円の中心を結んでできる 1 辺の長さが $\dfrac{2}{n}$ の正多角形は，半径 1 の円に限りなく近いと考えられる．したがって，

$$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2\pi}{\frac{2}{n}}=\pi$$

上の解答はこの見方を正当化したものである．本問のように**過不足があるときは不等式を用いる**ことになるが，この原則を使いこなすには“慣れ”が必要である．

20-1 (1) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおく．自然対数をとると，$\log f(x)=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$

$\log(1+x)=h$ とおくと，$x=e^h-1$，$h\to 0\ (x\to 0)$ であるから

$$\lim_{x\to 0}(\log f(x))=\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1 \qquad \therefore\quad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\log f(x)}=\boldsymbol{e}$$

(2) $\dfrac{1}{n}=x$ とおくと，(1)より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\boldsymbol{e}$$

(3) $\dfrac{a}{n}=x$ とおくと，(1)より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^a=\boldsymbol{e^a}$$

20-2 (1) 各砂粒が区間 $[0,\ 1)$ に落ちる確率は $\dfrac{1}{n}$，それ以外の区間に落ちる確率は

$1-\dfrac{1}{n}$ であるから

$$P_n(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^k\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{n-k}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\boldsymbol{1}$$

⬅ k は一定であることに注意！

これをヒントとみると

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k!\,{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

右辺の最終因子は，20-1 (3)の $a=-1$ の場合であるから

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=1\cdot\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot e^{-1}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k!e}}$$

21 (1) $y'=2\sin x\cos x\cdot\cos x+\sin^2 x(-\sin x)$

$=2\sin x(1-\sin^2 x)-\sin^3 x=\mathbf{2\sin x-3\sin^3 x}$

(2) $y'=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\boldsymbol{\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$

(3) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

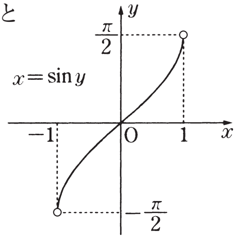
(4) $y'=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sin x}}$

(5) $y=x^a$ の自然対数をとり，$\log y=a\log x$．x で微分すると

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{a}{x}$ $\quad\therefore\quad y'=\dfrac{a}{x}y=\boldsymbol{ax^{a-1}}$

(6) $y=x^x$ の自然対数をとり，$\log y=x\log x$．x で微分すると

$\dfrac{y'}{y}=\log x+1$ $\quad\therefore\quad y'=\boldsymbol{x^x(\log x+1)}$



(7) $x=\sin y\ \left(|y|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

22 $\begin{cases}\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+(\sin\theta+\theta\cos\theta)=\theta\cos\theta\\[2mm]\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-(\cos\theta-\theta\sin\theta)=\theta\sin\theta\end{cases}$

ゆえに，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\boldsymbol{\tan\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\theta\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{1}{\theta\cos^3\theta}}$$

注 曲線の形については，演習問題 **32** を参照せよ．

23-1 $f(0)=0$，かつ $f'(0)$ が存在するから

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$$

23-2 (1) 前問の考え方を使って微分係数の定義に帰着させる．

$f(x)=\log\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$ とおくと，$f(0)=0$ だから

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$f'(x)=\frac{3}{a^x+b^x+c^x}\cdot\frac{a^x\log a+b^x\log b+c^x\log c}{3}$$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=\frac{\log a+\log b+\log c}{3}=\boldsymbol{\log\sqrt[3]{abc}}$$

(2)　(1)より

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=e^{\log\sqrt[3]{abc}}=\boldsymbol{\sqrt[3]{abc}}$$

24　(1)　(ⅰ)より，$f(0)\geqq 1$　……①

(ⅱ)で $x=h=0$ とおくと，$f(0)\geqq f(0)^2$．ところが①より $f(0)>0$ であるから

$f(0)\leqq 1$　……②

①，②より，$f(0)=1$

(2)　(ⅰ)と(1)より，$f(h)\geqq h+1=h+f(0)$

$\therefore\quad f(h)-f(0)\geqq h$

ゆえに，

$h>0$ のとき，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\geqq 1$；$h<0$ のとき，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}\leqq 1$

$f(x)$ は微分可能であるから，それぞれ $h\to+0$，$h\to-0$ とすると

$f'(0)\geqq 1$，$f'(0)\leqq 1$

$\therefore\quad f'(0)=1$

(3)　(ⅱ)と(1)より

$$f(x+h)-f(x)\geqq f(x)(f(h)-1)=f(x)(f(h)-f(0))$$

ゆえに

$h>0$ のとき，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqq f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$h<0$ のとき，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\leqq f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$f(x)$ は微分可能であるから，それぞれ $h\to+0$，$h\to-0$ とすると

$f'(x)\geqq f(x)f'(0)=f(x)$，$f'(x)\leqq f(x)f'(0)=f(x)$　($\because$ (2))

$\therefore\quad \boldsymbol{f'(x)=f(x)}$

注　$f'(x)=f(x)$，$f(0)=1$ である関数は，$f(x)=e^x$ に限ることを示すことができる．少し技巧的だが，$f'(x)-f(x)=0$ の両辺に e^{-x} を掛けると

$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0$　　$\therefore\quad (e^{-x}f(x))'=0$

$\therefore\quad e^{-x}f(x)=C$ (定数)

これから $f(x)=Ce^x$ となるが，$f(0)=1$ より $C=1$ である．

25　(1)　区間 $(0,\ 1)$ において，つねに $f(x)=x$ であるとする．$f(0)=0$，$f(1)=1$ と合わせて区間 $[0,\ 1]$ で $f(x)=x$，したがって　$f'(x)=1$.

これは $f'(x)$ が定数でないことに反する．

(2)　$f(a)>a$ なる a が $(0,\ 1)$ に存在するとき

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=f'(b),\ 0<b<a$$

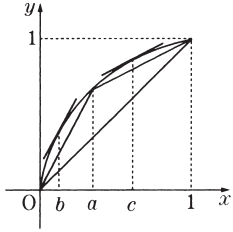
なる b が存在し，

$f(a)>a>0$ より $f'(b)>1$．すなわち，$f'(b)>1$ なる b が $(0,\ 1)$ に存在する．また，

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{1-f(a)}{1-a}=f'(c),\ a<c<1$$

なる c が存在し，$f(a)>a$ より，$1-f(a)<1-a$，かつ $1-a>0$ であるから，$f'(c)<1$．すなわち，$f'(c)<1$ なる c が $(0,\ 1)$ に存在する．

$f(a)<a$ なる a が $(0,\ 1)$ に存在するときも同様である．



26-1　$f(x)=x+a\cos x\ (a>1)$

$$f'(x)=1-a\sin x=a\left(\frac{1}{a}-\sin x\right)$$

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$0<\dfrac{1}{a}<1$ ゆえ，$\sin\alpha=\dfrac{1}{a}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ なる α がただ1つ存在し，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ において表のように増減する．

極小値：$f(\pi-\alpha)=\pi-\alpha-a\cos\alpha=0$ より，$\alpha+a\cos\alpha=\pi$ であるから

極大値：$f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha=\boldsymbol{\pi}$

26-2　(1)　$f'(x)=\dfrac{-4x^2+2ax+4}{(x^2+1)^2}$ ゆえ，$x=\alpha$ で極大値1をとるとすると

$-4\alpha^2+2a\alpha+4=0$，$f(\alpha)=\dfrac{4}{2\alpha}=1$　（研究 より）

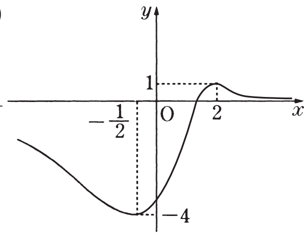
$\therefore$　$\alpha=2$，　$a=\mathbf{3}$

このとき，$f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$，$f'(x)=\dfrac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$

よって，$x=2$ で極大である．

(2)　さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ であるから

$$\boldsymbol{-4\leqq f(x)\leqq 1}$$



27　$y'=-\dfrac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}x}\sin x+e^{-\frac{3}{4}x}\cos x$

$$=-\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}x}(3\sin x-4\cos x)$$

$$=-\frac{5}{4}e^{-\frac{3}{4}x}\sin(x-\beta)$$

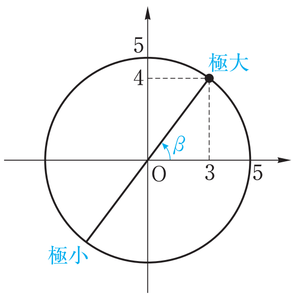
$\sin(x-\beta)$ の係数が負であることに注意すると y が極小となるのは

$$x=\beta+(2n+1)\pi\quad(n\ は整数)$$

となるときである．ゆえに

$$\tan\alpha=\tan\{\beta+(2n+1)\pi\}=\tan\beta=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

$$\sin\alpha=\sin\{\beta+(2n+1)\pi\}=-\sin\beta=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$



28 (1) $f(x)=e^{ax}\sin ax$

$$f'(x)=ae^{ax}\sin ax+ae^{ax}\cos ax=ae^{ax}(\sin ax+\cos ax)$$
$$=\sqrt{2}\,ae^{ax}\sin\left(ax+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\therefore\quad f''(x)=(\sqrt{2}\,a)^2e^{ax}\sin\left(ax+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{2a^2e^{ax}\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)}$$

(2) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ のとき $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$ であるから，$x=\frac{\pi}{4}$ で極小値をとる条件は，

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ かつ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$，すなわち

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots①,\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{2}\right)>0 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{4}=m\pi \quad \therefore\quad a=4m-1 \quad \cdots\cdots\cdots③$

②より，$2n\pi<\frac{\pi}{4}a+\frac{\pi}{2}<(2n+1)\pi \quad \therefore\quad 8n-2<a<8n+2 \quad \cdots\cdots\cdots④$

ただし，m，n は整数である。③を④に代入すると

$$8n-2<4m-1<8n+2 \quad \therefore\quad 2n-\frac{1}{4}<m<2n+\frac{3}{4}$$

したがって，$m=2n$ となるから，求める a は

$\boldsymbol{a=8n-1}$ （**n は整数**）

29-1 (1) $y=xe^{-x}$ より，

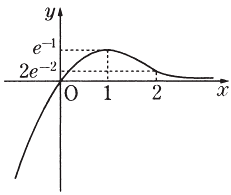
$y'=(1-x)e^{-x}$

$y''=(x-2)e^{-x}$

さらに，

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘	0



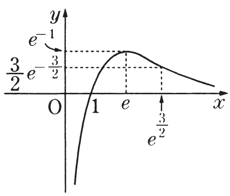
(2) $y=\frac{\log x}{x}$ より，$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$，$y''=\frac{2\log x-3}{x^3}$

$y\to-\infty\ (x\to+0)$，

$\log x=t$ とおくと，

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

x	$+0$	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	0



29-2 P，Q の x 座標をそれぞれ a，b ($a<b$) とし

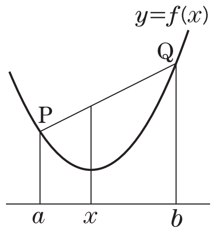
$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)-f(x)$$

とおくと，証明すべきことは

$$f''(x)>0 \Longrightarrow F(x)>0\ (a<x<b)$$

である．まず，平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$$



を満たす c が存在する(実はただ1つであることが以下でわかる)から

$$F(x)=\{f'(c)(x-a)+f(a)\}-f(x)$$

と表せる.

$$F'(x)=f'(c)-f'(x),\quad F''(x)=-f''(x)<0\ \ (a<x<b)$$

したがって, $F'(x)$ は単調に減少し, $F'(c)=0$ である.

$$\therefore\ \begin{cases} F'(x)>0\ \ (a<x<c) \\ F'(x)<0\ \ (c<x<b) \end{cases}$$

x	a		c		b
$F'(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$	0	↗		↘	0

ゆえに, $F(x)$ は表のように増減するから

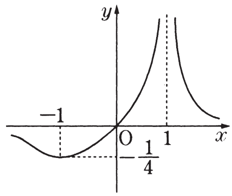
$$F(x)>0\ \ (a<x<b)$$

30 (1) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ より, $\displaystyle\lim_{x\to1}y=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=0$

すなわち, 直線 $x=1$ と x 軸は漸近線である.

$$y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

も考えてグラフは右図.



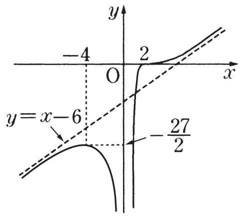
(2) $y=\dfrac{(x-2)^3}{x^2}=x-6+\dfrac{12x-8}{x^2}$ より

$$\lim_{x\to0}y=-\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-6)\}=0$$

ゆえに, y 軸と直線 $y=x-6$ は漸近線. また

$$y'=\frac{(x+4)(x-2)^2}{x^3}$$

も考えてグラフは右図.



31-1 $f(x)=cx^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=\sqrt{x}$ とおくと, $f'(x)=\dfrac{3c}{2}\sqrt{x}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=g(x)$, $x\neq0$ より, $x=\dfrac{1}{c}$. ゆえに, 点Pでの $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接線が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β $(\alpha>\beta>0)$ とすれば

$$\tan\alpha=f'\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{3\sqrt{c}}{2},\quad \tan\beta=g'\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{\sqrt{c}}{2}$$

$\alpha-\beta=30^\circ$ より

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{c}}{1+\dfrac{3c}{4}}=\frac{4\sqrt{c}}{4+3c}$$

$$\therefore\ 3c-4\sqrt{3}\sqrt{c}+4=(\sqrt{3c}-2)^2=0\qquad \therefore\ c=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

31-2 2曲線 $y=cx^2$ と $y=\log x$ は, $\mathrm{P}(a,\ b)$ において接線を共有するから

$$b=ca^2\ \ \cdots\cdots①,\qquad b=\log a\ \ \cdots\cdots②,\qquad 2ca=\frac{1}{a}\ \ \cdots\cdots③$$

①と③より, $b=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$. ②より, $a=\boldsymbol{\sqrt{e}}$. ③より, $c=\boldsymbol{\dfrac{1}{2e}}$

32 $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$

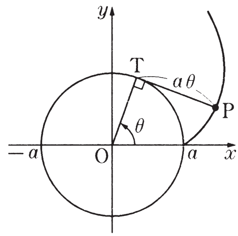
(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=a\theta\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=a\theta\sin\theta$ より，P での法線の方程式は

$$a\theta\cos\theta\{x-a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\}+a\theta\sin\theta\{y-a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\}=0$$

$\therefore$ h : $\boldsymbol{x\cos\theta+y\sin\theta=a}$

(2) (原点から法線 h に下ろした垂線の長さ)$=\dfrac{|a|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=a$ となるので，法線 h は円：$x^2+y^2=a^2$ に接する．

注 この曲線 C は，原点を中心とする半径 a の円に糸を巻き，その先端 P を点 $(a,\ 0)$ からほぐすとき，点 P が描く軌跡である．事実，図の θ に対して



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{TP}}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+a\theta\begin{pmatrix}\cos(\theta-90^\circ)\\ \sin(\theta-90^\circ)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\\ a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{pmatrix}$$

33 (1) $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ $(\cos\theta\sin\theta\neq0)$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ゆえに，$(x_0,\ y_0)=(a\cos^3\alpha,\ a\sin^3\alpha)$ での接線の方程式は

$$y=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-a\cos^3\alpha)+a\sin^3\alpha$$

$\therefore$ $\boldsymbol{y=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x+a\sin\alpha}$

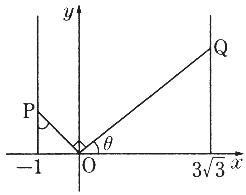
(2) (1)より

$\mathrm{P}(a\cos\alpha,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ a\sin\alpha)$

$\therefore$ $\mathrm{PQ}^2=a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=a^2$

$\therefore$ $\mathrm{PQ}=\boldsymbol{a}$ (一定)

35-1 直線 OQ が x 軸となす角を θ とおくと，



$\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\mathrm{OQ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}$ であるから

$$f(\theta)=\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(\tan^3\theta-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

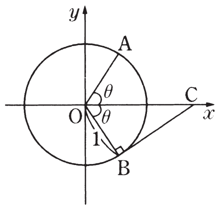
したがって，$f(\theta)$ は右表のように増減し，最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2+3\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=8$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$		$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

35-2　△OBC において，$\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta$，$\overline{\mathrm{CO}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ であるから

$$L(\theta)=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CO}}$$
$$=\boldsymbol{2\pi-2\theta+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}}$$
$$L'(\theta)=-2+\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)}{\cos^2\theta}$$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$L'(\theta)$ の符号は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ の前後で負から正に変わるから，ここで最小である．最小値は

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}}$$

36-1　$x^p+y^q=1$　$(x>0,\ y>0)$　……①

$z=xy$ と $z^q=x^qy^q$ は同時に最大になる．①より，$y^q=1-x^p$ $(0<x<1)$ ゆえ

$$z^q=x^q(1-x^p)\ \ (=f(x)\ とおく)$$
$$f'(x)=qx^{q-1}(1-x^p)-px^{p-1}x^q$$
$$=x^{q-1}\{q-(p+q)x^p\}$$

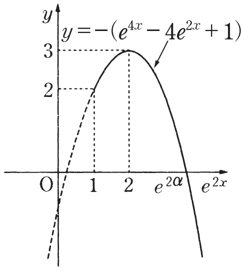
x	0	$\cdots$	$\left(\dfrac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f(x)$ は右表のように増減するので，

$$(z\ の最大値)=\left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}}=\boldsymbol{\frac{p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p}}}{(p+q)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}}$$

36-2　$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3}$ より

$$f'(x)=\frac{-2e^{-2x}(e^{4x}-4e^{2x}+1)}{(e^x+e^{-x})^4}$$



$f(x)\leqq 0$ $(x\leqq 0)$ ゆえ，$x\geqq 0$ で考えれば十分．

$f'(x)=0$ より，$e^{2x}=2+\sqrt{3}$

右図より，$\alpha=\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$ の前後で，$f'(x)$ の符号は正 → 負となるから，$f(x)$ は $x=\alpha$ で最大となる．

$$(最大値)=f(\alpha)=\frac{e^{4\alpha}-e^{2\alpha}}{(e^{2\alpha}+1)^3}\ (分母，分子\times e^{3\alpha})$$

⬅ 分子$=e^{2\alpha}(e^{2\alpha}-1)$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{\{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})\}^3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{18}}$$

37-1　$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ での接線の方程式は，$\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=1$

したがって，両座標軸との交点は，

$$\left(\frac{a}{\cos\theta},\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right)\qquad \therefore\ L(\theta)=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}}$$

$\sin^2\theta = t$ $(0<t<1)$ とおくと

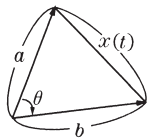
$$L^2(\theta) = \frac{a^2}{1-t} + \frac{b^2}{t} \quad (= f(t) \text{ とする})$$

$$f'(t) = \frac{a^2}{(1-t)^2} - \frac{b^2}{t^2} = \frac{\{at+b(1-t)\}\{(a+b)t-b\}}{(1-t)^2 t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{b}{a+b}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$$\therefore \quad (\text{最小値}) = \sqrt{f\left(\frac{b}{a+b}\right)} = \boldsymbol{a+b}$$

37-2 t 時間後に短針から長針に向けて測った角を θ とすると



$\theta = \left(2\pi - \frac{2\pi}{12}\right)t = \frac{11\pi}{6}t$. よって，余弦定理により

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. 両辺を t で微分すると

$$2x\frac{dx}{dt} = 2ab\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{11\pi}{6} \cdot 2ab\sin\theta$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2 \frac{\sin^2\theta}{x^2} = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos^2\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

$\cos\theta = u$ $(|u| \leqq 1)$ とおき，$f(u) = \dfrac{1-u^2}{a^2+b^2-2abu}$ とすると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{11\pi ab}{6}\right)^2 f(u)$$

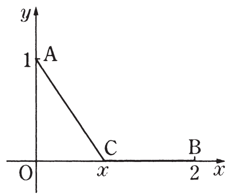
$$f'(u) = \frac{2(au-b)(bu-a)}{(a^2+b^2-2abu)^2} \quad (0<a<b)$$

u	-1	$\cdots$	$\frac{a}{b}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗		↘	

ゆえに，$u = \cos\theta = \boldsymbol{\dfrac{a}{b}}$ のとき，

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \text{の最大値} = \frac{11\pi ab}{6}\sqrt{f\left(\frac{a}{b}\right)} = \boldsymbol{\frac{11\pi a}{6}}$$

38 $\mathrm{C}(x,\ 0)$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ として，折れ線 ACB 上を運動する場合を考えれば十分である．このときの所要時間を $f(x)$ とすると



$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2-x}{a}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{a} = \frac{ax - \sqrt{x^2+1}}{a\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(a^2-1)\left(x + \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right)}{a\sqrt{x^2+1}\,(ax+\sqrt{x^2+1})}$$

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} \geqq 2$，すなわち $1 < a \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$f'(x) \leqq 0$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ であるから

$$(\text{最短時間}) = f(2) = \boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} \leqq 2$，すなわち $a \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$f'(x)$ の符号は $x = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ の前後で負→正となるから

$$(\text{最短時間}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\right) = \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{a^2-1}}{a}}$$

39 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a(\cos\alpha-1),\ b\sin\alpha)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a(\cos\beta-1),\ b\sin\beta)$

$$S=\frac{ab}{2}|(\cos\alpha-1)\sin\beta-\sin\alpha(\cos\beta-1)|$$
$$=\frac{ab}{2}|\sin\alpha-\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)|$$
$$=\frac{ab}{2}|\sin\alpha-\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)|$$

(2) (1)より，$S=\dfrac{ab}{2}\left|\sin\alpha-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\beta-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|$

$0<\alpha\leqq\pi$ で α を固定すると，$\sin\alpha\geqq0$，かつ

$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\dfrac{\alpha}{2}<\beta-\dfrac{\alpha}{2}<2\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ であるから，$\beta-\dfrac{\alpha}{2}=\pi$ すなわち $\beta=\dfrac{\alpha}{2}+\pi$ の

とき，S の最大値は，$F(\alpha)=\boldsymbol{\dfrac{ab}{2}\left(\sin\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

(3) $F'(\alpha)=\dfrac{ab}{2}\left(\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$$=ab\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

α	0	$\cdots$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$F'(\alpha)$		$+$		$-$	
$F(\alpha)$		↗		↘	

$\therefore$ $(F(\alpha)$ の最大値$)=F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab}$

40 (1) $f(x)=\tan x-x$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1=\tan^2x>0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって，$f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$ だから，$f(x)>0$．ゆえに

$$x<\tan x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) $g(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

したがって，$g(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．

(i) $x\geqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x+\sqrt{1+x^2}>x+\sqrt{x^2}=2x$ より，$g(x)>\log2x$．よって

$$g(x)\geqq g\left(\frac{\pi}{2}\right)>\log\pi>\log e=1\geqq\sin x$$

(ii) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$h(x)=g(x)-\sin x$ とおくと

$$h'(x)=g'(x)-\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\cos x$$

← $\cos^2x=\dfrac{1}{1+\tan^2x}$ を使うと(1)との関係がつく

ここで，(1)より

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2x}}<\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

であるから，$h'(x)>0$．さらに，$h(0)=g(0)=0$ であるから

$g(x)>\sin x$

(i), (ii)より，$\log(x+\sqrt{1+x^2})>\sin x$ $(x>0)$ となる.

41 (1) $\log x=nt$ とおくと，$x=e^{nt}$，$t\to\infty\ (x\to\infty)$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{nt}{\sqrt[n]{e^{nt}}}=n\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}$$

(2) $\log x=-nt$ とおくと，$x=e^{-nt}$，$t\to\infty\ (x\to+0)$ であるから

$$\lim_{x\to+0}\sqrt[n]{x}\log x=\lim_{t\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nt}}(-nt)=-n\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}$$

42 $y=e^x$ の $x=t$ での接線 $y=e^t(x-t)+e^t$ が，点 $(a,\ b)$ を通る条件は

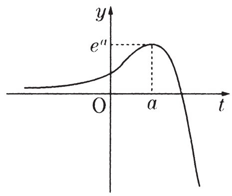
$b=e^t(a-t)+e^t$ $(=f(t)$ とおく$)$

したがって，点 $(a,\ b)$ から引きうる接線の本数は，t の方程式 $b=f(t)$ の異なる実数解の個数に等しい．$f(t)=(a-t+1)e^t$ より

$$f'(t)=(a-t)e^t,\qquad \lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$$

$t=-u$ とおくと

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{u\to\infty}\frac{a+u+1}{e^u}=0$$



$y=f(t)$ と $y=b$ の共有点の数を調べて

$b>e^a$ のとき，0 本； $0<b<e^a$ のとき，2 本
$b=e^a$ または $b\leqq 0$ のとき，1 本

43-1 (1) $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ $(x>0)$ 右側の不等式だけを示す.

$f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}>0$

かつ $f(0)=0$ であるから，$f(x)>0$ $(x>0)$

(2) (1)の不等式で $x=0.1$ とおくと

$$0.095=0.1-\frac{0.01}{2}<\log(1.1)<0.1-\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}=0.095\dot{3}$$

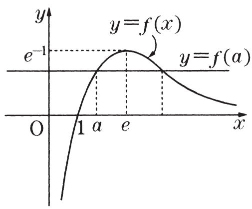
よって，**0.095**

43-2 (1) $\log x<\sqrt{x}$ $(x>0)$ より，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>1)$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ゆえ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$．グラフの概形は，29-1 (2)参照.

(2) $a^x=x^a \Longleftrightarrow x\log a=a\log x$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\log a}{a}=\dfrac{\log x}{x}$ $(=f(x)$ とおく$)$



$y=f(x)$ と $y=f(a)$ の共有点の個数を調べて，

$0<a\leqq 1$ または $a=e$ のとき，1 個
$1<a<e$ または $a>e$ のとき，2 個

(3) $f(x)$ は $x\geqq e$ で減少し，$\pi>e$ であるから

$$\log e^{\pi}-\log\pi^{e}=\pi\log e-e\log\pi=\pi e\left(\frac{\log e}{e}-\frac{\log\pi}{\pi}\right)>0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{e^{\pi}>\pi^{e}}$

44 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{1}$

$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ より，$f'(\pi)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\pi}}$

$f'(x)$ の符号は，$g(x)=x\cos x-\sin x$ の符号と一致する．

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0\ (0<x<\pi)$$

よって，$g(x)$ は減少し，$g(0)=0$ であるから，$g(x)<0$

$\therefore$ $\boldsymbol{f'(x)<0\ (0<x\leqq\pi)}$

(2) 差をとって微分する方法は十分練習したので，ここでは $\sin x\leqq x\ (x\geqq0)$ を認めて，標問 **78** で学ぶ基本事項：

$$f(x)\leqq g(x)\ (a\leqq x\leqq b)\ \text{ならば}\ \int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$

をもとに積分を用いて証明する．

$$\int_0^x\sin t\,dt\leqq\int_0^x t\,dt\qquad\therefore\ 1-\cos x\leqq\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\ 1-\frac{x^2}{2}\leqq\cos x\leqq1$$

ゆえに

$$\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt\leqq\int_0^x\cos t\,dt\leqq\int_0^x dt$$

$$\therefore\ x-\frac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

ゆえに

$$\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{6}\right)dt\leqq\int_0^x\sin t\,dt\leqq\int_0^x t\,dt$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\leqq1-\cos x\leqq\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\ 1-\frac{x^2}{2}\leqq\cos x\leqq1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

(3) $g(x)=x\cos x-\sin x$ を①，②を用いて評価する．

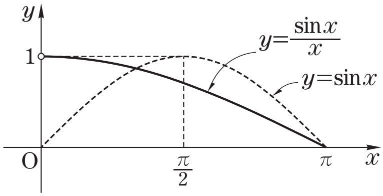
$$x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-x\leqq g(x)\leqq x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$$

$$-\frac{x^3}{2}\leqq g(x)\leqq-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{24}$$

$$-\frac{x}{2}\leqq f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\leqq-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{24}$$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\mathbf{0}$

以上から，$y=\dfrac{\sin x}{x}\ (0<x\leqq\pi)$ のグラフの概形は次図．



45 a を変数とみて，$f(x)=2^{c-1}(x^c+b^c)-(x+b)^c$ $(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=c\{(2x)^{c-1}-(x+b)^{c-1}\}$$

$c>1$ ゆえ，$f'(x)$ の符号は $2x-(x+b)=x-b$ の符号と一致する．ゆえに，

x	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f(x)\geqq f(b)=2^{c-1}\cdot 2b^c-(2b)^c=0$$

$\therefore$ $f(a)=2^{c-1}(a^c+b^c)-(a+b)^c\geqq 0$ **（等号は $a=b$ のとき成立）**

注 不等式の両辺を b^c で割って，

$\left(\frac{a}{b}+1\right)^c\leqq 2^{c-1}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c+1\right\}$ とし，$\frac{a}{b}$ を変数とみて証明してもよい．

46 $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+ax^3-\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=\frac{x^2\{3ax-(1-3a)\}}{1+x}$

$a\leqq 0$ のとき，$f'(x)<0$ $(x>0)$，$f(0)=0$ ゆえ不適．

$0<a<\frac{1}{3}$ のとき，$f'(x)<0$ $\left(0<x<\frac{1-3a}{3a}\right)$，$f(0)=0$ ゆえ不適．

$a\geqq\frac{1}{3}$ のとき，$f'(x)>0$ $(x>0)$，$f(0)=0$ ゆえつねに $f(x)\geqq 0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a\geqq\frac{1}{3}}$

47 (1) $g(x)=x-f(x)=x-\frac{1}{2}\cos x$ とおく．$g'(x)=1+\frac{1}{2}\sin x\geqq\frac{1}{2}$ より

$g(x)$ は単調増加で，$g(0)=-\frac{1}{2}<0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$ となるから，$g(x)=0$，すなわち $x=f(x)$ はただ1つの解をもつ．

(2) $x=y$ のときは明らかであるから，$x\neq y$ とする．平均値の定理（標問 **25**）より

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$ を満たす c が，x と y の間に存在する．$f'(c)=-\frac{1}{2}\sin c$ ゆえ，

$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{2}|\sin c||x-y|\leqq\frac{1}{2}|x-y|$

(3) (1)の解を α とする．$a_n=f(a_{n-1})$，$\alpha=f(\alpha)$ の差をとり(2)を用いると

$$0\leqq|a_n-\alpha|=|f(a_{n-1})-f(\alpha)|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha|\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$$

ゆえに，$a_n\to\alpha$ $(n\to\infty)$

48　t 秒後の綱の長さを y，船と岸壁の距離を x とおくと

$$y=58-4t,\quad x^2=y^2-30^2 \qquad \cdots\cdots①$$

ゆえに，$t=2$ のとき，$y=50$，$x=40$．①を t で微分すると

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}=-8y \qquad \therefore\quad x\frac{dx}{dt}=-4y \qquad \cdots\cdots②$$

さらに t で微分して

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x\frac{d^2x}{dt^2}=-4\frac{dy}{dt}=16 \qquad \therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{x}\left\{16-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} \qquad \cdots\cdots③$$

②，③で $t=2$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=-4\cdot\frac{50}{40}=\mathbf{-5\ m/s},\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{16-(-5)^2}{40}=\mathbf{-\frac{9}{40}\ m/s^2}$$

49　(1)　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$(\text{速さ})=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\left|\frac{dx}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

ゆえに，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\mathbf{1}$

よって，$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=t+C$

$t=0$ のとき $x=0$ であるから，$C=0$

$$\therefore\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=t$$

$$\therefore\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}=\sqrt{1+t^2}$$

（標問 **37** 参照）

辺々加えて，$e^x=t+\sqrt{1+t^2}$

$$\therefore\quad x=\mathbf{\log(t+\sqrt{1+t^2})}$$

(2)　$\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ での接線は，$Y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}(X-x)+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$Y=0$ とおくと，(1)より

$$X=x-\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\log(t+\sqrt{1+t^2})-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}$ となるから，$t=2$ のとき，$\left|\dfrac{dX}{dt}\right|=\mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{4}}$ **（毎秒）**

第3章

52 (1) 与式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

(2) 与式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\{\log(1+x^2)\}'\log(1+x^2)\,dx$

$$=\frac{1}{4}\Big[\{\log(1+x^2)\}^2\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\log 2)^2}$$

53 (1) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

とおいて a, b, c を定めると，$a=1$, $b=-1$, $c=1$. ゆえに

$$与式=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=\Big[\log|x-1|-\log|x-2|-\frac{1}{x-2}\Big]_{-1}^0$$

$$=\Big[\log\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-2}\Big]_{-1}^0$$

$$=\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\log\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}$$

(2) $\dfrac{x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

とおいて a, b, c を定めると，$a=3$, $b=-2$, $c=0$. ゆえに

$$与式=\int_0^1\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\Big[3\log(x+1)-\log(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$=3\log 2-\log 2=\boldsymbol{2\log 2}$$

54 $e^x=t$ とおくと，$x=\log t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$，すなわち $dx=\dfrac{1}{t}dt$ だから

$$与式=\int\frac{1}{t^2+3t+2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt$$

⬅ $\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t+1}+\dfrac{c}{t+2}$ とおいて a, b, c を定める

$$=\int\left\{\frac{1}{2t}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2(t+2)}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\log t-\log(t+1)+\frac{1}{2}\log(t+2)+C$$

⬅ $t>0$

$$=\log\frac{\sqrt{t(t+2)}}{t+1}+C$$

$$=\boldsymbol{\log\frac{\sqrt{e^x(e^x+2)}}{e^x+1}+C}$$

55 (1) 与式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx=\left[x^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$=-\left\{\left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right\}$$

$$=-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ 与式$=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi}{8}=\boldsymbol{\frac{\pi(\pi^2-6)}{48}}$

(2) 与式$=\int_0^1 (x)'\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

$$=\Big[x\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^1-\int_0^1 x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}}dx$$ ⬅ $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1}$$

56 (1) $A=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi} e^x\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$$=\left[\frac{1}{2}e^x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$$

$B=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$ とおくと

$$B=\left[e^x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin 2x\,dx$$ ⬅ 右辺第1項は0

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left[e^x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{e^{\pi}-1}{4}-\frac{1}{4}B \qquad \therefore\ B=\frac{e^{\pi}-1}{5}$$

ゆえに

$$A=\frac{e^{\pi}-1}{2}-\frac{e^{\pi}-1}{10}=\boldsymbol{\frac{2(e^{\pi}-1)}{5}}$$

(2)　(1)より，$A>8$ は

$$e^{\pi}>21$$

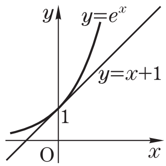
と同値である．$y=e^x$ の $x=0$ での接線を考えると

$$e^x \geqq 1+x$$

が成り立つから，これを用いて近似計算すると

$$e^{\pi}>e^3 \cdot e^{0.14}$$
$$>(2.71)^3 \cdot (1.14)$$
$$=22.6\cdots$$

ゆえに，$A>8$ である．



← $(2.7)^3 \cdot (1.1)$ でも十分

注　もし接線でもダメなら標問 **41** (1)の不等式を使う．それでもダメなら標問 **41** 研究 の不等式による．これを無限にくり返して近似精度をどんどん上げていくと，ついには等号が成り立つと予想される．

57-1　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，研究 で述べたことより，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

$d\theta=\dfrac{2}{1+t^2}dt$，$\theta:\dfrac{\pi}{3}\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t:\dfrac{1}{\sqrt{3}}\to 1$ であるから

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{t}dt$$

$$=\Big[\log t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=-\log\frac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3}$$

57-2　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$$

← 指示された置換では原始関数が求まらない特殊な積分．**57-1** の方法を適用できるが，計算は大変

よって，$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ とおくと，$I=J$ かつ

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad I=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

58-1　$b_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

において，$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$b_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n t(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=a_n$$

したがって，標問 **58** (2)と同じ結果を得る．

58-2 (1) $I_{n+2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan^2 x+1)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan x)'\,dx=\left[\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

(2) (1)より，$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$ かつ

$I_0=\dfrac{\pi}{4}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\log 2$ であるから，

$$I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2}$$

$$I_6=\frac{1}{5}-I_4=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}-I_2\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+(1-I_0)=\boldsymbol{\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}}$$

59 (1) $\int_0^m e^{-x}x^n\,dx=\Big[-e^{-x}x^n\Big]_0^m-\int_0^m(-e^{-x})\cdot nx^{n-1}\,dx$

$$=-e^{-m}m^n+n\int_0^m e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$m\to\infty$ とするとき，$e^{-m}m^n\to 0$ であるから，$F(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ が存在すれば，$F(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ も存在して，$F(n+1)=nF(n)$ が成り立つ．

(2) $F(1)=\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^m e^{-x}\,dx=\lim\limits_{m\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^m=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^m}\right)=1$ であるから，(1)より，$F(2)$ も存在して，$F(2)=1F(1)=1$

以下同様にして，

$$F(3)=2F(2)=2!,\ F(4)=3F(3)=3!,\ \cdots,\ F(n+1)=n!$$

60 $\int_\alpha^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_\alpha^0 f(x)\,dx+\int_0^{np}f(x)\,dx+\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx$

$$=-\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx+\int_0^{np}f(x)\,dx$$

右辺第 2 項で，$x-np=t$ とおくと

$$\int_{np}^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_0^\alpha f(t+np)\,dt=\int_0^\alpha f(t)\,dt=\int_0^\alpha f(x)\,dx$$

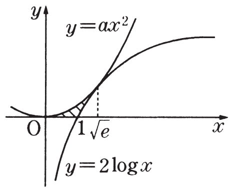
$$\therefore\quad \int_\alpha^{np+\alpha}f(x)\,dx=\int_0^{np}f(x)\,dx$$

61-1 (1)　2 曲線が $x=t$ で接するとすると

$$2\log t=at^2,\ \ \frac{2}{t}=2at$$

$at^2=1$ より，$t=\sqrt{e}$

$\therefore\ \ a=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$，　　接点 $(\boldsymbol{\sqrt{e}},\ \boldsymbol{1})$



(2)　$S=\displaystyle\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}2\log x\,dx$

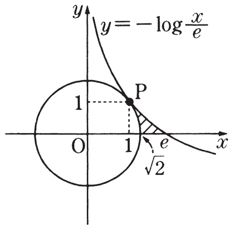
$$=\left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^{\sqrt{e}}-2\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{e}}{3}-2}$$

61-2 (1)　$y=-\log(ax)$ より，$y'=-\dfrac{a}{ax}=-\dfrac{1}{x}$

$x=1$ のとき $y'=-1$ であるから，(OP の傾き)$=1$

$\therefore\ \ \mathrm{P}(1,\ 1)$　　$\therefore\ \ 1=-\log a$

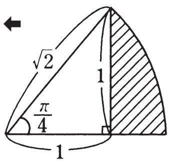
$\therefore\ \ a=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$



(2)　$S=\displaystyle\int_1^{e}(1-\log x)dx-\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$

$$=\Big[x-(x\log x-x)\Big]_1^{e}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

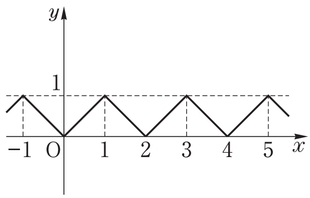
$$=\boldsymbol{e-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}}$$



62 (1)　$|x-1|=\begin{cases}1-x & (x\leqq 1)\\ x-1 & (x\geqq 1)\end{cases}$ より

$$f(x)=1-|x-1|=\begin{cases}x & (0\leqq x\leqq 1)\\ 2-x & (1\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

さらに $f(x)$ は 2 を周期とするから，グラフは右図のようになる．



(2)　$S_n=\displaystyle\int_{2n-2}^{2n}e^{-2x}f(x)dx$ において，$x-(2n-2)=t$ とおくと

$$S_n=\int_0^2 e^{-2(t+2n-2)}f(t+2n-2)dt$$

$$=e^{-4n+4}\int_0^2 e^{-2t}f(t)dt$$

← $f(x)$ は 2 を周期とするから $f(t+2n-2)=f(t)$

ここで

$$\int_0^2 e^{-2t}f(t)dt=\int_0^1 te^{-2t}dt+\int_1^2(2-t)e^{-2t}dt$$

$$=\left[t\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)dt$$

$$+\left[(2-t)\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2\left\{-\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\right\}dt$$

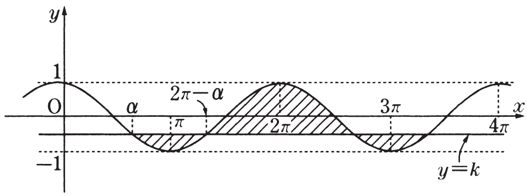
$$=-\frac{e^{-2}}{2}+\left[-\frac{e^{-2t}}{4}\right]_0^1+\frac{e^{-2}}{2}+\left[\frac{e^{-2t}}{4}\right]_1^2$$

$$=\frac{1-e^{-2}}{4}+\frac{e^{-4}-e^{-2}}{4}=\frac{e^{-4}-2e^{-2}+1}{4}$$

$$\therefore\quad S_n=\boldsymbol{\frac{(e^{-2}-1)^2}{4}(e^{-4})^{n-1}}$$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{(e^{-2}-1)^2}{4}\cdot\frac{1}{1-e^{-4}}=\frac{(e^2-1)^2}{4(e^4-1)}=\boldsymbol{\frac{e^2-1}{4(e^2+1)}}$

63　$\cos\alpha=k$ $(0<\alpha<\pi)$ とすると，



$$S=2\left\{\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}(k-\cos x)\,dx-\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}(k-\cos x)\,dx\right\}$$

$$=2\left\{\Big[kx-\sin x\Big]_{\alpha}^{2\pi-\alpha}-\Big[kx-\sin x\Big]_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\right\}$$

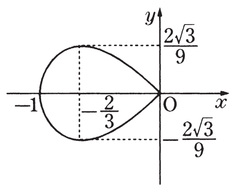
$$=(4\pi-6\alpha)k+6\sin\alpha=(4\pi-6\alpha)\cos\alpha+6\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \frac{dS}{d\alpha}=-6\cos\alpha-(4\pi-6\alpha)\sin\alpha+6\cos\alpha=6\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\alpha$$

$\sin\alpha>0$ ゆえ，$\dfrac{dS}{d\alpha}$ の符号は $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ の前後で負→正と変化し，S はここで最小となる．このとき，

$$k=\cos\frac{2\pi}{3}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

64-1　$x=t^2-1$　……①，　$y=t(t^2-1)$　……②



$|t|\leqq1$ より $-1\leqq x\leqq0$，①より $t=\pm\sqrt{x+1}$　……③

②，③より，$y=\pm x\sqrt{x+1}$

$f(x)=x\sqrt{x+1}$ とおく．(もう一方は x 軸に関して対称)

$$f'(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}},\quad \lim_{x\to-1+0}f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-0}f'(x)=1$$

よって，グラフは図のようになる．この曲線が囲む図形の面積は，

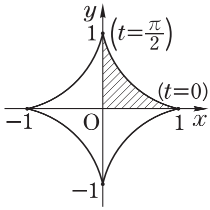
$$S=2\int_{-1}^{0}(-f(x))\,dx=-2\int_{-1}^{0}x\sqrt{x+1}\,dx$$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x=t^2-1$ であるから

$$S=-2\int_0^1(t^2-1)t\cdot2t\,dt=-4\int_0^1(t^4-t^2)\,dt$$

$$=-4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{8}{15}}$$

64-2 この閉曲線 (標問 **33** 参照) は，両座標軸に関して対称であるから



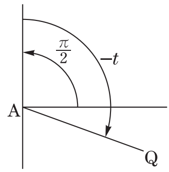
$$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\,dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\,dt \quad \text{(標問 58 参照)}$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$$

65 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ が x 軸の正の向きとなす角はそれぞれ



$$\frac{\pi}{2}-t,\quad \left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\frac{\pi}{2}=\pi-t$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\overset{\frown}{\mathrm{QB}}=t$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

$$=(0,\ 1)+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)$$

$$+t(\cos(\pi-t),\ \sin(\pi-t))$$

$$=\boldsymbol{(\sin t-t\cos t,\ 1+\cos t+t\sin t)}$$

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ が x 軸に達する点は $(\pi,\ 0)$ である．$x:0\to\pi$ のとき，$t:0\to\pi$ だから，求める面積は

$$S=\int_0^\pi y\,dx=\int_0^\pi y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_0^\pi(1+\cos t+t\sin t)t\sin t\,dt$$

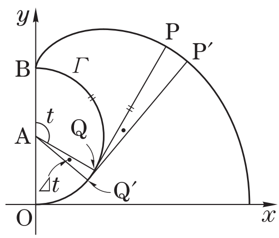
← $t^2\sin^2 t=t^2\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$=\int_0^\pi\left(t\sin t+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{t^2}{2}\cos 2t+\frac{t^2}{2}\right)dt$$

部分積分法を用いて各項ごとに積分すると

$$S=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}}$$

別解 t が微小角 Δt だけ変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Q'P'}}$ のなす角は Δt である．したがって，QP が描く図形 PQQ′P′ (QQ′ は円弧 Γ の一部) は，半径 $\mathrm{QP}=t$，中心角 Δt の扇形で近似できる．よって，**研究** で説明したことから



$$S=(\Gamma\text{ と }y\text{ 軸が囲む半円})+\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{6}$$

この方法だと計算量を大幅に軽減することができる．しかし，最初の方針で計算をやりぬく腕力も大切である．

66-1 楕円と直線の交点は

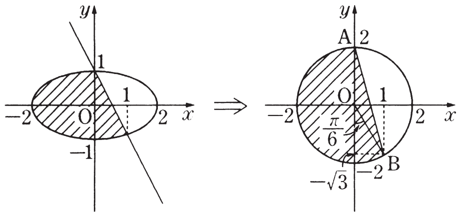
$(0,\ 1),\ \left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

領域を y 軸方向に2倍すると

$2S=$(扇形 OAB)$+$(三角形 OAB)

$$=\frac{2^2}{2}\cdot\frac{7\pi}{6}+\frac{2\cdot1}{2}=\frac{7\pi}{3}+1$$

$$\therefore\quad S=\boldsymbol{\frac{7\pi}{6}+\frac{1}{2}}$$



66-2 第1象限にある領域の面積は,

$S=$(扇形 OAA$'$)$+$(図形 OA$'$B$'$)

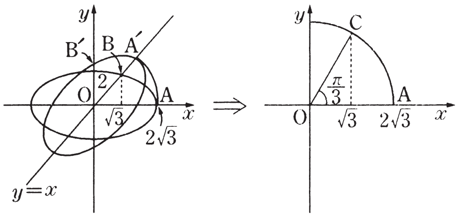
$=$(扇形 OAA$'$)$+$(図形 OAB)

図形 OAB を y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍すると扇形 OAC になるので

$$S=(\text{扇形 OAA}')+\frac{1}{\sqrt{3}}(\text{扇形 OAC})$$

$$=\frac{(2\sqrt{3})^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{(2\sqrt{3})^2}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\pi}$$



67 $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ ……① とおくと, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ ……②

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\quad\cdots\cdots③$$

②, ③より

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}dt$$

$$=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}+\frac{1}{2}t+C$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}t+C$$

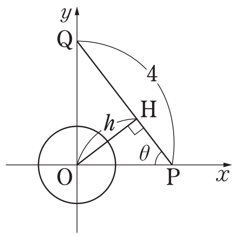
ここで, ①, ③より

$$x+\sqrt{x^2+1}=e^t\qquad\therefore\quad t=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

ゆえに

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right)+C}$$

69 図の $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して



$$h=\mathrm{OP}\sin\theta=(4\cos\theta)\sin\theta$$

$$\therefore\quad h=2\sin 2\theta$$

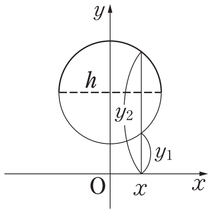
条件より，$h>1$ であるから

$$1<h\leqq 2 \qquad \cdots\cdots①$$

Vは，$x^2+(y-h)^2=1$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積に等しい．

$$y=h\pm\sqrt{1-x^2}$$

であるから



$$V=\pi\int_{-1}^{1}(y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\{(h+\sqrt{1-x^2})^2-(h-\sqrt{1-x^2})^2\}\,dx$$

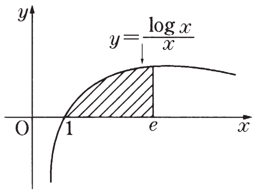
$$=4\pi h\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$ ⬅ 積分は上半円板の面積

$$=4\pi h\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2 h \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，$h=2$，つまり $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$ **のとき**

(Vの最大値)$=\boldsymbol{4\pi^2}$

70-1 グラフは図のようになるから，(演習問題 **29-1** (2))



$$V=\pi\int_1^e\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^2dx$$

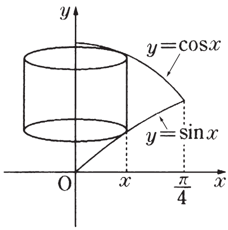
$$=\pi\left[-\frac{(\log x)^2}{x}\right]_1^e+\pi\int_1^e\frac{2\log x}{x^2}\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{e}+2\pi\left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^e+2\pi\int_1^e\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{e}-\frac{2\pi}{e}+2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=\boldsymbol{\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi}$$

70-2 年輪法による．



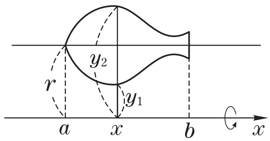
$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=2\pi\Big[x(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}-2\pi\Big[\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}-2\pi}$$

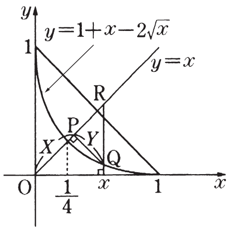
70-3 図で $\dfrac{y_1+y_2}{2}=r$ であるから



$$V=\pi\int_a^b(y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx$$
$$=2\pi\int_a^b\frac{y_1+y_2}{2}\cdot(y_2-y_1)\,dx$$
$$=2\pi r\int_a^b(y_2-y_1)\,dx=2\pi rS$$

注 Vは底面が F，高さが $2\pi r$ の柱状立体の体積と一致する．

71 直円錐の体積 V から，曲線と直線 $x+y=1$ が囲む図形の回転体の体積 W を除く．



$$Y=\frac{\mathrm{QR}}{\sqrt{2}}=\frac{x-(1+x-2\sqrt{x})}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}$$
$$X=\mathrm{OR}-Y=\sqrt{2}\,x-\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad W=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}Y^2\,dX=\pi\int_{\frac{1}{4}}^{1}Y^2\frac{dX}{dx}\,dx$$
$$=\pi\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$$
$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{(2\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx\quad(2\sqrt{x}-1=t\ \text{とおく})$$
$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^1 t^3\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}$$

ゆえに，

$$V-W=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{48}}$$

注 曲線を原点のまわりに $-45°$ 回転すると，放物線の一部 $y^2=\sqrt{2}\,x-\dfrac{1}{2}$，$x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる．本問の場合はこれを利用するのもよい方法である．

72 立体の平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ による断面は

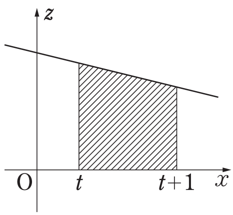
$$\begin{cases}t\leqq x\leqq t+1\\0\leqq z\leqq(1-3t)x+3t^2+t+1\ (=f(x)\ \text{とおく})\end{cases}$$

⬅ 複雑な変数を固定すれば断面が簡単になる

$$f(t)=(1-3t)t+3t^2+t+1$$
$$=2t+1>0$$
$$f(t+1)=(1-3t)(t+1)+3t^2+t+1$$
$$=-t+2>0$$

よって，断面は台形でありその面積は

$$\frac{1}{2}\{f(t)+f(t+1)\}=\frac{1}{2}(t+3)$$



ゆえに，求める体積は

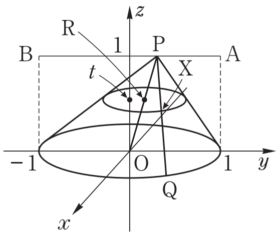
$$V=\frac{1}{2}\int_0^1(t+3)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+3\right)=\boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

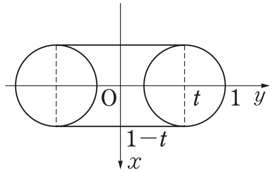
73　Pを固定しQを動かしてできる円錐を K_{P} とすると，K は K_{P} の描く立体である．よって，K の $z=t$ による断面は，K_{P} の断面 C_{P} の描く図形である．C_{P} と直線 OP の交点をRとすると

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RP}=t:1-t$$

よって，C_{P} はRを中心とする半径 $1-t$ の円　……(＊)

である．ゆえに

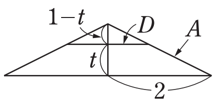


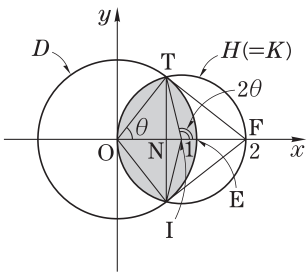


$$S(t)=\pi(1-t)^2+4t(1-t)$$
$$=\boldsymbol{\pi(1-t)^2+4(t-t^2)}$$
$$V=\int_0^1\{\pi(1-t)^2+4(t-t^2)\}dt$$
$$=\frac{\pi}{3}+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi+2}{3}}$$

注　とくにQが D の周上を動くとき，直線 PQ と平面 $z=t$ の交点をXとすると，つねに $\mathrm{RX}=1-t$ である．よって，(＊)が成り立つ．

74　(1)





円錐 A の平面 $z=t$ による切り口は，半径 $2(1-t)$ の円 D であるから

$$\cos\angle\mathrm{FOT}=\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OF}}=1-t=\cos\theta$$

$\therefore$　$\angle\mathrm{FOT}=\theta$　　$\therefore$　$\angle\mathrm{FIT}=2\theta$

ゆえに

$$S(t)=2\{扇形\ \mathrm{OET}-\triangle\mathrm{ONT}+(扇形\ \mathrm{IOT}-\triangle\mathrm{INT})\}$$
$$=2\{扇形\ \mathrm{OET}+扇形\ \mathrm{IOT}-\triangle\mathrm{OIT}\}$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot1^2\sin(\pi-2\theta)\right\}$$
$$=\boldsymbol{4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin2\theta}$$

(2)　$1-\cos\theta=t$ であるから，求める体積 V は

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)\frac{dt}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\sin\theta\,d\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)'d\theta$$

$$=\left[\theta\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\sin\theta\,d\theta=\left[(\pi-2\theta)(-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2)(-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\pi-2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

となるので

$$V=\frac{8}{9}+\pi-2-\frac{2}{3}=\boldsymbol{\pi-\frac{16}{9}}$$

75-1 (1) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\quad l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\mathbf{8}$$

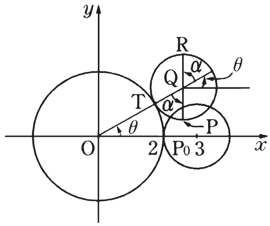
(2) $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(-3\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2=9\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$\therefore\quad l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\left[6\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{6}$$

75-2 $\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TP_0}}$ より，$\alpha=2\theta$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{QR}}=3\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos 3\theta\\ \sin 3\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{3\cos\theta-\cos 3\theta}\\ \mathbf{3\sin\theta-\sin 3\theta}\end{pmatrix}$$

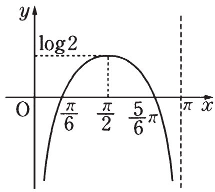


$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とおくと，$x(-\theta)=x(\theta)$，$y(-\theta)=-y(\theta)$ より，曲線 C は x 軸対称であることに注意する．

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=(-3\sin\theta+3\sin 3\theta)^2+(3\cos\theta-3\cos 3\theta)^2$$
$$=18-18(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)$$
$$=18\{1-\cos(3\theta-\theta)\}=36\sin^2\theta$$
$$\therefore\quad l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=12\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\mathbf{24}$$

76-1 $f(x)=\log(2\sin x)$ より，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

したがって，グラフの概形は右図のようになる．



$1+f'(x)^2=1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ より，$y\geqq 0$ の部分の長さは

$$l=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{\sin x}\,dx\quad(\text{標問 }\mathbf{57}(6))$$
$$=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\mathbf{2\log(2+\sqrt{3})}$$

76-2 $s(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ とおくと

$$S=\int_0^{s(1)}2\pi x\,ds=\int_0^1 2\pi x\frac{ds}{dx}dx=\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{\pi}{6}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\mathbf{\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi}$$

注 直感的に

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

より，$S=\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ としてもよい．

77-1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{\pi}}$$

(2) $\displaystyle\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}=\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n-1)(3n)}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)(2n)}$ より

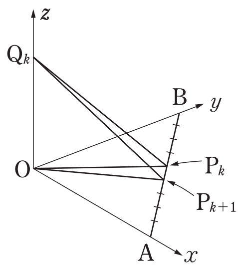
$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1\log(2+x)\,dx-\int_0^1\log(1+x)\,dx=\log\frac{27}{16}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{27}{16}}$$

77-2 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) とする．P_1, P_2, ……, P_{n-1} は線分 BA を n 等分するから



$$\triangle OP_kP_{k+1}=\frac{1}{n}\triangle OAB=\frac{1}{2n}$$

また，$P_kQ_k=1$ より

$$OQ_k^2=1-OP_k^2$$

$$=1-\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right\}=2\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

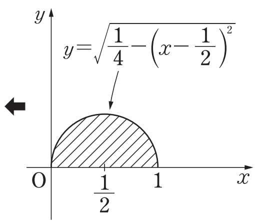
$$\therefore\quad V_k=\frac{1}{3}\cdot\triangle OP_kP_{k+1}\cdot OQ_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{48}\pi}$$



78 $\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくと

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\qquad\cdots\cdots①$$

(1) $\tan x>0$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$I_n>0$ ゆえ，$0<I_n<I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2})$ ($\because$ ①)

$=(I_0+I_2)-(I_2+I_4)+(I_4+I_6)-\cdots+(-1)^n(I_{2n}+I_{2n+2})$

$=I_0+(-1)^nI_{2n+2}=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^nI_{2n+2}$ であるから，(1)より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\pi}{4}+(-1)^nI_{2n+2}\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

同様にして

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+2}=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(I_{2k+1}+I_{2k+3})$ ⬅ 技巧的でやや難しい

$=2\{(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-\cdots+(-1)^n(I_{2n+1}+I_{2n+3})\}$

$=2\{I_1+(-1)^nI_{2n+3}\}$，かつ

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\log 2$ であるから，(1)より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}2\left\{\frac{1}{2}\log 2+(-1)^nI_{2n+3}\right\}=\boldsymbol{\log 2}$$

79 (1) $1\leqq x\leqq e$ のとき，$0\leqq\log x\leqq 1$ より

$0\leqq(\log x)^n\leqq 1$

$\therefore\ 0\leqq\displaystyle\int_1^e\frac{1}{n!}(\log x)^n dx\leqq\frac{1}{n!}\int_1^e dx=\frac{e-1}{n!}$

$\therefore\ 0\leqq a_n\leqq\dfrac{e-1}{n!}$

(2) $a_n=\displaystyle\frac{1}{n!}\int_1^e(x)'(\log x)^n dx$

$=\displaystyle\frac{1}{n!}\left\{\Big[x(\log x)^n\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$

$=\displaystyle\frac{e}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\int_1^e(\log x)^{n-1}dx$

$\therefore\ a_n=\dfrac{e}{n!}-a_{n-1}$

(3) $a_1=\displaystyle\int_1^e\log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e=1$．また，(2)より

$\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{e}(a_{n-1}+a_n)$

であるから

$S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(a_{k-1}+a_k)$

$=\dfrac{1}{e}\{a_1+a_2-(a_2+a_3)+(a_3+a_4)-\cdots+(-1)^n(a_{n-1}+a_n)\}$

$=\dfrac{1}{e}\{a_1+(-1)^na_n\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}+(-1)^n\dfrac{a_n}{e}}$

(1)より，$a_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

80 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$e^{-x} \leqq e^{-\sin x} \leqq e^{-\frac{2}{\pi}x}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}dx = 1-\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 1-\frac{1}{e}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

ゆえに

$$1-\frac{1}{e} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx \leqq \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

81 b を変数とみて，$\displaystyle g(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx$ $(a \leqq t \leqq b)$ とおく．

$$g'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx \qquad \cdots\cdots(*)$$

$f(t)$ が微分可能という条件がないので $g''(t)$ は考えられない．そこで

$$g'(t)=\frac{1}{2}\int_a^t f(t)dx-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^t (f(t)-f(x))dx$$

⬅ x の積分に関して，$f(t)$ は定数とみなせるから，$\displaystyle\int_a^t f(t)dx=(t-a)f(t)$

とすると，$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で増加するから，
$a \leqq x \leqq t$ より $f(t) \geqq f(x)$．したがって，$g'(t) \geqq 0$．
すなわち，$g(t)$ は単調増加で $g(a)=0$ であるから，

$$g(t) \geqq 0 \ (a \leqq t \leqq b) \qquad \therefore \ g(b)=\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \geqq 0$$

注 標問 **87** の「積分に関する平均値の定理」を用いてもよい．
$\displaystyle\int_a^t f(x)dx=(t-a)f(c)$，$a<c<t$ を満たす c が存在するから，$f(c) \leqq f(t)$ に注意すると，(*) より $g'(t)=\dfrac{t-a}{2}\{f(t)-f(c)\} \geqq 0$．以下同様である．

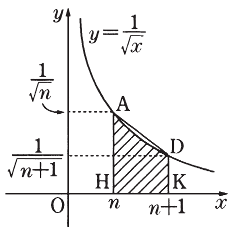
82-1 (斜線部分)<(台形 AHKD) より

$$\int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

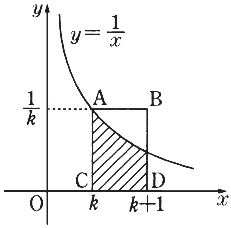
上式を $n=1, 2, \cdots, 99$ に対して辺々加えると

$$\int_1^{100}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

ゆえに $\displaystyle S > \int_1^{100}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{100}}=18+\frac{11}{20}$ となり，
③の左側が改良される．



82-2 (長方形 ABDC)>(斜線部分) より



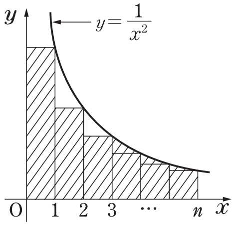
$\dfrac{1}{k}>\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$. 両辺を $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1)$$

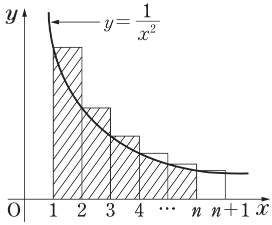
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ ゆえ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

83 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ とおく．n が十分大きいとき，図 1 より

（図 1）



（図 2）



$$S_n<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\int_3^n\frac{1}{x^2}dx$$ ⬅ 斜線部分の面積

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\left[-\frac{1}{x}\right]_3^n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{61}{36}$$

また，図 2 より

$$S_n>\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\int_4^n\frac{1}{x^2}dx$$ ⬅ 斜線部分の面積

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\right)=\frac{29}{18}-\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{29}{18}-\frac{1}{n}<S_n<\frac{61}{36}\qquad\cdots\cdots①$$

①の各辺の差は有限であるから，$n\to\infty$ として ⬅ 誤差 $\to 0$ $(n\to\infty)$ とはならない

$$\frac{29}{18}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{61}{36}$$

$\dfrac{29}{18}=1.6\dot{1}$，$\dfrac{61}{36}=1.69\dot{4}$ ゆえ $1.6<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1.7$

注! 18 世紀数学界の巨人オイラーは，1735 年に

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

であることを発見して大変喜んだそうです．右辺の和に円周率が現れるのはとても不思議です．

84 (1)　$a \leqq 0$ のとき，$F(a)=\int_0^1 e^x(x-a)dx=(1-e)a+1$

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$F(a)=-\int_0^a e^x(x-a)dx+\int_a^1 e^x(x-a)dx$

$=2e^a-(e+1)a-1$

$a \geqq 1$ のとき，$F(a)=-\int_0^1 e^x(x-a)dx=(e-1)a-1$

$F(a)$ は $a \leqq 0$ で減少し，$a \geqq 1$ で増加するから，$0 \leqq a \leqq 1$ で考えれば十分.

$F'(a)=2e^a-(e+1)$ より，$F'(a)$ の符号は $a=\log\dfrac{e+1}{2}$ の前後で負→正と変化するから，最小値は，

$$F\left(\log\frac{e+1}{2}\right)=\boldsymbol{e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}}$$

注　答が標問 **84** と一致したのは偶然ではない．標問 **84** で x を a とおくと

$$f(a)=\int_1^e|\log t-a|dt$$

次に $\log t=x$ とおくと，$t=e^x$ より，$dt=e^x dx$ であるから

$$f(a)=\int_0^1|x-a|e^x dx$$

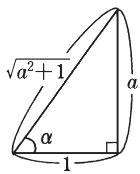
したがって，実は $f(a)=F(a)$ である.

(2)　$a\cos\alpha=\sin\alpha$，すなわち $\tan\alpha=a$ を満たす α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ1つ存在するから

$$g(a)=\int_0^\alpha(a\cos x-\sin x)dx-\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x-\sin x)dx$$

$$=2(a\sin\alpha+\cos\alpha)-1-a \quad \cdots\cdots①$$

$$=2\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}-a-1=2\sqrt{a^2+1}-a-1$$



$$\therefore\quad g'(a)=\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}-1=\frac{3a^2-1}{\sqrt{a^2+1}\,(2a+\sqrt{a^2+1}\,)}$$

$a>0$ において，$g'(a)$ の符号は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の前後で負→正と変化するから，最小値は

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{\frac{1}{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$

注　①の後，変数を α にそろえてもよい．

$g(a)=2(a\sin\alpha+\cos\alpha)-1-a$

$\quad=2(\tan\alpha\sin\alpha+\cos\alpha)-1-\tan\alpha$　$(=G(\alpha)$ とおく$)$

$$G'(\alpha)=2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\sin\alpha+\tan\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\right)-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}$$

ゆえに，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，つまり $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で $G(\alpha)$，したがって $g(a)$ は最小となる.

85 $F'(a)=e^{(a+1)^3-7(a+1)}-e^{a^3-7a}$ の符号は，e^x が単調増加であるから

$$(a+1)^3-7(a+1)-(a^3-7a)$$
$$=3(a+2)(a-1)$$

の符号と一致する．ゆえに，$F(a)$ が極大となるのは $a=\mathbf{-2}$ のときである．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(a)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

86 被積分関数を奇関数と偶関数に分ける．

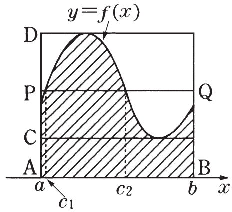
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x-ax)+(\cos x-b)\}^2dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x-ax)^2+(\cos x-b)^2\}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2x^2+b^2-2ax\sin x-2b\cos x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{a^2}{3}x^3+b^2x+2a(x\cos x-\sin x)-2b\sin x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\pi^3}{12}a^2-4a\right)+(\pi b^2-4b)+\pi$$
$$=\frac{\pi^3}{12}\left(a-\frac{24}{\pi^3}\right)^2+\pi\left(b-\frac{2}{\pi}\right)^2-\left(\frac{48}{\pi^3}+\frac{4}{\pi}\right)+\pi$$

$\therefore\quad a=\boldsymbol{\dfrac{24}{\pi^3}},\qquad b=\boldsymbol{\dfrac{2}{\pi}}$

87-1 $a<b$，$f(x)>0$ として説明する．

$\int_a^b f(x)\,dx$ は斜線部分の面積 S を表す．長方形 ABQP の面積 T はPがCからDまで動くとき，連続的に増加し，P=C のとき，$T<S$；P=D のとき，$T>S$ であるから，$T=S$ なる点PがCとDの間に存在する．このとき，線分 PQ と連続関数 $y=f(x)$ のグラフは必ず共有点をもつから（複数のこともある），その x 座標を c とすれば，

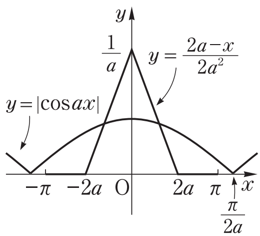
$$\int_a^b f(x)\,dx=S=T=(b-a)f(c),\qquad a<c<b$$



87-2 $0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$2a<\pi<\dfrac{\pi}{2a}$ であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_a(x)|\cos ax|\,dx=2\int_0^{\pi}f_a(x)|\cos ax|\,dx$$
$$=2\int_0^{2a}\frac{2a-x}{2a^2}\cos ax\,dx=\frac{1-\cos 2a^2}{a^4}$$
$$=2\frac{\sin^2 a^2}{a^4}=2\left(\frac{\sin a^2}{a^2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \lim_{a\to0}\int_{-\pi}^{\pi}f_a(x)|\cos ax|\,dx=2\lim_{a\to0}\left(\frac{\sin a^2}{a^2}\right)^2=\mathbf{2}$$



88-1 研究 から

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^2|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

と予想される．

$nx=t$ とおくと

$$I_n=\int_0^{\pi}x^2|\sin nx|dx=\int_0^{n\pi}\left(\frac{t}{n}\right)^2|\sin t|\frac{dt}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\int_0^{n\pi}t^2|\sin t|dt=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t^2|\sin t|dt$$

次に，$t-k\pi=u$ とおくと $\sin(u+k\pi)=(-1)^k\sin u$ であるから

$$I_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)^2|\sin(u+k\pi)|du$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k^2\pi^2+2\pi ku+u^2)\sin u\,du$$

$\int_0^{\pi}\sin u\,du=2$ であるから，$\int_0^{\pi}u\sin u\,du=a$，$\int_0^{\pi}u^2\sin u\,du=b$ とおくと

$$I_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(2\pi^2k^2+2\pi ak+b)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left\{2\pi^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+2\pi a\frac{n(n-1)}{2}+bn\right\}$$

中括弧の中の各項は，n に関して順に 3 次，2 次，1 次であるから

$$\lim_{n\to\infty}I_n=2\pi^2\cdot\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{2\pi^2}{3}}$$

88-2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\int_{\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\right)$$

⬅ $x=nt$ とおく

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{1}{t}|\sin nt|dt\right)$$

と変形できる．しかし，$\frac{\pi}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ であり，$t=0$ で $\frac{1}{t}$ は定義できないから，研究 の結果を使って予想することはできない．もっと精密な議論 (本問の(1)，(2)) が必要である．

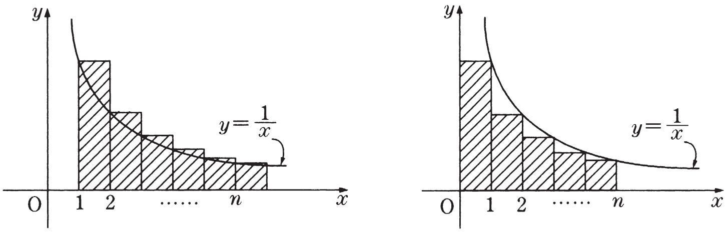
(1) $I_{k+1}-I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}dx=\frac{2}{(k+1)\pi}$

同様に

$$I_{k+1}-I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\leqq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}dx=\frac{2}{k\pi}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{(k+1)\pi}\leqq I_{k+1}-I_k\leqq\frac{2}{k\pi}$$

(2)



$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を図の斜線部分とみると

$$\int_1^n\frac{dx}{x}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\int_1^n\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\quad \log n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\log n$$

(3) (1)の不等式を $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ について加えると，$I_1=0$ ゆえ

$$\frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)\leqq I_n\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

したがって，(2)より

$$\frac{2}{\pi}(\log n-1)\leqq I_n\leqq\frac{2}{\pi}(\log n+1)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{\log n}\right)\leqq\frac{I_n}{\log n}\leqq\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\log n}=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

89-1 $g(x)=\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt+\frac{e^x}{e-2}\int_0^1 f(t)\,dt$ となるので

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=a\qquad\cdots\cdots①$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt=b\qquad\cdots\cdots②$$

とおくと

$$g(x)=a+\frac{be^x}{e-2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\cos\pi x+\int_0^x\left(a+\frac{be^t}{e-2}\right)dt=\cos\pi x+ax+\frac{b(e^x-1)}{e-2}\qquad\cdots\cdots③$$

③を①，②に代入すると

$$\begin{cases} a=\displaystyle\int_0^1\left\{t\cos\pi t+at^2+\frac{bt(e^t-1)}{e-2}\right\}dt=-\frac{2}{\pi^2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2(e-2)} \\ b=\displaystyle\int_0^1\left\{\cos\pi t+at+\frac{b(e^t-1)}{e-2}\right\}dt=\frac{a}{2}+b \end{cases}$$

$$\therefore\quad a=0,\qquad b=\frac{4(e-2)}{\pi^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=\cos\pi x+\frac{4}{\pi^2}(e^x-1)}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{4}{\pi^2}e^x}$$

89-2　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\sin t\,dt=a_n$ とおくと

$$f_n(x)=\cos x+\frac{1}{4}a_{n-1}x$$

したがって

$$a_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t+\frac{1}{4}a_{n-1}t\right)\sin t\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a_{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(a_0-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad f_n(x)=\boldsymbol{\cos x+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)x}$$

90　(1)　右辺の積分で $x-t=u$ とおくと

$$f(x)=\sin x+\int_x^0 f(u)\sin(x-u)(-du)=\sin x+\int_0^x f(u)\sin(x-u)\,du$$

$$=\sin x+\int_0^x f(u)(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,du$$

$$=\sin x+\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du \quad \cdots\cdots①$$

$$f'(x)=\cos x+\left(\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+f(x)\sin x\cos x\right)$$

$$+\left(\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du-f(x)\sin x\cos x\right)$$

$$=\cos x+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du$$

$$\therefore\quad f(0)=\boldsymbol{0},\qquad f'(0)=\boldsymbol{1}$$

(2)　$\displaystyle f''(x)=-\sin x-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du+f(x)$ ……②

①＋② より

$$f(x)+f''(x)=f(x)$$

$$\therefore\quad f''(x)=\boldsymbol{0}$$

(3)　(2)より，$f'(x)=a$

$$\therefore\quad f(x)=ax+b$$

(1)より，$a=1$，$b=0$

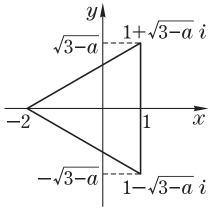
$$\therefore\quad f(x)=\boldsymbol{x}$$

第4章

91-1 $x^3+8-a(x+2)=0$ より

$$(x+2)(x^2-2x-a+4)=0$$

$\therefore\quad x=-2,\ 1\pm\sqrt{a-3}$



$a<3$ であることが必要で，このとき三角形は右図のようになるから，その面積が 6 となるのは

$3\sqrt{3-a}=6\quad\therefore\quad a=\mathbf{-1}$

91-2 注 任意の実数 $x(\neq 0)$ について $x^2>0$ であるから，実数の大小関係を複素数の範囲まで拡張しようとすると，任意の複素数 $z(\neq 0)$ について $z^2>0$ となることが要請される．ところが，$i^2=-1$ であるからこれは不可能である．したがって，複素数に対する不等式があるとき，**その対象は必ず実数**でなければならない．

$k=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと，与えられた不等式は $1\leqq k\leqq 4$.

$$k=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

は実数であるから

$$y-\frac{y}{x^2+y^2}=0\quad\therefore\quad y(x^2+y^2-1)=0$$

$\therefore\quad y=0$ または $x^2+y^2=1$

(i) $y=0$ のとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ であるから，$1\leqq x+\dfrac{1}{x}\leqq 4$

$x>0$ ゆえ，$x\leqq x^2+1\leqq 4x$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ ゆえ，左側の不等式はつねに成立する．右側は

$$x^2-4x+1\leqq 0\quad\therefore\quad 2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$$

ゆえに，$z=x+yi$ の存在範囲は

$$y=0,\ 2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$$

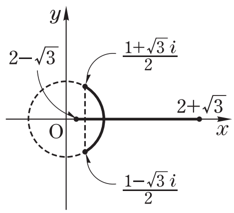
(ii) $x^2+y^2=1$ のとき，$k=2x$ であるから，$1\leqq 2x\leqq 4$

$\therefore\quad \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$

ゆえに，$z=x+yi$ の存在範囲は

$$x^2+y^2=1,\ \frac{1}{2}\leqq x\leqq 2$$

(i), (ii)より，z の存在範囲は右図.



92-1 $x^2-2px+q=0\quad\cdots\cdots①$ の判別式 <0 より

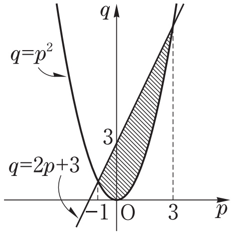
$$p^2-q<0\quad\therefore\quad q>p^2\quad\cdots\cdots②$$

このとき，①の 2 解は z, $\overline{z}$ となるので，解と係数の関係より

$$z+\overline{z}=2p,\ z\overline{z}=q$$

$|z-1|<2$ より $|z-1|^2<4$ であるから

$$(z-1)(\overline{z}-1)<4$$
$$z\overline{z}-(z+\overline{z})+1<4$$
$$q-2p+1<4$$
$$\therefore\quad q<2p+3 \quad \cdots\cdots③$$



②，③を同時に満たす$(p,\ q)$の存在範囲は図の斜線部分で境界は含まない．

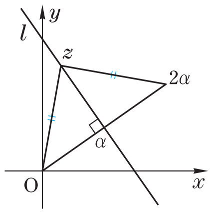
注 ②のもとで①を解くのもよい方法である．

$$x=p\pm\sqrt{p^2-q}=p\pm\sqrt{q-p^2}\,i$$

したがって

$$|z-1|^2=|p-1\pm\sqrt{q-p^2}\,i|^2$$
$$=(p-1)^2+q-p^2=q-2p+1<4$$
$$\therefore\quad q<2p+3$$

92-2 l は原点と 2α を結ぶ線分の垂直 2 等分線であるから，l 上の点 z は原点と 2α から等距離にある．



$$\therefore\quad |z|=|z-2\alpha|$$

両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}=(z-2\alpha)(\overline{z}-2\overline{\alpha})$$
$$=z\overline{z}-2\overline{\alpha}z-2\alpha\overline{z}+4|\alpha|^2$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

別解 $z\neq\alpha$ のとき $\angle \mathrm{O}\alpha z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\dfrac{z-\alpha}{\alpha}$ は純虚数．よって

$$\frac{z-\alpha}{\alpha}+\overline{\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)}=\frac{z-\alpha}{\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}}=0$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}(z-\alpha)+\alpha(\overline{z}-\overline{\alpha})=0$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

← $z=\alpha$ はこれを満たす．以後，この議論はしない

あるいは $\triangle\mathrm{O}\alpha z$ に三平方の定理を適用してもよい．

$$|z|^2=|z-\alpha|^2+|\alpha|^2$$

より

$$|z|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})+|\alpha|^2$$
$$=|z|^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+2|\alpha|^2$$
$$\therefore\quad \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2|\alpha|^2$$

93 $|\beta|\cdot|\alpha-\gamma|+|\alpha|\cdot|\gamma-\beta|$

$$=|\beta(\alpha-\gamma)|+|\alpha(\gamma-\beta)|$$
$$\geqq|\beta(\alpha-\gamma)+\alpha(\gamma-\beta)|$$
$$=|\gamma(\alpha-\beta)|$$
$$=|\gamma|\cdot|\alpha-\beta|$$
$$\therefore\quad |\alpha-\beta||\gamma|\leqq|\beta||\alpha-\gamma|+|\alpha||\gamma-\beta|$$

← 証明する不等式の不等号の向きを見て三角不等式を適用す

注 等号の成立条件を標問 **94**, 研究 を用いて調べる.

標問 **93**, (1)より, 等号はある正数 k に対して

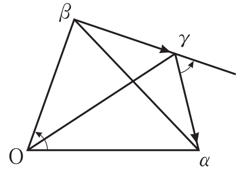
$$\beta(\alpha-\gamma)=k\alpha(\gamma-\beta)$$

となるとき成立する. これから

$$\frac{\beta}{\alpha}=k\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\gamma}$$

$$\therefore\quad \arg\beta-\arg\alpha=\arg(\gamma-\beta)-\arg(\alpha-\gamma)$$

$$\therefore\quad \angle\alpha\mathrm{O}\beta+\angle\beta\gamma\alpha=\pi$$



ゆえに, 等号は四角形が円に内接するとき成立する.

このとき成り立つ等式

$$|\gamma||\alpha-\beta|=|\beta||\alpha-\gamma|+|\alpha||\gamma-\beta|$$

を**トレミーの定理**という.

94-1 とくに $n=3$ とすると $e(\theta)^3=e(3\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}&\cos3\theta+i\sin3\theta\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+i\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\}\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta+i\{3\sin\theta-4\sin^3\theta\}\end{aligned}$$

実部と虚部を比較して, 次の 3 倍角の公式を得る.

$$\cos3\theta=\boldsymbol{4\cos^3\theta-3\cos\theta},\quad \sin3\theta=\boldsymbol{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$

94-2 $n=-m$ (m は正の整数) とおく.

$$|z^n|=|z^{-m}|=\left|\frac{1}{z^m}\right|\underset{(3)}{=}\frac{1}{|z^m|}\underset{(5)}{=}\frac{1}{|z|^m}=|z|^{-m}=|z|^n$$

$$\arg z^n=\arg z^{-m}=\arg\left(\frac{1}{z^m}\right)\underset{(4)}{=}-\arg z^m\underset{(6)}{=}-m\arg z=n\arg z$$

94-3 点 $(x,\ y)$ の表す複素数を $z=x+yi$ とする. z を原点を中心に角 θ だけ回転した点を $w=X+Yi$ とすると

$$\begin{aligned}w&=e(\theta)z=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi)\\&=x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{X=x\cos\theta-y\sin\theta}\\\boldsymbol{Y=x\sin\theta+y\cos\theta}\end{cases}$$

注 これは重要な公式である.

95-1 (1) $z+\dfrac{1}{z}=\cos\theta+i\sin\theta+\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$

$$=\cos\theta+i\sin\theta+(\cos\theta-i\sin\theta)=\boldsymbol{2\cos\theta}$$

(2) (1)より $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ であるから

$$\cos^6\theta=\frac{1}{2^6}\left(z+\frac{1}{z}\right)^6$$

← パスカルの三角形を使って 2 項展開

$$=\frac{1}{64}(z^6+6z^4+15z^2+20+15z^{-2}+6z^{-4}+z^{-6})$$

$$=\frac{1}{64}\{\cos 6\theta+i\sin 6\theta+6(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$$
$$+15(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+20$$
$$+15(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)+6(\cos 4\theta-i\sin 4\theta)$$
$$+(\cos 6\theta-i\sin 6\theta)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{32}\cos 6\theta+\frac{3}{16}\cos 4\theta+\frac{15}{32}\cos 2\theta+\frac{5}{16}}$$

注 $\sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ を使えば，同様にして $\sin^n\theta$ を $\sin k\theta$ の1次式で表すことができる．

95-2 $z^3-3z\bar{z}+4=0$ ……① において，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とおくと

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)-3r^2+4=0$$

$$\therefore\ \begin{cases}\sin 3\theta=0 & \cdots\cdots② \\ r^3\cos 3\theta-3r^2+4=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

②より $\cos 3\theta=\pm 1$ である．

(i) $\cos 3\theta=1$ のとき，$-3\pi<3\theta\leqq 3\pi$ ゆえ，$3\theta=0,\ \pm 2\pi$

$$\therefore\quad \theta=0,\ \pm\frac{2\pi}{3}$$

③より，$r^3-3r^2+4=(r+1)(r-2)^2=0$ $\quad\therefore\quad r=2$

$$\therefore\quad z=2 \text{ または } 2\left\{\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right\}=-1\pm\sqrt{3}\,i \quad (\text{複号同順})$$

(ii) $\cos 3\theta=-1$ のとき，$3\theta=\pm\pi,\ 3\pi$ $\quad\therefore\quad \theta=\pm\dfrac{\pi}{3},\ \pi$

③より，$r^3+3r^2-4=(r-1)(r+2)^2=0$ $\quad\therefore\quad r=1$

$$\therefore\quad z=-1 \text{ または } \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{複号同順})$$

(i)，(ii)より①の解は $\quad\boldsymbol{z=-1,\ 2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

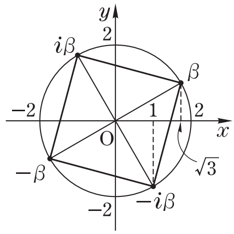
注 ①の左辺は z の多項式ではないから，3個よりも多くの解をもつからといって，標問 **91** 研究 で述べた代数学の基本定理に抵触するわけではない．

96-1 $-8+8\sqrt{3}\,i$ の4乗根の1つを β とすると，方程式は $\left(\dfrac{z}{\beta}\right)^4=1$ となるので

$$\frac{z}{\beta}=\pm 1,\ \pm i \qquad \therefore\quad z=\beta,\ i\beta,\ -\beta,\ -i\beta$$

一方，

$$-8+8\sqrt{3}\,i=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$



であるから，β として

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

がとれる．ゆえに，4つの解は右図の正方形の頂点をなす．そのうち実数部分が最大であるのは

$$\boldsymbol{\sqrt{3}+i}$$

注 $z^n=1$ の解は，$n=2$，3，4，6 の場合には具体的にわかることに注意する．

$z^n=\gamma$ $(\neq 1)$ を解くには本問を真似ればよい．γ の n 乗根の1つ β を求めて，方程式を $\left(\dfrac{z}{\beta}\right)^n=1$ と直すと，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ に対して

$$z=\beta,\ \beta\alpha,\ \beta\alpha^2,\ \cdots,\ \beta\alpha^{n-1}$$

96-2 $z^6+z^3+1=0$ ……① は

$$\begin{cases}(z^3-1)(z^6+z^3+1)=0\\ z^3-1\neq 0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}z^9=1\\ z^3\neq 1\end{cases}$$

と書き直せる．$z^9=1$ の解は

$$z=\cos(40^\circ\times k)+i\sin(40^\circ\times k)\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$$

このうち，$z^3=1$ を満たすのは $k=0$，3，6 の場合であるから，①を満たす z の偏角は次の6個である．

$$\mathbf{40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ,\ 200^\circ,\ 280^\circ,\ 320^\circ}$$

注 ①をいったん z^3 について解くのもよい方法である．

$$z^3=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ \text{ または } \cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$$

これを用いても同じ結果を得る．

97-1 (1) $z^n=1$ より

$$1-z^n=(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=0$$

すなわち，$(1-z)S_1=0$ であるから

$$S_1=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{z\neq 1}\ \textbf{のとき})\\ \boldsymbol{n} & (\boldsymbol{z=1}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(2) $z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ であるから

$$S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}(z^k)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right)=\mathrm{Re}(S_1)$$
$$=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{z\neq 1}\ \textbf{のとき})\\ \boldsymbol{n} & (\boldsymbol{z=1}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(n-1)\theta$

$$=\frac{1+1}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 4\theta}{2}+\cdots+\frac{1+\cos 2(n-1)\theta}{2}$$
$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\{1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2(n-1)\theta\}$$

ここで，$w=z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$，$T=1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}$ とおくと

$$S_3=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(T)$$

一方，$w^n=z^{2n}=1$ であるから，(1)とまったく同様にして

$$T=\begin{cases}0 & (w\neq 1\ \text{のとき})\\ n & (w=1\ \text{のとき})\end{cases}$$

したがって

$$1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2(n-1)\theta$$
$$=\mathrm{Re}(T)=\begin{cases}0 & (w\neq 1\ \text{のとき})\\ n & (w=1\ \text{のとき})\end{cases}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{S_3=\frac{n}{2}\quad (z\neq\pm 1\ \text{のとき}),\quad S_3=n\quad (z=\pm 1\ \text{のとき})}$$

97-2 (1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおく．

← 前問(1)で $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ とした場合であるが，再度解答する

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}=0\quad (\because\ \ z\neq 1,\ z^n=1)$$

(2)　A_0 が x 軸上にのるようにあらかじめ座標軸を回転しておくと，$A_k(z^k)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ としてよい．

$P(\alpha)$ とおくと $|\alpha|=\dfrac{1}{2}$ である．このとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}l_k(P)^2=\sum_{k=0}^{n-1}|z^k-\alpha|^2=\sum_{k=0}^{n-1}(z^k-\alpha)(\overline{z^k}-\overline{\alpha})$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(|z^k|^2-\overline{\alpha}z^k-\alpha\overline{z^k}+|\alpha|^2)$$
$$=n-\overline{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}z^k-\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z^k}+\frac{1}{4}n$$
$$=\frac{5}{4}n-\overline{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}z^k-\alpha\left(\overline{\sum_{k=0}^{n-1}z^k}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{4}n}\quad (\because\ \ (1))$$

これはPの位置に無関係な値である．

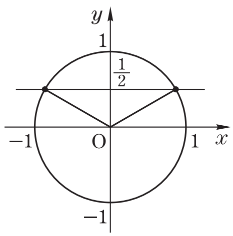
98-1 (1)　$z^n=(z-i)^n$　……①　より　$|\alpha|^n=|\alpha-i|^n$

$\therefore\ \ |\alpha|=|\alpha-i|$

したがって，点 α は2点O，i から等距離にあるので，虚数部分は $\dfrac{1}{2}$ である．

(2)　$|z|=1$ のとき，(1)の結果と合わせると

$$z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\quad\cdots\cdots②$$



であることが必要である．$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を①に代入すると

$$(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^n=\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}^n$$

ド・モアブルの定理を適用して，両辺の偏角を比較すると

$$30^\circ\times n=(-30^\circ)\times n+360^\circ\times k\quad(k\text{ は整数})$$

$\therefore\quad \boldsymbol{n=6k}$

$z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を①に代入すると

$$(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)^n=\{\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)\}^n$$

両辺の偏角を比較すると

$$150^\circ\times n=(-150^\circ)\times n+360^\circ\times l\quad(l\text{ は整数})$$

$\therefore\quad 5n=6l$

したがって，やはり n は 6 の倍数である．

ゆえに，①が絶対値 1 の解をもつための条件は $n=6k$ であり，このとき絶対値 1 の解は②で与えられる．

98-2 $|z|=|w|=1$ ……① より $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$，$w=\dfrac{1}{\overline{w}}$ であるから，これらを

$z^2+w^2=z+w$ ……② に代入すると

$$\overline{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}}=\overline{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}\qquad\therefore\quad \frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$$

$\therefore\quad z^2+w^2=zw(z+w)$ ……③

③−②より

$$(z+w)(zw-1)=0$$

$z+w=0$ とすると，②より $z=w=0$ となり，①に反する．

$\therefore\quad zw=1\qquad\therefore\quad w=\dfrac{1}{z}$ ……④

④を②に代入すると

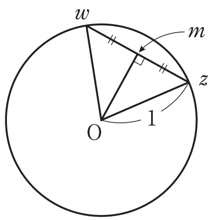
$$z^2+\frac{1}{z^2}=z+\frac{1}{z}\qquad\therefore\quad z^4+1=z^3+z$$

$\therefore\quad (z-1)^2(z^2+z+1)=0$

$\therefore\quad z=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④も考えて

$$(z,\ w)=(\mathbf{1},\ \mathbf{1}),\ \left(\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}},\ \boldsymbol{\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}}\right)\ \textbf{（複号同順）}$$



注 「円周上の 2 点は，それを結ぶ線分が直径でないとき，その線分の中点で定まる」 ……(＊)

ことを用いてもよい．条件より

$$\frac{z^2+w^2}{2}=\frac{z+w}{2}\ (=m\ \text{とおく})$$

(i) $m=0$ のとき，$z^2+w^2=z+w=0$ から w を消去すると $z^2=0$．これは $|z|=1$ に反する．

(ii) $|m|=1$ のとき，$z=w$ であるから，$z^2=z$．$|z|=1$ ゆえ

$\therefore\quad z=1\qquad\therefore\quad (z,\ w)=(1,\ 1)$

(iii) $0<|m|<1$ のとき，(＊)より $(z^2,\ w^2)=(z,\ w)$ または $(w,\ z)$

(ア) $z^2=z$，$w^2=w$ のとき，$|z|=|w|=1$ より，$z=w=1$．

これは $|m|<1$ に反する．

(イ)　$z^2=w$, $w^2=z$ のとき，w を消去すると

$$z^4=z \qquad \therefore \quad (z-1)(z^2+z+1)=0$$

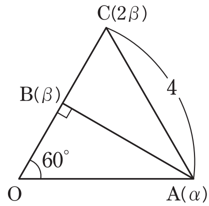
$$\therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

$z=1$ のとき，$w=1$ となり，$|m|<1$ に反する．

$$\therefore \quad (z,\ w)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right) \text{（複号同順）}$$

99-1　$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ より，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$．解くと $\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}\,i$

$$\therefore \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=\left|\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|=|\pm 60^\circ|=\mathbf{60^\circ}$$



よって，$\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$．したがって，C($2\beta$) とすると △OAC は正三角形，かつ $\mathrm{AC}=|\alpha-2\beta|=4$ である．ゆえに

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\sin 60^\circ\right)=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

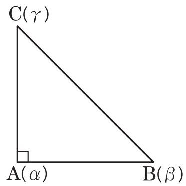
注　C を考えるかわりに，$\alpha=(1\pm\sqrt{3}\,i)\beta$ より

$\alpha-2\beta=(-1\pm\sqrt{3}\,i)\beta$

これと $|\alpha-2\beta|=4$ より $|\beta|=2$ としてもよい．

99-2　(1)　$(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$ より

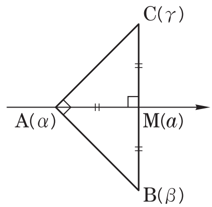
$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1 \qquad \therefore \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boldsymbol{i}$$



このとき，$\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$, $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm 90^\circ$ であるから

△ABC は **∠BAC＝90° の直角二等辺三角形**である．

(2)　$x^3+kx+20=0$　（k は実数）



α, β, γ はすべてが実数ではないから，3 解のうち 1 つが実数，他の 2 つは互いに共役な虚数である（標問 **91**）．

さらに(1)の結果も合わせると，α は実数，$\gamma=\overline{\beta}$ である．そこで，$\beta=a+bi$, $\gamma=a-bi$ とおく．解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+2a=0 & \cdots\cdots① \\ 2a\alpha+a^2+b^2=k & \cdots\cdots② \\ \alpha(a^2+b^2)=-20 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より $a=-\dfrac{\alpha}{2}$，したがって $b=\pm\mathrm{BM}=\pm\mathrm{AM}=\pm\dfrac{3}{2}\alpha$．これらを③に代入．

$$\alpha\cdot\frac{5}{2}\alpha^2=-20 \qquad \therefore \quad \alpha^3=-8 \qquad \therefore \quad \alpha=\mathbf{-2}$$

このとき，$a=1$, $b=\pm 3$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\beta=1\pm 3i,\ \gamma=1\mp 3i} \text{　（複号同順）}$$

これらを②に代入して，$k=2(-2)+(1+9)=\mathbf{6}$

99-3 (1) $|z|=1$ より $z\overline{z}=1$ だから，$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$．したがって

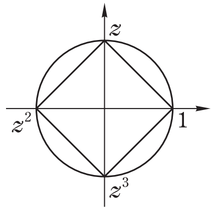
$$\frac{z^3-1}{z^2-z}=\frac{z^2+z+1}{z}=z+\frac{1}{z}+1=(z+\overline{z})+1\ (\text{実数})$$

すなわち，1 と z^3，z と z^2 を結ぶ辺は平行である．ゆえに，Q は 1 と z^3 をとなり合う頂点とする台形である．

(2) (i) 1 と z^2，z と z^3 を結ぶ線分が対角線のとき

$$\frac{z^3-z}{z^2-1}=z\ (\text{純虚数})$$

$|z|=1$，$0<\arg z<\pi$ ゆえ，$z=\boldsymbol{i}$



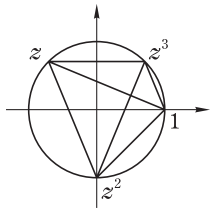
(ii) 1 と z，z^2 と z^3 を結ぶ線分が対角線のとき

$$\frac{z^3-z^2}{z-1}=z^2\ (\text{純虚数})$$

$\arg z^3>2\pi$ より $\dfrac{2\pi}{3}<\arg z<\pi$，したがって

$\dfrac{4\pi}{3}<\arg z^2<2\pi$ であるから，$z^2=-i$

$$\therefore\quad z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\boldsymbol{i}$$

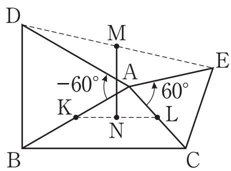


100 A を原点にとり，それぞれの点を表す複素数を小文字で表す．

$$d=\{\cos(-60°)+i\sin(-60°)\}b=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$$

$$e=(\cos 60°+i\sin 60°)c=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c$$

$$\therefore\quad m=\frac{d+e}{2}=\frac{1}{4}(b+c)+\frac{\sqrt{3}\,i}{4}(c-b)$$



一方，$n=\dfrac{k+l}{2}=\dfrac{b+c}{4}$ であるから，$n-m=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{4}(b-c)$

$$\therefore\quad \frac{n-m}{b-c}=\frac{\sqrt{3}\,i}{4}\quad(\text{純虚数})$$

ゆえに，直線 MN と直線 BC とは垂直である．

101 (1) $w=\dfrac{iz}{z-1}$ ……①．w が実数である条件は $w=\overline{w}$ であるから

$$\frac{iz}{z-1}=\overline{\left(\frac{iz}{z-1}\right)}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}-1}$$

$$z(\overline{z}-1)+\overline{z}(z-1)=0$$

$$z\overline{z}-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\overline{z}=0$$

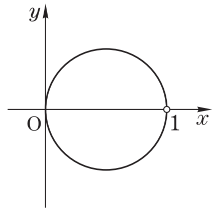
← ここで $z=x+yi$ とおいてもよい

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

← 左辺$=\left|z-\frac{1}{2}\right|^2$

$$\therefore\quad \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

ゆえに，z の全体は右図の円．ただし，①が定義されない点 1 は除く．



(2) $|w|\leqq a$ より

$|z|\leqq a|z-1|$ ……②

← 境界はアポロニウスの円（直線を含む）

となるから，両辺を 2 乗すると

$z\bar{z}-a^2(z-1)(\bar{z}-1)\leqq 0$

$\therefore\quad (a^2-1)z\bar{z}-a^2z-a^2\bar{z}+a^2\geqq 0$

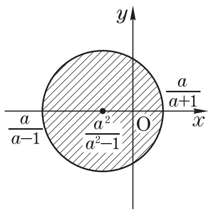
(i) $0<a<1$ のとき，$a^2-1<0$ であるから

$$z\bar{z}-\frac{a^2}{a^2-1}z-\frac{a^2}{a^2-1}\bar{z}+\frac{a^2}{a^2-1}\leqq 0$$

$$\left(z-\frac{a^2}{a^2-1}\right)\left(\bar{z}-\frac{a^2}{a^2-1}\right)\leqq\frac{a^4}{(a^2-1)^2}-\frac{a^2}{a^2-1}$$

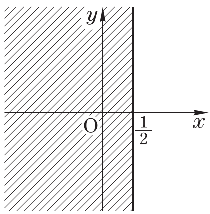
$$=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

$$\therefore\quad \left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right|\leqq\frac{a}{1-a^2}$$



したがって，z の全体は円の内部およびその境界．

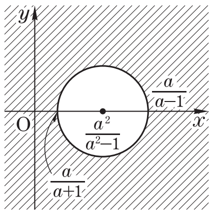
(ii) $a=1$ のとき，②より $|z|\leqq|z-1|$．したがって z の全体は境界を含む左半平面 $x\leqq\dfrac{1}{2}$



(iii) $a>1$ のとき，$a^2-1>0$ であるから，(i)と同様にして

$$\left|z-\frac{a^2}{a^2-1}\right|\geqq\frac{a}{a^2-1}$$

したがって，z の全体は円の外部およびその境界．



注 問題文下の注 の立場からみると，場合分けの生じる理由がよくわかる．①の逆変換

$w=\dfrac{z}{z-i}$ ……③

の分母が 0 となる点 i が，円板 $|z|\leqq a$ の外部にあるか，境界にあるか，あるいは内部にあるかでそれぞれ(i)，(ii)，(iii)に分かれる．**③によって点 i は無限遠点に移されるとみなされ，無限遠点を通る円は直線と考えられる**からである．

また，(1)は次のようにしても解ける．③で $z=t$（実数）とおくと

$$w=x+yi=\frac{t}{t-i}=\frac{t(t+i)}{(t-i)(t+i)}=\frac{t^2+ti}{t^2+1}$$

$$\therefore\quad x=\frac{t^2}{t^2+1},\quad y=\frac{t}{t^2+1}$$

$\dfrac{x}{y}=t$ と $y(t^2+1)=t$ より t を消去すると

$$x^2+y^2=x \qquad \therefore\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

⬅ 厳密には
(ア) $t=0$ のとき
$(x,\ y)=(0,\ 0)$
(イ) $t\neq0$ のとき
$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, $y\neq0$

102 標問 **102** (1)より 2 点 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ と $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は，円 C の直径の両端であり $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ を満たす．したがって，b_n が円 C 上にあるとすると

$$\frac{b_n-\beta}{b_n-\alpha}=ti\quad(t \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

このとき

$$\frac{b_{n+1}-\beta}{b_{n+1}-\alpha}=\frac{1+\dfrac{1}{b_n}-\beta}{1+\dfrac{1}{b_n}-\alpha}=\frac{\dfrac{1}{b_n}+\alpha}{\dfrac{1}{b_n}+\beta}=\frac{1+\alpha b_n}{1+\beta b_n}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{b_n+\dfrac{1}{\alpha}}{b_n+\dfrac{1}{\beta}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{b_n-\beta}{b_n-\alpha}=\frac{\alpha t}{\beta}\cdot i\quad(\text{純虚数})$$

ゆえに，b_{n+1} も円 C 上にある．

注 有理数 p_n, q_n を用いて，$b_n=p_n+q_ni$ と表せる（厳密には数学的帰納法）から，$b_n\neq\alpha$, $b_n\neq\beta$ である．

104 (1) $z=1+\cos t+i\sin t=2\cos^2\dfrac{t}{2}+2i\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$$=2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)\quad\cdots\cdots①$$

$-\pi<t<\pi$ より $2\cos\dfrac{t}{2}>0$ であるから

$$|z|=\boldsymbol{2\cos\frac{t}{2}},\quad \arg z=\boldsymbol{\frac{t}{2}}$$

(2) ①と，ド・モアブルの定理より

$$w=\frac{2i}{z^2}=\frac{2i}{4\cos^2\dfrac{t}{2}}(\cos t-i\sin t)=\frac{1}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}(\sin t+i\cos t)$$

$w=x+yi$ とおくと

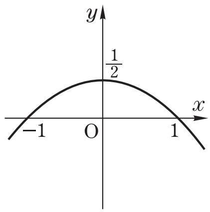
$$x=\frac{\sin t}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}=\frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$$

$$y=\frac{\cos t}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)$$

⬅ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

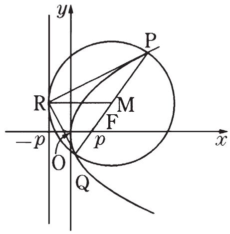
$$=-\frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

$-\pi<t<\pi$ より，$x=\tan\dfrac{t}{2}$ はすべての実数値をとるから，wは②で表される放物線全体を描く．



第5章

105 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha^2}{4p},\ \alpha\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\beta^2}{4p},\ \beta\right)$, $\alpha\beta\neq0$



とおく．直線 PQ の方程式は

$$x=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^2}{4p}-\frac{\beta^2}{4p}\right)(y-\alpha)+\frac{\alpha^2}{4p}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{4p}y-\frac{\alpha\beta}{4p}$$

これが F$(p,\ 0)$ を通るから，$p=-\dfrac{\alpha\beta}{4p}$

$\therefore\ \ \alpha\beta=-4p^2$ ……①

P，Q での接線の方程式は

$$\alpha y=2p\left(x+\frac{\alpha^2}{4p}\right),\ \ \beta y=2p\left(x+\frac{\beta^2}{4p}\right)$$

連立して解くと

$$\mathrm{R}\left(\frac{\alpha\beta}{4p},\ \ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

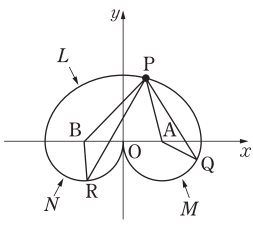
よって，①より

$$\begin{cases} x_{\mathrm{R}}=\dfrac{\alpha\beta}{4p}=-p \\ (\text{P，Q での接線の傾きの積})=\dfrac{2p}{\alpha}\cdot\dfrac{2p}{\beta}=-1 \end{cases}$$

ゆえに，P，Q での接線は準線上で直交する．

(2) (1)より，PQ を直径とする円は点 R を通る．さらに，PQ の中点 (円の中心) を M とすると，$y_{\mathrm{M}}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=y_{\mathrm{R}}$．したがって，RM は準線と垂直だから，PQ を直径とする円は準線と接する．

106-1 M，N の中心をそれぞれ A，B とする．P を固定して，Q，R を動かすと



$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{PA}+\mathrm{AQ}=\mathrm{PA}+1$ ……①

$\mathrm{PR}\leqq\mathrm{PB}+\mathrm{BR}=\mathrm{PB}+1$ ……②

①の等号は PQ が A を通るとき，②の等号は PR が B を通るときに成立する．2 つの等号が成立するとき，①＋②より，

$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}=(\mathrm{PA}+\mathrm{PB})+2$ ……③

L の焦点は $(\pm1,\ 0)$ で A，B と一致するから，L 上の任意の点 P に対して $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=4$ (楕円の定義) である．これを③に代入すると，$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}=6$

ゆえに，(求める最大値)$=$**6**

106-2 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，P での接線の方程式は

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1 \qquad \therefore \quad \mathrm{Q}\left(\frac{a}{\cos\theta},\ 0\right),\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right)$$

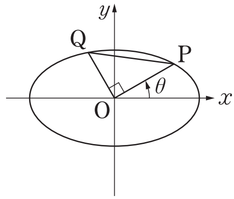
$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{b}{\sin\theta}=\frac{ab}{\sin 2\theta}$$

Sは，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小となり

(最小値)$=\boldsymbol{ab}$

106-3 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(1)　$\mathrm{OP}=r_{\mathrm{P}}$，$\mathrm{OQ}=r_{\mathrm{Q}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸の正方向となす角を θ とすると



Ｐと θ の対応関係が楕円の媒介変数表示と異なる点に注意

$$\mathrm{P}(r_{\mathrm{P}}\cos\theta,\ r_{\mathrm{P}}\sin\theta)$$

Ｐは楕円上にあるから

$$r_{\mathrm{P}}{}^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2} \qquad \cdots\cdots①$$

θ を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ とおき

$$\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2} \qquad \cdots\cdots②$$

①，②より，$\dfrac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}+\dfrac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$　(一定)　$\cdots\cdots③$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{P}}r_{\mathrm{Q}}$ であるから，相加平均と相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{S}=2\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}}\leqq\frac{1}{r_{\mathrm{P}}{}^2}+\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}{}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \quad (\because \ ③)$$

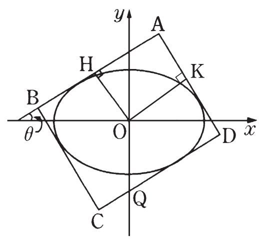
等号は $r_{\mathrm{P}}=r_{\mathrm{Q}}$ のとき成り立つから

⬅ ①，②より $\cos^2\theta=\sin^2\theta$，すなわち $\tan\theta=\pm1$ のとき

$$(S\text{の最小値})=\frac{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$$

107 (1)　直線 AB の方程式は，その傾きが $\tan\theta$ だから

$$y=x\tan\theta\pm\sqrt{2\tan^2\theta+1}$$



原点からこの直線に下ろした垂線の足をＨとすると，点と直線の距離の公式により

$$\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{2\tan^2\theta+1}}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1+\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AD}=2\mathrm{OH}=\boldsymbol{2\sqrt{1+\sin^2\theta}}$$

AD の式で θ を $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ に置きかえて

$$\mathrm{AB}=\boldsymbol{2\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

(2) 長方形Rの面積をSとすると，

$$S=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}=4\sqrt{(1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)}=4\sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=4\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$$

したがって，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$，すなわち

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$ のとき，(Sの最大値)$=\mathbf{6}$

注 (1)より

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{OK}^2=1+\sin^2\theta+(1+\cos^2\theta)=3$$

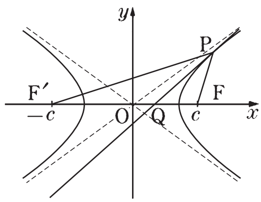
となるから，(1)は実質的に標問 **107** (2)の別解になっている．また，(2)は

$$S=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}\leqq\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AB}^2}{2}=6$$

としてもよい．

108-1 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ b\tan\theta\right)$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

として一般性を失わない．このとき，研究，⑬より



$$\mathrm{PF}=\frac{c-a\cos\theta}{\cos\theta},\quad \mathrm{PF'}=\frac{c+a\cos\theta}{\cos\theta}$$

一方，P での接線は

$$\frac{\dfrac{a}{\cos\theta}x}{a^2}-\frac{b\tan\theta\cdot y}{b^2}=1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a\cos\theta}x-\frac{\tan\theta}{b}y=1$$

よって，$\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ 0)$ となるので

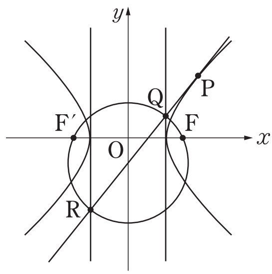
$$\mathrm{QF}=c-a\cos\theta,\quad \mathrm{QF'}=a\cos\theta-(-c)=a\cos\theta+c$$

したがって，$\mathrm{PF}:\mathrm{PF'}=\mathrm{QF}:\mathrm{QF'}$ が成立し，接線は $\angle\mathrm{FPF'}$を 2 等分する．

108-2 $\mathrm{P}(a\alpha,\ b\beta)$ $(\alpha^2-\beta^2=1,\ \beta\neq0)$ における接線

$$\frac{\alpha x}{a}-\frac{\beta y}{b}=1$$

と直線 $x=a$，$x=-a$ との交点は，それぞれ



$$\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{b(\alpha-1)}{\beta}\right)$$
$$\mathrm{R}\left(-a,\ -\frac{b(\alpha+1)}{\beta}\right)$$

よって，Cの焦点 $\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$\mathrm{F'}(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ に対し

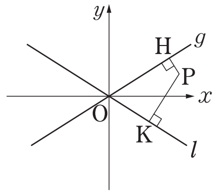
$$\overrightarrow{\mathrm{QF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RF}}=(\sqrt{a^2+b^2}-a)(\sqrt{a^2+b^2}+a)-\frac{b^2(\alpha^2-1)}{\beta^2}$$
$$=b^2-\frac{b^2\beta^2}{\beta^2}=0\qquad(\because\quad \alpha^2-\beta^2=1)$$

同様にして，$\overrightarrow{QF'}\cdot\overrightarrow{RF'}=0$ となるから

$$\angle QFR=\angle QF'R=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに，F，F′ は QR を直径とする円周上にある．

109 g と l のなす角を 2 等分する 2 直線を座標軸にとり，g と l の方程式をそれぞれ



$$g : y=mx, \quad l : y=-mx$$

とおくことができる．ただし，$m>0$ とする．

いま，点 P$(x,\ y)$ から g，l に下ろした垂線の足をそれぞれ H，K とすれば

$$PH=\frac{|mx-y|}{\sqrt{m^2+1}}, \quad PK=\frac{|mx+y|}{\sqrt{m^2+1}}$$

したがって，一定値を $k\,(>0)$ とおくと

$$PH\cdot PK=\frac{|(mx-y)(mx+y)|}{m^2+1}=\frac{|m^2x^2-y^2|}{m^2+1}=k$$

$$\therefore \quad |m^2x^2-y^2|=k(m^2+1)$$

さらに，$k(m^2+1)=a^2$ $(a>0)$ とおけば

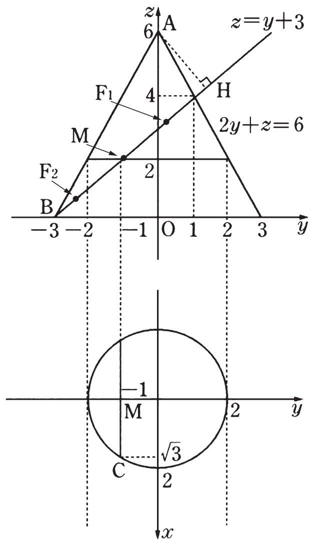
$$|m^2x^2-y^2|=a^2$$

したがって

$$m^2x^2-y^2=a^2 \quad \text{または} \quad m^2x^2-y^2=-a^2$$

これらは，いずれも $y=\pm mx$ を漸近線とする双曲線である．

110 (1) 楕円の中心Mと焦点 F_1，F_2 はいずれも yz 平面上にある．直線 $l : z=y+3$ と $2y+z=6$ の交点は $(1,\ 4)$．Mはこの点と B$(-3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点だから



$$\mathbf{M(0,\ -1,\ 2)}$$

この楕円の長半径を a，短半径を b とすると

$$a=BM=2\sqrt{2}, \quad b=CM=\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad F_1M=F_2M=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$$

ゆえに，焦点の座標は，$\vec{l}=(0,\ 1,\ 1)$ として

$$\overrightarrow{OM}\pm\sqrt{5}\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(0,\ -1,\ 2)\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)$$

$$=\left(\mathbf{0},\ \mathbf{-1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}},\ \mathbf{2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}}\right) \text{（複号同順）}$$

(2) 問題の立体は，Aを頂点とし切り口を底面とする楕円錐である．

$$(\text{底面積})=\pi ab=2\sqrt{6}\,\pi$$

$$(\text{高さ})=AH=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

であるから

$$(\text{体積})=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{6}\,\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}\,\pi}$$

111 (1) $r=2a\cos(\theta-\alpha)$

$\quad=2a(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$

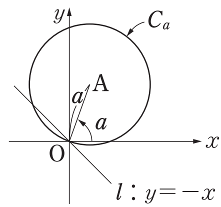
$\Longleftrightarrow\ r^2=2a(r\cos\theta\cos\alpha+r\sin\theta\sin\alpha)$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ であるから

$$x^2+y^2=2a\cos\alpha\cdot x+2a\sin\alpha\cdot y$$

$$\therefore\ (x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2=a^2$$

ゆえに，C_a は A$(\boldsymbol{a\cos\alpha},\ \boldsymbol{a\sin\alpha})$ を中心とする半径 $\boldsymbol{a}$ の円である．



(2) C_a は OA を半径とするから，C_a が直線 $l:y=-x$ に接する条件は，OA⊥l である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が x 軸の正方向となす角を考え

$$\alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+n\pi}$$

$\alpha>0$ より，n は負でない整数である．

112 (1) 第 1 象限の部分の面積を 4 倍する．

$$S=4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta\,d\theta\right)=\Big[2\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{2}$$

(2) $$l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2e^{2\theta}}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\theta}\,d\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\,(e^{\pi}-1)}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2\theta}\,d\theta=\left[\frac{1}{4}e^{2\theta}\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{2\pi}-1}{4}}$$

113 極を原点，始線を x 軸の正方向にとる．

$2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$ より

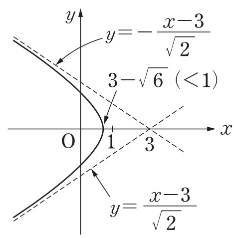
$$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6}\,(1-x)$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}4(x^2+y^2)=6(1-x)^2 & \cdots\cdots① \\ x\leqq 1 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より

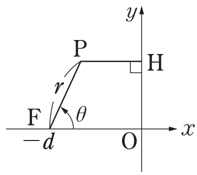
$$(x-3)^2-2y^2=6$$

$$\therefore\ \frac{(x-3)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1 \qquad \cdots\cdots③$$



ゆえに，**極方程式の表す曲線は双曲線③の②の範囲にある部分．**

注 極方程式の分母が，なぜ $2-\sqrt{6}\cos\theta$ ではなくて $2+\sqrt{6}\cos\theta$ なのか，そのわけを説明する．



標問 **113** で，F の座標を $(-d,\ 0)$ $(d>0)$ として y 軸（準線）の左側にとると

$$\overrightarrow{OP}=(-d,\ 0)+(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$
$$=(-d+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$\therefore$ $PH=-x_P=d-r\cos\theta$

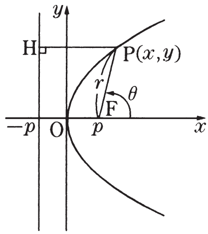
よって，$PF=ePH$ より

$$r=e(d-r\cos\theta)$$

$$\therefore\quad r=\frac{de}{1+e\cos\theta}$$

つまり，“＋”となるのは，焦点と準線の位置が標問 **113** と左右逆になることが原因である．両者の間に本質的な違いはない．

114 (1) 放物線上の点を $P(r,\ \theta)$ とおくと



$$PH=x_P-x_H=(p+r\cos\theta)-(-p)=2p+r\cos\theta$$

$PF=PH$ より，$r=2p+r\cos\theta$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r=\frac{2p}{1-\cos\theta}}$$

(2) Q，R，S の偏角は，それぞれ $\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$，$\theta-\dfrac{\pi}{2}$ としてよいから

$$\frac{1}{FP\cdot FQ}+\frac{1}{FR\cdot FS}=\frac{1-\cos\theta}{2p}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2p}+\frac{1+\sin\theta}{2p}\cdot\frac{1-\sin\theta}{2p}$$
$$=\frac{2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{4p^2}=\frac{1}{4p^2}\quad（一定）$$

注 これも円錐曲線全体の性質である．研究 を真似て証明してみよ．

115 $A+B=a+b$ は明らかであるから，$AB-H^2=ab-h^2$ を示す．

$$AB-H^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\cos2\theta+h\sin2\theta\right)^2$$
$$-\left(h\cos2\theta-\frac{a-b}{2}\sin2\theta\right)^2$$
$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left\{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+h^2\right\}=ab-h^2$$

116 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ ……①

①の両辺は正であるから，2乗して整理すると

$$2\sqrt{xy}=4-(x+y) \quad \cdots\cdots②$$

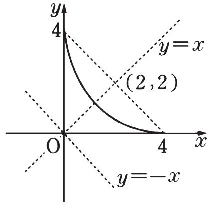
さらに2乗して

$$4xy=16-8(x+y)+(x+y)^2$$

$$\therefore\ (x-y)^2-8(x+y)+16=0 \quad \cdots\cdots③$$

$$①\iff②\iff\begin{cases}③\\ x+y\leqq 4 \quad \cdots\cdots④\end{cases}$$

である．



点 $(x,\ y)$ を原点のまわりに $-45°$ 回転した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots⑤$$

$x-y=-\sqrt{2}\,Y$，$x+y=\sqrt{2}\,X$ を③に代入して

$$2Y^2-8\sqrt{2}\,X+16=0 \qquad \therefore\ Y^2=4\sqrt{2}\,(X-\sqrt{2}\,)$$

これは，焦点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，準線 $X=0$ の放物線である．

したがって，③も放物線であり，⑤により

焦点 $(2,\ 2)$，準線 $x+y=0$

ゆえに，①はこの放物線の④を満たす部分．