数学Ⅱ・B標準問題精講［三訂版］

亀田隆著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

第1章

1-1 (1) 与式を $(x^3)^2-(y^3)^2$ とみると

$$\begin{aligned} &x^6-y^6\\ &=(x^3)^2-(y^3)^2\\ &=(x^3+y^3)(x^3-y^3)\\ &=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)\\ &\qquad\times(x^2+xy+y^2)\\ &=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)}\\ &\qquad\boldsymbol{\times(x^2+xy+y^2)} \end{aligned}$$

別解 与式を $(x^2)^3-(y^2)^3$ とみると

$$\begin{aligned} &x^6-y^6\\ &=(x^2)^3-(y^2)^3\\ &=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)\\ &=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2\}\\ &=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ &\qquad\times(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

(2) $X=x-2z,\ Y=y-2z$ とおくと

$$\begin{aligned} &(x-2z)^3+(y-2z)^3-(x+y-4z)^3\\ &=X^3+Y^3-(X+Y)^3\\ &=(X+Y)\{(X^2-XY+Y^2)\\ &\qquad-(X^2+2XY+Y^2)\}\\ &=-3XY(X+Y)\\ &=\boldsymbol{-3(x-2z)(y-2z)(x+y-4z)} \end{aligned}$$

(3) 公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
を利用する．

$$\begin{aligned} &x^3-27y^3+9xy+1\\ &=x^3+(-3y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-3y)\cdot 1\\ &=(x-3y+1)\\ &\qquad\times(x^2+9y^2+1^2+3xy+3y-x)\\ &=\boldsymbol{(x-3y+1)}\\ &\qquad\boldsymbol{\times(x^2+3xy+9y^2-x+3y+1)} \end{aligned}$$

1-2 $A=a+b+c,\ \ B=a^2+b^2+c^2$, $C=a^3+b^3+c^3$ とおくとき
公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$ より

$$A^2=B+2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca=\frac{A^2-B}{2}$$

さらに公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
より

$$\begin{aligned} C-3abc&=A\left(B-\frac{A^2-B}{2}\right)\\ &=\frac{1}{2}A(3B-A^2) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{abc=\frac{1}{6}A^3-\frac{1}{2}AB+\frac{1}{3}C}$$

2-1 (1) 二項定理より

$$\begin{aligned} &\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5\\ &=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k(2x)^{5-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k\\ &=\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k 2^{5-k}(-1)^k x^{5-2k}\quad\cdots\cdots① \end{aligned}$$

x^3 の項が現れるのは

$$5-2k=3\qquad\therefore\quad k=1$$

のときであり，x^3 の項の係数は

$${}_5\mathrm{C}_1\cdot 2^{5-1}\cdot(-1)^1=-5\cdot 16=\boldsymbol{-80}$$

すべての項の係数の和は，①の右辺において $x=1$ とすればよいから

$$\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k 2^{5-k}(-1)^k=(2-1)^5=\boldsymbol{1}$$

(2) $(a-b)^3(b-c)^4(c-a)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &{}_3\mathrm{C}_l a^{3-l}(-b)^l\times{}_4\mathrm{C}_m b^{4-m}(-c)^m\\ &\qquad\times{}_5\mathrm{C}_n c^{5-n}(-a)^n\\ &={}_3\mathrm{C}_l\cdot{}_4\mathrm{C}_m\cdot{}_5\mathrm{C}_n\cdot(-1)^{l+m+n}\\ &\qquad\times a^{3-l+n}b^{4+l-m}c^{5+m-n} \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{l} l,\ m,\ n \text{ は } 0\leqq l\leqq 3,\ 0\leqq m\leqq 4,\\ 0\leqq n\leqq 5 \text{ をみたす整数}\quad\cdots\cdots(*) \end{array}\right)$

として表すことができる．
a^8b^4 の項が現れるのは

$$\begin{cases} 3-l+n=8\\ 4+l-m=4\\ 5+m-n=0 \end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases} n=l+5\\ m=l \end{cases}$$

(*)に注意すると

$$(l,\ m,\ n)=(0,\ 0,\ 5)$$

よって展開式の a^8b^4 の係数は

$$ {}_3C_0\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_5(-1)^5=\mathbf{-1}$$

a^5b^6c の項が現れるのは

$$\begin{cases}3-l+n=5\\4+l-m=6\\5+m-n=1\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}n=l+2\\m=l-2\end{cases}$$

(*)に注意すると

$$(l,\ m,\ n)=(2,\ 0,\ 4),\ (3,\ 1,\ 5)$$

よって展開式の a^5b^6c の係数は

$$ {}_3C_2\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_4(-1)^6+{}_3C_3\cdot{}_4C_1\cdot{}_5C_5(-1)^9$$
$$=15-4=\mathbf{11}$$

$a^3b^4c^5$ の項が現れるのは

$$\begin{cases}3-l+n=3\\4+l-m=4\\5+m-n=5\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}n=l\\m=l\end{cases}$$

(*)に注意すると

$$(l,\ m,\ n)=(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$$

よって，$a^3b^4c^5$ の係数は

$$ {}_3C_0\cdot{}_4C_0\cdot{}_5C_0(-1)^0+{}_3C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_5C_1(-1)^3+{}_3C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_5C_2(-1)^6+{}_3C_3\cdot{}_4C_3\cdot{}_5C_3(-1)^9$$
$$=1-60+180-40$$
$$=\mathbf{81}$$

2-2 (1)　多項定理より，
$(x+2y+3z)^6$ を展開したときの一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}\cdot x^p\cdot(2y)^q\cdot(3z)^r$$
$$=\frac{6!}{p!q!r!}\cdot 2^q\cdot 3^r\cdot x^py^qz^r$$

ただし $p+q+r=6$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$
x^4y^2 の項が現れるのは，$p=4$，$q=2$，$r=0$ のときで，その係数は

$$\frac{6!}{4!2!0!}\cdot2^2\cdot3^0=15\cdot2^2=\mathbf{60}$$

x^3y^2z の項が現れるのは $p=3$，$q=2$，$r=1$ のときで，その係数は

$$\frac{6!}{3!2!1!}\cdot2^2\cdot3^1=60\cdot2^2\cdot3=\mathbf{720}$$

(2)　$(1+t+\cdots+t^5)(1+t+\cdots+t^5)\times(1+t+\cdots+t^5)$ を展開するとき，第 1，第 2，第 3 因子の中から選ばれる項をそれぞれ t^a，t^b，t^c とすると，得られる単項式は t^{a+b+c} である．ここで，
$0\leqq a,\ b,\ c\leqq5$ である．
$a+b+c=4$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$\{0,\ 0,\ 4\},\ \{0,\ 1,\ 3\},\ \{0,\ 2,\ 2\},\ \{1,\ 1,\ 2\}$$

から作られる順列で

$$3+3!+3+3=15\ (\text{通り})$$

ある．ゆえに，t^4 の係数は **15** である．
同様に，$a+b+c=7$ となる $(a,\ b,\ c)$ は

$$\{0,\ 2,\ 5\},\ \{0,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

から作られる順列で

$$3!+3!+3+3!+3+3=27\ (\text{通り})$$

ある．ゆえに，t^7 の係数は **27** である．

別解　上の解答における t^4 の係数は

$$a+b+c=4,\ 0\leqq a,\ b,\ c\leqq5$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数である．これは 3 種類のものの中から重複を許して 4 個とる取り方の総数 (4 個の球と 2 本の仕切り棒の並べ方の総数) に一致するから

$$ {}_3H_4={}_6C_4=15$$

同様にして，t^7 の係数は

$$a+b+c=7,\ 0\leqq a,\ b,\ c\leqq5$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数である．条件 $0\leqq a,\ b,\ c\leqq5$ を無視すると

$$ {}_3H_7={}_9C_7=36\ (\text{通り})$$

あり，これらから $\{7,\ 0,\ 0\}$，$\{6,\ 1,\ 0\}$ から作られる順列の総数を除けばよいから

$$36-(3+3!)=27$$

3-1　二項定理により

$$(100.1)^7=(10^2+10^{-1})^7$$
$$=(10^2)^7+{}_7C_1(10^2)^6\cdot10^{-1}+{}_7C_2(10^2)^5\cdot10^{-2}$$
$$+{}_7C_3(10^2)^4\cdot10^{-3}+{}_7C_4(10^2)^3\cdot10^{-4}$$

$+{}_7C_5(10^2)^2\cdot 10^{-5}+{}_7C_6\cdot 10^2\cdot 10^{-6}+10^{-7}$
$=10^{14}+7\cdot 10^{11}+21\cdot 10^8+35\cdot 10^5$
$+\underline{35\cdot 10^2+21\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-4}}+10^{-7}$
百の位と小数第 4 位の数字を求めるには，波線部分を加えればよい．
$35\cdot 10^2+21\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-4}$
$=3500+2.1+0.0007$
$=3502.1007$
よって，百の位の数字は **5**，小数第 4 位の数字は **7**

3-2 (1) $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ は p 個の $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ の積であり，展開したときの各項は p 個の因数それぞれから x_1, x_2, …, x_r のうちの 1 個をとりその積をつくることにより得られる．
とくに $x_1{}^{p_1}x_2{}^{p_2}\cdots x_r{}^{p_r}$ は，x_1 を p_1 個，x_2 を p_2 個，…，x_r を p_r 個とった積であるから，とり出した p 個の数の並べ方は同じものを含む順列の数だけある．よって，求める係数は

$$\boldsymbol{\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}}$$

(2) $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$
$-(x_1{}^p+x_2{}^p+\cdots+x_r{}^p)$ …… (*)
を展開したときの単項式 $x_1{}^{p_1}x_2{}^{p_2}\cdots x_r{}^{p_r}$ は，(1)で展開した式から，$x_1{}^p$, $x_2{}^p$, …, $x_r{}^p$ を除いたものであるから

$p_k<p$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ ……①

である．また，単項式の係数

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$$

は整数であり，p は素数であるから，①により $p_k!(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ は p と互いに素である．したがって，この係数は p の倍数であり，(*) は p で割り切れる．
(3) (*)において，$x_k=1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ とすると(2)から

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{r\text{個}})^p-(\underbrace{1^p+1^p+\cdots+1^p}_{r\text{個}})$$
$=r^p-r$
は p で割り切れる．
$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$ であり r は p で割り切れないので，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる．

4-1 二項定理を用いる．
${}_nC_0+3{}_nC_1+3^2{}_nC_2+\cdots+3^n{}_nC_n$
$={}_nC_0\cdot 3^0\cdot 1^n+{}_nC_1\cdot 3^1\cdot 1^{n-1}+{}_nC_2\cdot 3^2\cdot 1^{n-2}$
$+\cdots+{}_nC_n\cdot 3^n\cdot 1^0$
$=(3+1)^n$
$=\boldsymbol{4^n}$

4-2 $\dfrac{{}_nC_k}{k+1}=\dfrac{n!}{(k+1)\cdot(n-k)!k!}$

$$=\frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{{}_{n+1}C_{k+1}}{n+1}$$

であるから，与式は

$$\frac{{}_nC_0}{2}+\frac{{}_nC_1}{2\cdot 2^2}+\frac{{}_nC_2}{3\cdot 2^3}+\frac{{}_nC_3}{4\cdot 2^4}$$
$$+\cdots+\frac{{}_nC_n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{(k+1)\cdot 2^{k+1}}$$

（$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k$ は $a_0+a_1+\cdots+a_n$ を表す）

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+1}C_{k+1}}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\cdot 1^{n-k}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{n+1}-{}_{n+1}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot 1^{n+1}\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right\}}$$

5 $t=x-2$ とおくと
(左辺)$=(t+2)^3+1$
$=t^3+6t^2+12t+9$
(右辺)$=t^3+at^2+bt+c$
係数を比較すると
$\boldsymbol{a=6,\ b=12,\ c=9}$
別解 すべての x について成り立つので，左辺と右辺に
$x=2$ を代入して
$9=c$ ……①

$x=0$ を代入して

$$1=-8+4a-2b+c \quad \cdots\cdots②$$

$x=-1$ を代入して

$$0=-27+9a-3b+c \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③より

$$a=6,\ b=12,\ c=9$$

このとき（右辺）$=x^3+1$ となる．

6 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\ (a\neq 0)$ とおく．

$$(x+1)f(x+1)$$
$$=a(x+1)^{n+1}+b(x+1)^n+\cdots$$
$$=ax^{n+1}+\{a(n+1)+b\}x^n+\cdots$$
$$(x-1)f(x-1)$$
$$=a(x-1)^{n+1}+b(x-1)^n+\cdots$$
$$=ax^{n+1}+\{-a(n+1)+b\}x^n+\cdots$$

2 式の差をとると，n 次の項の係数は

$$\{a(n+1)+b\}-\{-a(n+1)+b\}$$
$$=2a(n+1)$$

$a\neq 0$ より与式の左辺の最高次数は n である．

ゆえに，与式の右辺の最高次の項と比べて

$$2a(n+1)x^n=x^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{n=2},\ a=\frac{1}{6}$$

これより $f(x)=\dfrac{1}{6}x^2+bx+c$ であり

$$(x+1)f(x+1)$$
$$=(x+1)\left\{\frac{1}{6}(x+1)^2+b(x+1)+c\right\}$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+\left(\frac{1}{2}+2b+c\right)x$$
$$+\frac{1}{6}+b+c$$
$$(x-1)f(x-1)$$
$$=(x-1)\left\{\frac{1}{6}(x-1)^2+b(x-1)+c\right\}$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\left(-\frac{1}{2}+b\right)x^2+\left(\frac{1}{2}-2b+c\right)x$$
$$-\frac{1}{6}+b-c$$

ゆえに，

$$(x+1)f(x+1)-(x-1)f(x-1)$$
$$=x^2+4bx+\frac{1}{3}+2c$$

与式の右辺と比べて

$$4b=1,\ \frac{1}{3}+2c=1$$

ゆえに，

$$b=\frac{1}{4},\ c=\frac{1}{3}$$

したがって，

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}$$

このとき，

$$f(0)=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

7-1 (1)

$$\begin{array}{r@{}l}
 & x^3+2x^2+x+3 \\
x^2+4x-1\,\big) & x^5+6x^4+8x^3+5x^2+13x+1 \\
 & x^5+4x^4-\ x^3 \\
\hline
 & 2x^4+9x^3+5x^2 \\
 & 2x^4+8x^3-2x^2 \\
\hline
 & x^3+7x^2+13x \\
 & x^3+4x^2-\ x \\
\hline
 & 3x^2+14x+1 \\
 & 3x^2+12x-3 \\
\hline
 & 2x+4
\end{array}$$

したがって，余りは $\boldsymbol{2x+4}$

(2) $\alpha=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$$

$\alpha+2=\sqrt{5}$ より

$$(\alpha+2)^2=5$$

$$\therefore\quad \alpha^2+4\alpha-1=0$$

(1)より

$$P(\alpha)=(\alpha^2+4\alpha-1)(\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+3)$$
$$+2\alpha+4$$
$$=2\alpha+4=2(\sqrt{5}-2)+4=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

7-2 (1) $P(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=Q(x)f(x)+cx+d$$

であり

$$xP(x)=xQ(x)f(x)+cx^2+dx$$

$$=\{xQ(x)+c\}f(x)$$
$$+(d-ca)x-bc$$

∴ $\boldsymbol{q=d-ca}$, $\boldsymbol{r=-bc}$

(2) (1)において $P(x)=x^{2004}$ とおくと
$$xP(x)=x^{2005}$$
である．条件をみたす a, b が存在するならば
$$c=2,\ d=1,\ d-ca=1,\ -bc=2$$
となり，この式から
$$a=0,\ b=-1$$
このとき，
$$x^{2004}=(x^2-1)Q(x)+2x+1$$
となる．ところが，この両辺に $x=1$ を代入すると
$$1=3$$
となり，矛盾する．
したがって，このような a, b は存在しない．

8-1 商を $Q(x)$ とおくと
$$ax^3+bx^2+7x-2$$
$$=(x^2-3x+2)Q(x)+x-2$$
よって
$$ax^3+bx^2+6x=(x-1)(x-2)Q(x)$$
この等式に $x=1$, 2 を代入すると
$$\begin{cases} a+b+6=0 \\ 8a+4b+12=0 \end{cases}$$
これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=-9}$
また
$$ax^3+bx^2+6x$$
$$=3x^3-9x^2+6x$$
$$=(x^2-3x+2)\cdot 3x$$
したがって，商は　$\boldsymbol{3x}$

8-2 $f(x)=(x-a)(x-2)^2$
$$+(x-b)(x-1)^2+(x-c)x^2$$
とおく．$f(x)$ は x についての 3 次式で，x^3 の係数は 3 である．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ると $2x-3$ が余りであるから
$$f(x)=(3x+d)(x-2)^2+2x-3$$
と表される．
$$f(1)=3+d+2-3=1$$
より　$d=-1$
したがって，
$$f(x)=(3x-1)(x-2)^2+2x-3$$
$$=3x^3-13x^2+18x-7$$
一方
$$f(x)=3x^3-(a+b+c+6)x^2$$
$$+(4a+2b+5)x-4a-b$$
なので，係数を比べて
$$\begin{cases} a+b+c+6=13 \\ 4a+2b+5=18 \\ 4a+b=7 \end{cases}$$
これらを解いて
$$\boldsymbol{a=\frac{1}{4},\ b=6,\ c=\frac{3}{4}}$$

9-1 (1)　$x^3=x^3-1+1$
$$=(x-1)(x^2+x+1)+1$$
より，求める余りは **1**

注 因数定理より，x^3 に $x=1$ を代入し，求める余りを $1^3=1$ としてよいが，(2)，(3)を考えて，ここで割り算を実行しておく．

(2) (1)の x を x^4 に置き換えると
$$x^{12}=(x^4-1)(x^8+x^4+1)+1$$
よって，求める余りは **1**

(3)　$x^{13}=x\cdot x^{12}$
$$=(x^4-1)(x^9+x^5+x)+x$$
よって，求める余りは $\boldsymbol{x}$

9-2 (1)　$n=5m+r$
$(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ のとき
$$x^n=x^{5m+r}=(x^5)^m x^r$$
$X=x^5-1$ とおくと
$$x^n=(X+1)^m x^r$$
$$=\{(X\text{の 1 次以上の整式})+1\}x^r$$
$$=X(X\text{の整式})x^r+x^r$$
$$=(x^5-1)(x\text{ の整式})+x^r$$
よって，$\boldsymbol{r=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ **のとき**
余りはそれぞれ　$\boldsymbol{x^r}$
$\boldsymbol{r=5}$ **のとき**

$x^n=(x^5-1)(x\text{の整式})+x^5$
$=(x^5-1)(x\text{の整式})+(x^5-1)+1$
$=(x^5-1)\{(x\text{の整式})+1\}+1$

よって，余りは　**1**

(2)　(i)　$n=5k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき

$x^n=x^{5k}=(x^5-1)Q_1(x)+1$

とおける．

$x^{2n}=(x^n)^2$
$=(x^5-1)^2\{Q_1(x)\}^2+2(x^5-1)Q_1(x)+1$
$=(x^5-1)Q_2(x)+1$

と x の整式 $Q_2(x)$ を用いて表せる．同様に x の整式 $Q_3(x)$，$Q_4(x)$ を用いて

$x^{3n}=(x^n)^3$
$=(x^5-1)Q_3(x)+1$

$x^{4n}=(x^n)^4$
$=(x^5-1)Q_4(x)+1$

と表せる．このとき

$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$
$=(x^5-1)\{Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x)+Q_4(x)\}+4$

ここで，x^5-1
$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

であるから，求める余りは 4

(ii)　$n=5k+1$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(i)と同様に考えて，x の整式 $R_1(x)$，$R_2(x)$，$R_3(x)$，$R_4(x)$ を用いて

$x^n=(x^5-1)R_1(x)+x$
$x^{2n}=(x^5-1)R_2(x)+x^2$
$x^{3n}=(x^5-1)R_3(x)+x^3$
$x^{4n}=(x^5-1)R_4(x)+x^4$

と表せる．このとき

$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n$
$=(x^5-1)\{R_4(x)+R_3(x)+R_2(x)+R_1(x)\}+\underline{x^4+x^3+x^2+x}$
$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\times\{R_1(x)+R_2(x)+R_3(x)+R_4(x)\}+(x^4+x^3+x^2+x+1)-1$
$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\times(x\text{の整式})-1$

ゆえに，余りは -1

(iii)　$n=5k+2$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(ii)の〰〰の部分は

$x^8+x^6+x^4+x^2$
$=(x^5-1+1)x^3+(x^5-1+1)x+x^4+x^2$
$=(x^5-1)(x^3+x)+x^4+x^3+x^2+x+1-1$
$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x\text{の整式})-1$

ゆえに，余りは -1

(iv)　$n=5k+3$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

(ii)の〰〰の部分は

$x^{12}+x^9+x^6+x^3$
$=(x^5-1+1)^2x^2+(x^5-1+1)x^4+(x^5-1+1)x+x^3$
$=(x^5-1)(x\text{の整式})+x^4+x^3+x^2+x+1-1$
$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x\text{の整式})-1$

ゆえに，余りは -1

(v)　$n=5k+4$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ のとき

同様に，余りは -1

以上より，求める余りは

$n=5k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき　**4**

$n=5k+r$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots : r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のとき　**-1**

10 (1)　与式

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\mathbf{0}$$

(2)　与式

$$=\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-a^2(b-c)+a(b^2-c^2)-bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-\{a^2-a(b+c)+bc\}}{(a-b)(c-a)}$$
$$=\frac{-(a-b)(a-c)}{(a-b)(c-a)}=\mathbf{1}$$

11-1 与えられた等式は

$$\frac{a(x-2)-(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}=\frac{d}{2x^2+bx+c}$$
$$\therefore\quad \frac{(a-2)x-2a-1}{(2x+1)(x-2)}=\frac{d}{2x^2+bx+c}$$

さらに変形し

$\{(a-2)x-2a-1\}(2x^2+bx+c)$
$=d(2x+1)(x-2)$ ……①
①の左辺の x^3 の係数は $2(a-2)$ であり，右辺の x^3 の項はないから，

$$2(a-2)=0 \qquad \therefore \quad a=2$$

このとき，

$$-5(2x^2+bx+c)=d(2x^2-3x-2)$$

係数を比べて

$$\begin{cases} -10=2d \\ -5b=-3d \\ -5c=-2d \end{cases}$$

これらを解いて

$$a=\mathbf{2},\ b=\mathbf{-3},\ c=\mathbf{-2},\ d=\mathbf{-5}$$

11-2 (右辺)

$$=\frac{A(x-2)(x-3)-(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{A(x-2)(x-3)-(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}{x^3-6x^2+11x-6}$$

左辺の分母と右辺の分母が等しいから，
(左辺の分子)＝(右辺の分子) である．

$1=A(x-2)(x-3)-(x-1)(x-3)$
$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ ……①

①は x にどんな値を代入しても成り立つから $x=1$ を代入すると

$$1=2A \qquad \therefore \quad A=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

このとき，確かに等式は成り立つ．

注 ①は $x \neq 1,\ 2,\ 3$ を前提として導かれた等式であるが，$x=1,\ 2,\ 3$ 以外の 3 個の値に対して成立するから，①は x についての恒等式であり，$x=1,\ 2,\ 3$ を代入してもよい．ここでは $x=1$ を代入した．

12-1

$$\frac{x}{3(y+z)}=\frac{y}{3(z+x)}=\frac{z}{3(x+y)}=k$$

とおく．このとき

$$x=3(y+z)k$$
$$y=3(z+x)k$$
$$z=3(x+y)k$$

となる．これらを加えると

$$x+y+z=6(x+y+z)k$$
$$\therefore \quad (6k-1)(x+y+z)=0$$

$\therefore \quad k=\frac{1}{6}$ または $x+y+z=0$

(i) $k=\frac{1}{6}$ となるのは，$\begin{cases} 2x=y+z \\ 2y=z+x \\ 2z=x+y \end{cases}$

より $x=y=z\,(\neq 0)$ のときである．

(ii) $x+y+z=0$ のとき，$y+z=-x$ であるから

$$\frac{x}{3(y+z)}=\frac{x}{3\cdot(-x)}=-\frac{1}{3}$$

同じく

$$\frac{y}{3(z+x)}=\frac{y}{3\cdot(-y)}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{z}{3(x+y)}=\frac{z}{3\cdot(-z)}=-\frac{1}{3}$$

以上より，$k=\mathbf{\frac{1}{6}},\ \mathbf{-\frac{1}{3}}$

12-2 $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$

とおく．このとき

$$b+c=ak$$
$$c+a=bk$$
$$a+b=ck$$

となる．これらを加えると

$$2(a+b+c)=(a+b+c)k$$

$a+b+c \neq 0$ より $\quad k=2$

ゆえに，

$$b+c=2a,\ c+a=2b,\ a+b=2c$$
$$\therefore \quad a=b=c$$

$a=b=c=l\,(\neq 0)$ とおくと

したがって，

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}{abc}$$

$$=\frac{3l\cdot 3l^2-l^3}{l^3}=\mathbf{8}$$

13-1 $x=a^2+9$ のとき

$\sqrt{x+6a}=\sqrt{a^2+6a+9}$
$=\sqrt{(a+3)^2}=|a+3|$
$\sqrt{x-8a+7}=\sqrt{a^2-8a+16}$
$=\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|$
ゆえに，
与式$=|a+3|-|a-4|$
したがって，
$a\leqq -3$ のとき
与式$=-(a+3)-\{-(a-4)\}=\mathbf{-7}$
$-3\leqq a\leqq 4$ のとき
与式$=a+3-\{-(a-4)\}=\mathbf{2a-1}$
$a\geqq 4$ のとき
与式$=a+3-(a-4)=\mathbf{7}$

13-2 $x\leqq 1$ のとき，与えられた不等式は
$-(x-1)-2(x-3)\leqq 11$
$\therefore\ -3x\leqq 4$
$\therefore\ x\geqq -\dfrac{4}{3}$
$x\leqq 1$ とあわせると
$-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq 1$ ……①
$1\leqq x\leqq 3$ のとき，与えられた不等式は
$x-1-2(x-3)\leqq 11$
$\therefore\ -x\leqq 6$
$\therefore\ x\geqq -6$
$1\leqq x\leqq 3$ をみたす x はすべて不等式をみたす．
$\therefore\ 1\leqq x\leqq 3$ ……②
$3\leqq x$ のとき，与えられた不等式は
$x-1+2(x-3)\leqq 11$
$\therefore\ 3x\leqq 18$
$\therefore\ x\leqq 6$
$3\leqq x$ とあわせると
$3\leqq x\leqq 6$ ……③
求める x の範囲は①，②，③をあわせて
$$\mathbf{-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 6}$$

13-3 ② $\Longleftrightarrow$ $a-2<x<a+2$
である．よって，
①をみたすどのような x についても
$a-2<x<a+2$
がみたされる条件は
$a-2\leqq 0$ かつ $1\leqq a+2$
$\therefore\ \mathbf{-1\leqq a\leqq 2}$
また，①をみたすある x について
$a-2<x<a+2$
がみたされる条件は
$\begin{cases} a-2<1 \\ 0<a+2 \end{cases}$
$\therefore\ \mathbf{-2<a<3}$

14-1
$1-\dfrac{ab+1}{a+b}=\dfrac{a+b-ab-1}{a+b}$
$=\dfrac{(1-a)(b-1)}{a+b}$
ここで，$|a|<1<b$ より
$-1<a<1$ かつ $1<b$
$\therefore\ 1-a>0,\ b-1>0$ ……①
$a+b>0$ ……②
①，②より
$\dfrac{(1-a)(b-1)}{a+b}>0$
$\therefore\ 1>\dfrac{ab+1}{a+b}$ ……(＊)
また，$\dfrac{ab+1}{a+b}-(-1)=\dfrac{ab+1+a+b}{a+b}$
$=\dfrac{(a+1)(b+1)}{a+b}$
ここで，$a+1>0,\ b+1>2,\ a+b>0$ より
$\dfrac{(a+1)(b+1)}{a+b}>0$
$\therefore\ -1<\dfrac{ab+1}{a+b}$ ……(＊＊)
(＊)と(＊＊)より
$-1<\dfrac{ab+1}{a+b}<1$

14-2 (1) $a\geqq 0,\ b\geqq 0$ より
$\dfrac{a}{1+a}\geqq\dfrac{a}{1+a+b}$ かつ
$\dfrac{b}{1+b}\geqq\dfrac{b}{1+a+b}$

辺々加えると
$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqq\frac{a+b}{1+a+b}$$
(2) $a+b\geqq c$ を仮定して，(1)から
$$\frac{a+b}{1+a+b}\geqq\frac{c}{1+c}$$ を証明すればよい．
$$\frac{a+b}{1+a+b}-\frac{c}{1+c}$$
$$=\frac{a+b+ac+bc-c-ac-bc}{(1+a+b)(1+c)}$$
$$=\frac{a+b-c}{(1+a+b)(1+c)}\geqq 0$$
$(\because\ a+b\geqq c)$

ゆえに，
$$\frac{a+b}{1+a+b}\geqq\frac{c}{1+c}$$
したがって，
$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqq\frac{c}{1+c}$$

15-1 $\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$
$$=x^2+\frac{36}{x^2}+13$$
$x^2>0$，$\dfrac{36}{x^2}>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係から
$$x^2+\frac{36}{x^2}+13\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{36}{x^2}}+13$$
$$=12+13=25$$
等号成立は
$$x^2=\frac{36}{x^2}$$
から，$x=\sqrt{6}$ $(\because\ x>0)$ のときである．

よって，$x=\sqrt{6}$ のとき**最小値 25** をとる．

15-2

右の計算から

商：$\boldsymbol{x^2+2}$，

余り：**4**

である．

$$\begin{array}{r} x^2+2 \\ x^2+1\,\overline{)\,x^4+3x^2+6} \\ \underline{x^4+\ \ x^2} \\ 2x^2+6 \\ \underline{2x^2+2} \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$$
$$=x^2+2+\frac{4}{x^2+1}=1+(x^2+1)+\frac{4}{x^2+1}$$
ここで x が実数全体を動くとき
$$x^2+1>0,\quad \frac{4}{x^2+1}>0$$
よって，
$$1+(x^2+1)+\frac{4}{x^2+1}$$
$$\geqq 1+2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}$$
$$=1+4=5$$
等号成立は，
$$x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$$
$\therefore\ x^2+1=2$ $(\because\ x^2+1>0)$

すなわち，$x=\pm1$ のときである．

以上より，$x=\pm1$ のとき**最小値 5** をとる．

16 (1) $a>0$，$b>0$ が $abh=k^3$ (h，k は定数) をみたしながら動くときの $a^2+b^2+h^2$ の最小値を求める．

$a^2>0$，$b^2>0$ より，
$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\ (\because\ ab>0)$$
ここで $ab=\dfrac{k^3}{h}$ であるから，
$$a^2+b^2+h^2\geqq\frac{2k^3}{h}+h^2$$
であり，等号は，$a^2=b^2$ すなわち，$a=b$ のとき成立する．

以上より

$a=b$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{2k^3}{h}+h^2}$ をとる．

(2) $a>0$，$b>0$，$h>0$ が $abh=k^3$ (k は定数) をみたしながら動くときの $a^2+b^2+h^2$ の最小値を求める．
$$a^2+b^2+h^2\geqq 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2h^2}$$
$$=3\cdot\sqrt[3]{(abh)^2}$$
$$=3\cdot\{(k^3)^2\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=3k^2$$
等号成立は $a^2=b^2=h^2$

すなわち，$a=b=h$ のときである．

以上より $a=b=h$ のとき，対角線の長さは最小となり，このとき直方体は立方体である．

17-1 コーシー・シュワルツの不等式

$$(A^2+B^2+C^2)(X^2+Y^2+Z^2)$$
$$\geqq (AX+BY+CZ)^2$$

において，

$$A=\sqrt{a},\ B=\sqrt{b},\ C=\sqrt{c},$$
$$X=\frac{p}{\sqrt{a}},\ Y=\frac{q}{\sqrt{b}},\ Z=\frac{r}{\sqrt{c}}$$

とおくと，

$$(a+b+c)\left(\frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}\right)\geqq (p+q+r)^2$$

が成立する．

参考 等号の成立条件を確認しておこう．

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c}$$
$$=\frac{p}{\sqrt{a}}:\frac{q}{\sqrt{b}}:\frac{r}{\sqrt{c}}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a}:\sqrt{b}=\dfrac{p}{\sqrt{a}}:\dfrac{q}{\sqrt{b}}\\[2mm] \sqrt{b}:\sqrt{c}=\dfrac{q}{\sqrt{b}}:\dfrac{r}{\sqrt{c}}\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\dfrac{b}{a}}p=\sqrt{\dfrac{a}{b}}q\\[2mm] \sqrt{\dfrac{c}{b}}q=\sqrt{\dfrac{b}{c}}r\end{cases}\Longleftrightarrow \begin{cases}aq=bp\\ br=cq\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}a:b=p:q\\ b:c=q:r\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow a:b:c=p:q:r$$

17-2 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x})+\sqrt{y}$

である．

よって，コーシー・シュワルツの不等式から

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2$$
$$\leqq\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y)$$
$$=\frac{3}{2}(2x+y)\qquad\cdots\cdots(*)$$

等号は，$\sqrt{2x}:\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}:1$

すなわち，$y=4x$ のとき成立する．

ここで，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$，$2x+y>0$，$(*)$ より

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}$$

等号は $y=4x$ のとき成立する．

したがって，すべての正の実数 x，y に対し $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k$ が成り立つような実数 k は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq k$$

であり，k の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$ となる．

18 $\dfrac{a^3}{x^2}+\dfrac{b^3}{y^2}=x\cdot\dfrac{a^3}{x^3}+y\cdot\dfrac{b^3}{y^3}$

$$=x\left(\frac{a}{x}\right)^3+y\left(\frac{b}{y}\right)^3\qquad\cdots\cdots(*)$$

と変形できる．また，関数 $f(t)=t^3$ のグラフは $t>0$ において下に凸である．

よって，

$$(*)\geqq\left(x\cdot\frac{a}{x}+y\cdot\frac{b}{y}\right)^3$$
$$=(a+b)^3$$

となり成立する．

第2章

19-1 $(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i-1$
$=2-2\sqrt{3}i$
より，与式は
$2-2\sqrt{3}i+a(\sqrt{3}+i)-b=0$
よって，
$(2+a\sqrt{3}-b)+(a-2\sqrt{3})i=0$
と変形できる．
ここで a，b は実数であるから，
$2+a\sqrt{3}-b=0$ かつ $a-2\sqrt{3}=0$
よって，$a=\mathbf{2\sqrt{3}}$，$b=\mathbf{8}$

19-2 (1)
$$与式=\frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}-\frac{(1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$
$$=\frac{1+3i}{10}-\frac{2-4i}{10}$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i}$$
(2) $(\sqrt{3}+2i)^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\cdot 2i$
$+3\cdot\sqrt{3}\cdot(2i)^2+(2i)^3$
$=3\sqrt{3}+18i-12\sqrt{3}-8i$
$=\mathbf{-9\sqrt{3}+10i}$

20-1
$$z+\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{-2}{2}=\mathbf{-1}$$
$$z\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\mathbf{1}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}+z}{z\overline{z}}=\frac{-1}{1}=\mathbf{-1}$$

20-2 $\alpha=x+yi$（x，y は実数かつ $y\neq 0$）とする．
$\overline{\alpha}=x-yi$
$\alpha^2=x^2-y^2+2xyi$
であるから，$\overline{\alpha}=\alpha^2$ より
$x=x^2-y^2$ かつ $-y=2xy$
$y\neq 0$ より，$x=-\frac{1}{2}$
よって，$y^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$
ゆえに，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
以上より，$\alpha=\mathbf{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

21-1 $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ より
$2\omega+1=-\sqrt{3}i$
両辺 2 乗して，
$4\omega^2+4\omega+1=-3$
よって，$\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$ ……(*)
(*) の両辺に $\omega-1$ をかけると，
$\omega^3-1=0$
$\therefore\ \omega^3=\mathbf{1}$
$\omega^{77}+\omega^{88}+\omega^{99}$
$=\omega^{3\times 25+2}+\omega^{3\times 29+1}+\omega^{3\times 33}$
$=\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$

21-2 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\omega$ とおくと，
$\overline{\omega}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
よって，ω，$\overline{\omega}$ は，
$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$，$\overline{\omega}^2=\omega$，$\omega^2+\omega+1=0$
をみたす．
(与式の左辺)$=\{(\overline{\omega})^{3\times 7+2}+\omega^{3\times 7+2}\}^3$
$=\{(\overline{\omega})^2+\omega^2\}^3$
$=\{\omega+\omega^2\}^3=(-1)^3=\mathbf{-1}$

21-3 w は $z^3+1=0$ の虚数解の 1 つであるから，次の式をみたす．
$w^3=-1$
$w^2-w+1=0$
これより，$w^2=w-1$ であるから
与式$=(2w)^6+(2w-2)^6+0+(-2)^6$
$+(-2w+2)^6$
$=2^6\cdot(w^3)^2+2^6+2\times 2^6(w-1)^6$
$=2\times 2^6+2\cdot 2^6\times(w^2)^6$

$=4\cdot 2^6=\mathbf{256}$

22-1 重解をもつ条件は,

$m\neq 0$ かつ (判別式)$=0$

である．判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=1-m(2m-3)$$

であるから

$$2m^2-3m-1=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

これは $m\neq 0$ をみたす.

以上より,

$$m=\frac{\mathbf{3\pm\sqrt{17}}}{\mathbf{4}}$$

22-2 与えられた２次方程式が虚数解をもつためのkの条件は,(判別式)<0 である．判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(4k+1)$$

であるから

$$k^2-6k<0$$

よって,

$$\mathbf{0<k<6}$$

22-3 与えられた２次方程式が異なる２つの実数解をもつためのkの条件は,

$k+7\neq 0$ かつ (判別式)>0

である．判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=(k+4)^2-(k+7)\cdot 2k$$

であるから

$$-k^2-6k+16>0$$

$$\therefore\quad (k-2)(k+8)<0$$

$$\therefore\quad -8<k<2$$

ここでkは $k\neq -7$ である整数より

$$-6\leqq k\leqq 1$$

よって, k の**最小値は -6,**

最大値は 1

23-1 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2$ かつ $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

である．これより,

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=2^2-2\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{1}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

$$=\frac{3}{2}-2+1=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

23-2 ２つの解は α, 2α とおける．解と係数の関係より

$\alpha+2\alpha=6$ かつ $\alpha\cdot 2\alpha=c$

これより, $\alpha=2$, $c=\mathbf{8}$

23-3 $x^2+ax+b=0$ ……①,

$x^2+bx+a=0$ ……② とおく．

①において，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=b\end{cases}\quad\cdots\cdots③$$

②において，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(\alpha+1)+(\beta+1)=-b\\ (\alpha+1)(\beta+1)=a\end{cases}\quad\cdots\cdots④$$

④に③を代入し, α, β を消去すると,

$$\begin{cases}-a+2=-b\\ b-a+1=a\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}-a+b=-2\\ -2a+b=-1\end{cases}$$

よって, $a=\mathbf{-1}$, $b=\mathbf{-3}$

これを①に代入して,

$$x^2-x-3=0$$

よって，正の解は $x=\dfrac{\mathbf{1+\sqrt{13}}}{\mathbf{2}}$

24-1 与えられた方程式において，判別式をD, ２解を α, β とすると, $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ である条件は,

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}\geqq 0\\ \alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}(a-1)^2-(a^2-9)\geqq 0 & \cdots\cdots(\text{i})\\ 2(a-1)>0 & \cdots\cdots(\text{ii})\\ a^2-9>0 & \cdots\cdots(\text{iii})\end{cases}$$

である．

(i)は　$a \leqq 5$

(ii)は　$a>1$

(iii)は　$a<-3$ または $3<a$

であるから，a の値の範囲は

$$\boldsymbol{3<a \leqq 5}$$

また，１つの解が正，他の解が負である条件は，

$\alpha\beta<0$　　∴　$a^2-9<0$

したがって，$\boldsymbol{-3<a<3}$

24-2　$ax^2+bx+c=0$ ……①，
$bx^2+cx+a=0$ ……② とおく．

①が２つの正の解をもつための a，b，c の条件は，

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ (\text{判別式}) \geqq 0 \\ (\text{２解の和})>0 \\ (\text{２解の積})>0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2-4ac \geqq 0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

である．また，②が正と負の解をもつための，a，b，c の条件は

$$\begin{cases} b \neq 0 \\ (\text{２解の積})<0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b \neq 0 \\ \dfrac{a}{b}<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(**)$$

よって，「$(*)$ならば $(**)$」が成り立つことを示せばよい．

$(*)$を仮定する．

$-\dfrac{b}{a}>0$ より　$b \neq 0$

さらに，$\dfrac{b}{a}<0$ であるから $\dfrac{a}{b}<0$

よって，$(**)$ が成り立つ．

25-1　$(m-3)x^2+(5-m)x$
$+2(2m-7)=0$ ……$(*)$

$(*)$は２次方程式であるから $m-3 \neq 0$

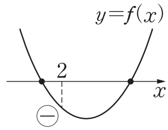
$$f(x)=x^2-\frac{m-5}{m-3}x+\frac{2(2m-7)}{m-3}$$

とおくと

$$(*) \iff f(x)=0$$

$(*)$の解の一方が２より大きく他方が２より小さくなるための条件は，$f(2)<0$ である．

$$f(2)=4-\frac{m-5}{m-3}\cdot 2+\frac{2(2m-7)}{m-3}=\frac{6m-16}{m-3}$$

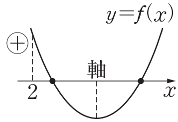


より

$$\frac{2(3m-8)}{m-3}<0$$

∴　$2(3m-8)(m-3)<0$

∴　$\boldsymbol{\dfrac{8}{3}<m<3}$



$(*)$の異なる２つの実数解がともに２より大きくなるための条件は，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} D>0 & \cdots\cdots① \\ \text{軸の位置}：\dfrac{m-5}{2(m-3)}>2 & \cdots\cdots② \\ \text{端点の } y \text{ 座標の符号}：f(2)>0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①：$\left(\dfrac{m-5}{m-3}\right)^2-4\cdot\dfrac{2(2m-7)}{m-3}>0$

∴　$\dfrac{-15m^2+94m-143}{(m-3)^2}>0$

∴　$\dfrac{-(3m-11)(5m-13)}{(m-3)^2}>0$

∴　$\dfrac{13}{5}<m<\dfrac{11}{3}$　$(m \neq 3)$　……①′

②：$\dfrac{m-5}{2(m-3)}-2>0$

∴　$\dfrac{-(3m-7)}{2(m-3)}>0$

∴　$(3m-7)(m-3)<0$

∴　$\dfrac{7}{3}<m<3$　……②′

③：$\dfrac{6m-16}{m-3}>0$

$\therefore\quad 2(3m-8)(m-3)>0$

$\therefore\quad m<\dfrac{8}{3}$ または $3<m$ ……③′

①′，②′，③′ より $\boldsymbol{\dfrac{13}{5}<m<\dfrac{8}{3}}$

25-2 (1) $\dfrac{(\text{判別式})}{4}$

$=(-4|k-1|)^2-8(8k^2-4k+1)$

$=16(k-1)^2-8(8k^2-4k+1)$

$=-48k^2+8$

より，実数解をもつための k の条件は

$$-48k^2+8\geqq 0\qquad \therefore\quad k^2-\frac{1}{6}\leqq 0$$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

(2) $f(x)$

$=8x^2-8|k-1|x+8k^2-4k+1$ とおく．

$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，2 つの解が 0 と 1 の間にあるための k の条件は，$y=f(x)$ のグラフの端点の y 座標の符号と軸の位置に着目し

$$\begin{cases} f(0)>0\\ f(1)>0\\ 0<\dfrac{|k-1|}{2}<1\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 8k^2-4k+1>0 & \cdots\cdots①\\ 8k^2-4k-8|k-1|+9>0 & \cdots\cdots②\\ 0<|k-1|<2 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

であるから，$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のとき

①，②，③が成り立つことを示せばよい．

$$f(0)=8\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

より①はつねに成り立つ．

また，$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ において，

$|k-1|=1-k$ であるから，

$f(1)=8k^2+4k+1$

$$=8\left(k+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

より②が成り立つ．

$$0<|k-1|=1-k<2$$

より③も成り立つ．

以上より証明された．

26-1 解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4\\ \alpha\beta\gamma=-2\end{cases}$$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

$$=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-4}{-2}=\boldsymbol{2}$$

(2) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$

$$=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{(-4)^2-2(-2)(-3)}{(-2)^2}=\boldsymbol{1}$$

26-2 (1) a，b，c は $f(x)=0$ の解であるから，

x^3-Ax^2+Bx-1

$=(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2$

$\qquad +(ab+bc+ca)x-abc$

これは x についての恒等式であるから，係数を比較すると

$$\begin{cases}-A=-(a+b+c)\\ B=ab+bc+ca\\ -1=-abc\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{a+b+c=A}\\ \boldsymbol{ab+bc+ca=B}\end{cases}$$

また，$abc=1$

(2) 方程式 $g(x)=0$ についての解と係数の関係と，(1)の結果から，

$$P=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=-\frac{bc+ca+ab}{abc}=\boldsymbol{-B}$$

$$Q=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{c+a+b}{abc}=\boldsymbol{A}$$

$R=-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}=-\dfrac{1}{abc}=-1$

(3) $f(x)=g(x)$ より，

x^3-Ax^2+Bx-1
$=x^3+Px^2+Qx+R$

(2)の結果から

x^3-Ax^2+Bx-1
$=x^3-Bx^2+Ax-1$

$\therefore\ A=B$

したがって，

$f(x)=x^3-Ax^2+Ax-1$
$\quad=(x-1)\{x^2-(A-1)x+1\}\quad\cdots(*)$

これより，方程式 $f(x)=0$ は $x=1$ を解としてもつ．

(4) $(*)$より，方程式 $f(x)=0$ の3つの解が実数であるための必要十分条件は，

$x^2-(A-1)x+1=0$

が2つの実数解をもつことである．

すなわち

$(A-1)^2-4\geqq 0$

$\therefore\ \boldsymbol{A\leqq -1,\ 3\leqq A}$

27-1 (1) $\omega^3-1=0$ であるから

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega-1\neq 0$ より，$\omega^2+\omega+1=0$

よって，$\omega^2+\omega=\boldsymbol{-1}$

(2) $(x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)$
$=x^2+\{(\omega+\omega^2)a+(\omega+\omega^2)b\}x$
$\quad+\omega^2(a+b\omega)(a\omega+b)$
$=x^2-ax-bx+a^2+b^2-ab$

よって，

(与式の右辺)
$=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$
$=x^3-3abx+a^3+b^3$
$=$(与式の左辺)

となり，等式が成立する．

(3) (2)より，

$ab=2,\ a^3+b^3=6$

となる a，b を求めればよい．

$a^3b^3=8$ であるから a^3，b^3 は2次方程式

$t^2-6t+8=0$

すなわち $(t-2)(t-4)=0$

の解である．よって，

$(a,\ b)=(\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2}),\ (\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$

したがって，

x^3-6x+6
$=(x+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})(x+\sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2)$
$\qquad(x+\sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega)$

であるから，求める方程式の解は，

$\boldsymbol{x=-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{4}\,\omega-\sqrt[3]{2}\,\omega^2,}$
$\boldsymbol{-\sqrt[3]{4}\,\omega^2-\sqrt[3]{2}\,\omega}$

27-2 (1) $u=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}$,

$v=-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}$ とおく．

$u+v=\alpha$

$u^3+v^3=\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1\right)-\left(\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1\right)=2$

$uv=\left(\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}\right)\cdot\left(-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}\right)$

$\quad=-\sqrt[3]{\dfrac{28}{27}-1}=-\dfrac{1}{3}$

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

であるから，α は，

$\alpha^3=2+3\left(-\dfrac{1}{3}\right)\alpha$

をみたす．

したがって，α は，整数を係数とする3次方程式

$x^3+x-2=0$

の解である．

(2) $x^3+x-2=0$ を解くと

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

$\therefore\ x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

であり，α は実数なので，$\alpha=1$ となる．

すなわち，α は整数 **1** である．

28-1 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44$
$=(x+2)(x-4)\times(x+3)(x-5)-44$
$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44$
$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+120-44$
$=(x^2-2x)^2-23(x^2-2x)+76$

$=\{(x^2-2x)-4\}\{(x^2-2x)-19\}$
$=(x^2-2x-4)(x^2-2x-19)$
よって，求める解は
$x^2-2x-4=0$ または $x^2-2x-19=0$
$\therefore\ \ x=\mathbf{1\pm\sqrt{5}},\ \mathbf{1\pm2\sqrt{5}}$

28-2 (1) $X=x+\dfrac{1}{x}$
$\Longleftrightarrow\ x^2-Xx+1=0$
$f(x)=x^2-Xx+1$
とおくと，Xは $f(x)=0$ をみたすxに対応して決まるから，Xの値がとり得る範囲を求めるには $f(x)=0$ をみたす実数xが存在するためのXの条件を求めればよい．
$f(0)=1$ であるから，$f(x)=0$ の判別式をDとおくと，この条件は
$x<0$ のとき

$$\begin{cases}\text{判別式：}X^2-4\geqq0\\ y=f(x)\ \text{のグラフの軸の位置：}\dfrac{X}{2}<0\end{cases}$$

$\therefore\ \ X\leqq\mathbf{-2}$
$x>0$ のとき

$$\begin{cases}\text{判別式：}X^2-4\geqq0\\ y=f(x)\ \text{のグラフの軸の位置：}\dfrac{X}{2}>0\end{cases}$$

$\therefore\ \ X\geqq\mathbf{2}$

(2) $x^4+ax^3-x^2+ax+1=0$ ……①
$x=0$ は①の解でないから，①の両辺をx^2で割ると，

$$x^2+ax-1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

よって，$X^2+aX-\mathbf{3}=0$ ……②
$g(X)=X^2+aX-3$ とおく．
①が $x>0$ において2つの実数解（重解を含む）をもつ条件は，(1)より②が $X\geqq2$ の範囲に1つだけ解をもつことである．
$g(0)=-3<0$
であるから，求める条件は
$g(2)\leqq0\ \ \ \therefore\ \ 2a+1\leqq0$
すなわち，$2a\leqq\mathbf{-1}$ である．
①が $x<0$ において2つの実数解（重解を含む）をもつ条件は，(1)より②が $X\leqq-2$ の範囲に1つだけ解をもつことである．
$g(0)<0$ であるから，求める条件は
$g(-2)\leqq0\ \ \ \therefore\ \ -2a+1\leqq0$
すなわち，$2a\geqq\mathbf{1}$ である．
とくに $2a=1$ のとき，

$$g(X)=(X+2)\left(X-\frac{3}{2}\right)$$

である．$X\leqq-2$ または $X\geqq2$ に注意すると $g(X)=0$ の解は $X=-2$ であり，(1)で等号の成り立つときである．
このとき
$f(x)=x^2+2x+1$
$\quad=(x+1)^2$
$f(x)=0$ の解は，$x=\mathbf{-1}$（重解）となる．

29-1 $z^3+az+b=0$
a，bが実数であり，$z=1+i$ が解であるから，$\bar{z}=1-i$ もこの方程式の解である．
$z+\bar{z}=2,\ \ z\bar{z}=2$
であり，もう1つの解をαとおくと，

$$\begin{cases}z+\bar{z}+\alpha=0\\ z\bar{z}+\bar{z}\alpha+\alpha z=a\\ z\bar{z}\alpha=-b\end{cases}$$

が成り立つから
$\alpha=-2$
$a=z\bar{z}+\alpha(z+\bar{z})=2-2\cdot2=\mathbf{-2}$
$b=(-1)\cdot2\cdot(-2)=\mathbf{4}$
これより，他の2つの解は，$\mathbf{1-i}$，$\mathbf{-2}$

29-2 整数係数の4次方程式
$f(x)=0$ の虚数解の1つを
$p+qi$（p，qは実数，$q\neq0$）とすると，
$p-qi$ も解となる．
また，2つの整数解をm，nとすると，
$x^4+ax^3+bx^2+cx+1$
$=(x-m)(x-n)(x^2-2px+p^2+q^2)$

係数を比較して,

$a=-(m+n+2p)$ ……①

$b=mn+2(m+n)p+p^2+q^2$ ……②

$c=-\{2mnp+(m+n)(p^2+q^2)\}$ ……③

$1=mn(p^2+q^2)$ ……④

a, b, c, m, n は整数であるから①より, $2p$ は整数, ②より, p^2+q^2 は正の整数である.

④より,

$mn=1$ ……⑤, $p^2+q^2=1$ ……⑥

⑤より, $m=n=\pm 1$ ……⑦

また, ⑥と $q\neq 0$ より, $-1<p<1$ であるから, $2p$ が整数であることも用いて,

$2p=-1, 0, 1$ ……⑧

⑥, ⑦, ⑧を①, ②, ③に代入し, 求める (a, b, c) は,

(a, b, c)

$=\mathbf{(-1, 0, -1), (3, 4, 3),}$

$\mathbf{(-2, 2, -2), (2, 2, 2),}$

$\mathbf{(-3, 4, -3), (1, 0, 1)}$

29-3 yi (y は実数で $y\neq 0$) が, x の方程式 $x^5+x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解となる条件は,

$y^5i+y^4-ay^3i-by^2+cyi+d=0$

$\therefore\ (y^4-by^2+d)+y(y^4-ay^2+c)i=0$

よって, $\begin{cases} y^4-by^2+d=0 \\ y^4-ay^2+c=0 \end{cases}$ であり

$\begin{cases} (a-b)y^2=c-d & \cdots\cdots① \\ y^4-ay^2+c=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

と同値である.

$a\neq b$ であれば, ①をみたす実数 y の個数は 2 以下となる.

$a=b$, $c\neq d$ であれば, ①をみたす実数 y は存在しない.

よって, ①かつ②をみたす実数 y ($y\neq 0$) が 4 個存在する条件は,

$a=b$, $c=d$ であって, かつ

②をみたす実数 y ($y\neq 0$) が 4 個存在する ……(*)

ことである. さらに(*)は, t の 2 次方程式

$t^2-at+c=0$

が異なる 2 個の正の実数解をもつことと同値であり, そのための a, c の条件は

$a>0$, $c>0$, $a^2-4c>0$

となる. したがって, 求める条件は次のようになる.

$\begin{cases} \boldsymbol{a=b,\ c=d} \\ \boldsymbol{a>0,\ c>0} \\ \boldsymbol{a^2-4c>0} \end{cases}$

30-1 与式を変形して

$2(x^2+x-2)+(x+1)(x+a)i=0$

x, a は実数であるから, これは

$\begin{cases} x^2+x-2=0 & \cdots\cdots① \\ (x+1)(x+a)=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

と同値である.

①は $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1, -2$

であるから

「①かつ②」

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2(a+1)=0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x=-2 \\ -(a-2)=0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ a=-1 \end{cases}$ または $\begin{cases} x=-2 \\ a=2 \end{cases}$

したがって, $\boldsymbol{a=-1,\ 2}$

30-2 純虚数解を ai (a は実数で $a\neq 0$) とおく.

$x=ai$ を与式に代入して

$(1+i)(-a^2)+(k+i)ai+3-3ki=0$

これより

$(-a^2-a+3)+(-a^2+ka-3k)i=0$

a, k は実数であるから

$\begin{cases} -a^2-a+3=0 & \cdots\cdots① \\ -a^2+ka-3k=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①−② より

$-(1+k)a+3+3k=0$

$\therefore\ (k+1)(3-a)=0$

$\therefore\ a=3$ または $k=-1$

$a=3$ は①をみたさない.

$k=-1$ のとき, ①, ②は一致し, ①の判別式 $D=1+12=13>0$ であるから a は

0 でない実数である．

$\therefore\quad k=\mathbf{-1}$

30-3 $\dfrac{z^3}{z^2}=\dfrac{-8i}{2(1+\sqrt{3}\,i)}$ より

$$z=\frac{-4i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{-4i(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}$$

$$=\boldsymbol{-\sqrt{3}-i}$$

第３章

31 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\cdot3+2\cdot8}{2+3},\ \dfrac{3\cdot4+2\cdot9}{2+3}\right)$

より　$\mathbf{P(5,\ 6)}$

(2) $\mathrm{AC}=\dfrac{m}{m+n}\mathrm{AB}$,

$\mathrm{AD}=\dfrac{m}{m-n}\mathrm{AB}$ より

$$\frac{1}{\mathrm{AC}}+\frac{1}{\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{m+n}{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{m-n}{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{\mathrm{AB}}$$

よって，$\dfrac{1}{\mathrm{AC}}+\dfrac{1}{\mathrm{AD}}=\dfrac{k}{\mathrm{AB}}$ をみたす k の値は，$k=\mathbf{2}$

(3) R の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とすると

$$\begin{cases}\dfrac{a+\alpha}{2}=2\\[2mm]\dfrac{b+\beta}{2}=1\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}\alpha=4-a\\\beta=2-b\end{cases}$$

よって，R の座標は　$\boldsymbol{(4-a,\ 2-b)}$

32 (1) C の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とすると

$$\begin{cases}\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2\\\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2\end{cases}$$ より

$$\begin{cases}(\alpha-1)^2+(\beta+2)^2=2^2+(-4)^2\\(\alpha+1)^2+(\beta-2)^2=2^2+(-4)^2\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta=15 & \cdots\cdots①\\\alpha^2+\beta^2+2\alpha-4\beta=15 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①−② より　$\alpha=2\beta$

①に代入して　$5\beta^2=15$　$\beta=\pm\sqrt{3}$

C は第 1 象限の点であるから，$\beta>0$ であり

$$\beta=\sqrt{3}$$

よって，C の座標は $\boldsymbol{(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})}$

(2) 正方形の中心を $\mathrm{C}(\alpha,\ \beta)$ とすると

$\mathrm{AC}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$ かつ $\mathrm{BC}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$ より

$$\begin{cases}(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2=\dfrac{(p+q)^2+(q-p)^2}{2}\\[2mm](\alpha+q)^2+(\beta-p)^2=\dfrac{(p+q)^2+(q-p)^2}{2}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha^2+\beta^2-2p\alpha-2q\beta=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha^2+\beta^2+2q\alpha-2p\beta=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①－② より　$(p+q)\alpha+(q-p)\beta=0$

(i)　$p \neq q$ のとき，$\beta=\dfrac{p+q}{p-q}\cdot\alpha$

これを①に代入すると

$$\frac{2(p^2+q^2)}{(p-q)^2}\cdot\alpha^2-2\cdot\frac{p^2+q^2}{p-q}\cdot\alpha=0$$

$\therefore\ \alpha=0,\ p-q$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(0,\ 0)$

または $(p-q,\ p+q)$

(ii)　$p=q$ のとき，

A$\neq$B より $p+q\neq 0$ であり，$\alpha=0$

このとき①は　$\beta^2-2q\beta=0$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(0,\ 0)$ または $(0,\ 2q)$

(ii)は(i)に含まれるので，中心Cの座標は

$(0,\ 0)$ または $(p-q,\ p+q)$

33-1　(1)　2つの直線①，②が直交する条件は

$$(1-4k)\cdot 3+2\cdot(k-3)=0$$

$$\therefore\ k=-\frac{3}{10}$$

(2)　2つの直線①，②が一致する条件は

$(1-4k):2=3:(k-3)$

$\therefore\ (1-4k)(k-3)=6$

$\therefore\ 4k^2-13k+9=0$

$\therefore\ (4k-9)(k-1)=0$

$\therefore\ k=\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$

33-2　(1)　$\begin{cases} a_1:b_1=a_2:b_2 \\ a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2 \end{cases}$

より　$\begin{cases} \boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0} \\ \boldsymbol{a_1c_2-c_1a_2\neq 0} \end{cases}$

(2)　$\boldsymbol{a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2}$

(3)　①と②が1点で交わる

$\Longleftrightarrow$ ①と②が平行でない

であるから，$\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2\neq 0}$

(4)　$\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

34　$ax+by+c=0$　……①

$bx+cy+a=0$　……②

$cx+ay+b=0$　……③

まず，①$\not\parallel$②，②$\not\parallel$③，③$\not\parallel$①，すなわち

$ac-b^2\neq 0,\ ab-c^2\neq 0,\ bc-a^2\neq 0$　……④

が必要である．

次に，④のもとで①と②の交点を求める．

①$\times c-$②$\times b$ より

$(ac-b^2)x+c^2-ab=0$

①$\times b-$②$\times a$ より

$(b^2-ac)y+bc-a^2=0$

④より $ac-b^2\neq 0$ なので①と②の交点の座標は

$$\left(\frac{ab-c^2}{ac-b^2},\ \frac{a^2-bc}{b^2-ac}\right) \quad\cdots\cdots⑤$$

これが③の上にある条件は

$$c\cdot\frac{ab-c^2}{ac-b^2}+a\cdot\frac{a^2-bc}{b^2-ac}+b=0$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

3直線は一致しないので，$a=b=c$ ではない．したがって，$a+b+c=0$ である．

逆に「$a+b+c=0$」かつ「$a=b=c$ でない」とき

$ac-b^2=ac-(-a-c)^2$

$$=-a^2-ac-c^2=-\left(a+\frac{c}{2}\right)^2-\frac{3}{4}c^2$$

$a+\dfrac{c}{2}=0$ かつ $c=0$ とすると $a=c=0$

このとき $b=0$ であり「$a=b=c$ でない」ことに反する．したがって，

$ac-b^2\neq 0$ は成り立つ．

同様に $ab-c^2\neq 0,\ bc-a^2\neq 0$ であり，④をみたす．

よって，求める条件は

「$a+b+c=0$」かつ「$a=b=c$ でない」

$c=-a-b$ を⑤に代入すると，交点の座標は **$(1,\ 1)$**

35　放物線上の点 $P(t,\ -t^2+4t-3)$ と直線 $x-y+2=0$ との距離 h は

$$h=\frac{|t-(-t^2+4t-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|t^2-3t+5|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|$$

よって，h は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値

$\dfrac{11}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{11\sqrt{2}}{8}}$ をとる．

36　(1)　$4x-3y=14$　……①

$x-2y=1$　……②　$x-7y=16$　……③

とする．

①と②，②と③，③と①の交点の座標はそれぞれ

$(5,\ 2)$，$(-5,\ -3)$，$(2,\ -2)$

である．これらをすべて x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$(3,\ 4)$，$(-7,\ -1)$，$(0,\ 0)$

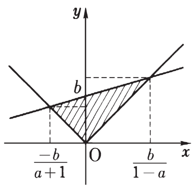
となるので，求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|3\cdot(-1)-(-7)\cdot 4|=\boldsymbol{\frac{25}{2}}$$

(2)　$y=|x|$ と $y=ax+b$ $(b>0)$ が 2 点で交わるための条件は

$-1<a<1$ であり，

交点の x 座標は



$$x=\frac{-b}{a+1},\quad \frac{b}{1-a}$$

である．よって，上図の斜線部分の面積 S は

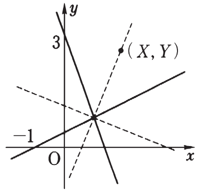
$$S=\frac{1}{2}b\left|\frac{-b}{a+1}\right|+\frac{1}{2}b\left|\frac{b}{1-a}\right|$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1-a}\right)=\frac{b^2}{1-a^2}$$

$S=4$ より　$b^2=4(1-a^2)$

$b>0$ より　$\boldsymbol{b=2\sqrt{1-a^2}}$

37　点 $(X,\ Y)$ が求める直線上の点であるための条件は



$$\frac{|2X+Y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|X-2Y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$\therefore$　$2X+Y-3=\pm(X-2Y+1)$

よって，求める直線の方程式は

$\boldsymbol{x+3y-4=0,\ 3x-y-2=0}$

38-1　$P(a,\ b)$ とおくと，RとPは直線 $y=x$ に関して対称なので　$R(b,\ a)$

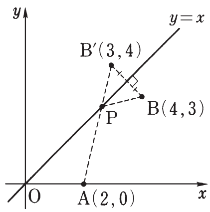
RはQを x 軸方向に 1 だけ平行移動した点であるから　$Q(b-1,\ a)$

PとQは直線 $y=2x$ に関して対称ゆえ，

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=2\cdot\dfrac{a+(b-1)}{2}\\[2mm] 2\cdot\dfrac{b-a}{a-(b-1)}=-1\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}a+b=2\\ a-b=1\end{cases}$$

$\therefore$　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$　$\boldsymbol{P\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

38-2　(1)　2 点 A，B は直線 $y=x$ に関して同じ側にある．Bを $y=x$ に関して対称移動した点は，$B'(3,\ 4)$ である．



$\overline{AP}+\overline{PB}$ が最小となる点Pは直線 AB' と直線 $y=x$ の交点である．

直線 AB' の方程式は，

$$y=4(x-2)$$

これと $y=x$ の交点を求めて，

$$P\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$

(2)　最小値は

$$\overline{AB'}=\sqrt{1^2+4^2}=\boldsymbol{\sqrt{17}}$$

39-1　k について整理して

$$(2x+y-1)k+x+4y+3=0$$

これがすべての k に対して成立する条件は，

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+4y+3=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x=1,\ y=-1$$

したがって，k がどのような値であっても定点 $(\mathbf{1},\ \mathbf{-1})$ を通る．

39-2 $(m,\ n)\neq(0,\ 0)$ として

$m(2x-y-1)+n(3x+2y-3)=0$ ……①

はPを通る直線の方程式である．

(1) ①が $(-1,\ 1)$ を通るとき，

$-4m-4n=0 \qquad \therefore \quad m=-n\ (\neq 0)$

①に代入して，$n(x+3y-2)=0$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{x+3y-2=0}$

(2) ①は

$(2m+3n)x+(-m+2n)y$
$\qquad -(m+3n)=0$ ……①′

と変形できる．

①′ が $2x-3y=0$ に平行な条件は

$$2(-m+2n)+3(2m+3n)=0$$

$$\therefore \quad 4m+13n=0$$

$$\therefore \quad m=-\frac{13}{4}n\ (\neq 0)$$

①′ に代入して整理すると

$$n(14x-21y-1)=0$$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{14x-21y-1=0}$

(3) ①′ が $x+3y=0$ に垂直な条件は

$$(2m+3n)+3(-m+2n)=0$$

$$\therefore \quad m=9n\ (\neq 0)$$

①′ に代入して，$n(21x-7y-12)=0$

$n\neq 0$ より　$\boldsymbol{21x-7y-12=0}$

40 x について整理すると

$2x^2+(3y+a)x+y^2+y+b=0$ ……①

これが2直線を表す条件は，①の左辺が x, y の1次式に因数分解できること，すなわち

①の判別式

$$=(3y+a)^2-4\cdot 2\cdot(y^2+y+b)$$
$$=y^2+2(3a-4)y+a^2-8b$$

が y について完全平方式となることである．この条件は，$\dfrac{D_y}{4}=0$ であり

$$(3a-4)^2-(a^2-8b)=0$$

$$\therefore \quad 8a^2-24a+16+8b=0$$

よって，$\boldsymbol{b=-a^2+3a-2}$

42 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$
$=\{(x-3)^2+(y-4)^2\}+\{(x+5)^2+y^2\}$
$\quad +\{(x-5)^2+y^2\}$
$=3x^2-6x+3y^2-8y+75$
$=3(x-1)^2+3\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{200}{3}$

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=k^2$，すなわち

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=k^2-\frac{200}{3}$$

これが円を表すための条件は，

$$k^2-\frac{200}{3}>0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{k>\frac{10\sqrt{6}}{3}}$$

43 (1) C_k の方程式を変形して

$\left(x+\dfrac{3k}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{k-2}{2}\right)^2$
$=\left(\dfrac{3k}{2}\right)^2+\left(\dfrac{k-2}{2}\right)^2+6k+4$

さらに

$(\text{右辺})=\dfrac{5}{2}(k^2+2k+2)$

$\qquad =\dfrac{5}{2}\{(k+1)^2+1\}>0$

であるから，C_k は円を表している．

この円の中心を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=-\frac{3k}{2},\quad Y=-\frac{k-2}{2}$$

点 $(X,\ Y)$ の軌跡は，これをみたす実数 k が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合であるから

$$Y=\frac{1}{3}X+1 \quad \therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+1}$$

(2) C_k の方程式を k について整理すると

$$x^2+y^2-2y-4+k(3x+y-6)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

すべての C_k が通る点は

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ を座標にもつ点である.
これを解くと

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

よって, 求める点は　**(1, 3), (2, 0)**

(3)　(*)をみたす k が存在しない, すなわち

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-4\neq 0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases}$$

をみたす $(x,\ y)$ を座標にもつ点である.
よって, 求める点は

直線 $3x+y-6=0$ 上の 2 点 (1, 3), (2, 0) を除くすべての点.

44-1　$2x^2-6x+2y^2+10y=1$ は

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=9$$

と変形できる.
中心 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ の $x+2y=1$ に関する対称点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{3+2a}{4}+\left(-\dfrac{5}{2}+b\right)=1 \\ \dfrac{b+\frac{5}{2}}{a-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad a=\frac{33}{10},\ b=\frac{11}{10}$$

中心 A′, 半径 3 の円が求める円であり, この円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{33}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=9}$$

44-2　求める接線を $3x-4y+c=0$ とおく. $x^2+y^2=1$ と接する条件は, 中心 (0, 0) との距離が 1 であることより,

$$\frac{|c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \qquad \therefore\quad c=\pm 5$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{3x-4y\pm 5=0}$$

44-3　$y=x+1$ を円の方程式に代入して整理すると,

$$2x^2+(2a+1)x+1=0$$

$D=(2a+1)^2-8$ とおくと, $D=0$ となる a は

$$2a+1=\pm 2\sqrt{2} \qquad \therefore\quad a=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

D の符号より, 共有点の個数は,

$\boldsymbol{a<\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}<a}$ **のとき 2 個,** $\boldsymbol{a=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}}{2}}$ **のとき　1 個,**

$\boldsymbol{\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}}$ **のとき 0 個**

別解　円の中心 $\left(\frac{1-a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$ と直線 $x-y+1=0$ の距離

$$\frac{\left|\frac{1-a}{2}+\frac{a}{2}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

と半径

$$\sqrt{a+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}}$$

を比較してもよい.

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}>\frac{9}{8},\ =\frac{9}{8},\ <\frac{9}{8}$$

それぞれに対して, 共有点の個数は 2 個, 1 個, 0 個である.

45　$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

と変形できる.
この円の中心 (1, 2) と直線 $x-y-1=0$ の距離は

$$\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

よって, 切りとる弦の長さは,

$$2\sqrt{9-(\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$$

46 A，B における接線の方程式はそれぞれ

$2x+4y=20,\ 4x-2y=20$

連立して，$x=6,\ y=2$

$\therefore\ \ \mathbf{(6,\ 2)}$

47 (1) 円の中心 $(0,\ 0)$ と直線の距離が 1 (半径) より小さいことから

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1\quad\therefore\ \ \boldsymbol{a^2+b^2>1}$

(2) $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$，$\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ とおくと，P，Q は $ax+by=1$ 上の点であるから

$$\begin{cases} ap_1+bp_2=1 \\ aq_1+bq_2=1 \end{cases}\quad\cdots\cdots①$$

P，Q における接線はそれぞれ

$p_1x+p_2y=1,\ q_1x+q_2y=1$

ところで①は，これら 2 直線が点 $(a,\ b)$ を通ることを示している．

よって，R の座標は $\boldsymbol{(a,\ b)}$

48-1 2 円の中心間の距離は

$\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$ なので，求める条件は，

$|R-4|>5$ または $R+4<5$

$R>0$ もふまえると

$\boldsymbol{0<R<1,\ 9<R}$

48-2 (1) C_1，C_2 は 2 点で交わるから，C_1，C_2 の方程式を辺々ひいて，

$6x-4y=2$

求める直線の方程式は

$\boldsymbol{3x-2y=1}$

(2) $(x-1)^2+(y-3)^2-4$

$+k(3x-2y-1)=0$

は C_1 と C_2 の 2 交点を通る図形の方程式である．

これが点 $(3,\ 1)$ を通るとき

$4+4-4+k(9-2-1)=0\quad\therefore\ \ k=-\dfrac{2}{3}$

このとき

$3\{(x-1)^2+(y-3)^2-4\}$

$-2(3x-2y-1)=0$

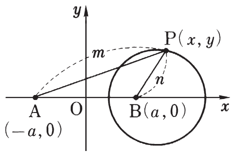
$\therefore\ \ 3x^2+3y^2-12x-14y+20=0$

$\therefore\ \ 3(x-2)^2+3\left(y-\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{25}{3}\ (>0)$

これは円である．よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2}$$

50 直線 AB を x 軸とし，線分 AB の中点 O を通りこれに垂直な直線を y 軸とする．



2 点 A，B の座標をそれぞれ $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$ $(a>0)$ とし，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=m:n$

は

$\mathrm{PA}^2:\mathrm{PB}^2=m^2:n^2$

$\therefore\ \ \{(x+a)^2+y^2\}:\{(x-a)^2+y^2\}$

$=m^2:n^2$

$\therefore\ \ m^2\{(x-a)^2+y^2\}=n^2\{(x+a)^2+y^2\}$

$\therefore\ \ (m^2-n^2)x^2+(m^2-n^2)y^2$

$-2(m^2+n^2)ax+(m^2-n^2)a^2=0$

と変形でき $m\neq n$ であるから

$m^2-n^2\neq0$ であり

$$x^2+y^2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}ax+a^2=0$$

$$\therefore\ \ \left(x-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a\right)^2+y^2=\frac{4m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}\cdot a^2$$

と変形できる．よって，求める軌跡は

点 $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a,\ 0\right)$ を中心とし，

$\left|\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a\right|$ を半径とする円である．

上の円の方程式で $y=0$ とおいて，x 軸との交点の座標を求めると

$$x=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a+\frac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a=\frac{m+n}{m-n}\cdot a,$$

$$x=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\cdot a-\frac{2mn}{m^2-n^2}\cdot a=\frac{m-n}{m+n}\cdot a$$

となる．

点 $\left(\dfrac{m-n}{m+n}\cdot a,\ 0\right)$ は線分 AB を $m:n$ に内分し，

点 $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\cdot a,\ 0\right)$ は線分 AB を $m:n$ に外分している．

よって，Pの軌跡はこれらの点を直径の両端とする円である．

51-1 $y=tx$ ……①

$y=(t+1)x-t$ ……②

を同時にみたす実数 t が存在するための x，y の条件を求める．

①を t についての方程式とみると

$x=0$ のとき，①をみたす t が存在する条件は $y=0$ であり，このとき，①，②をみたす実数 t が $t=0$ として存在する．

$x\neq0$ のとき，①をみたす t の値は

$$t=\frac{y}{x}$$

これが②もみたすための x，y の条件は

$$y=\left(\frac{y}{x}+1\right)x-\frac{y}{x}$$

$\therefore\ \ y=x^2$ かつ $x\neq0$

以上まとめて，Pの軌跡は，放物線

$y=x^2$ の全体．

51-2 $(x-t)^2+y^2=t^2$ ……①，$y=tx$ ……② を同時にみたす正の実数 t が存在するための x，y の条件を求める．

②を t についての方程式とみると

$x=0$ のとき，②をみたす t が存在する条件は $y=0$ であり，このとき，①は t の値にかかわらず成立．

よって，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は条件をみたす．

$x\neq0$ のとき，②をみたす t の値は

$$t=\frac{y}{x}$$

これが①もみたす x，y の条件は

$$\left(x-\frac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\frac{y}{x}\right)^2\quad\therefore\ \ x^2-2y+y^2=0$$

$\therefore\ \ x^2+(y-1)^2=1$ かつ $x\neq0$

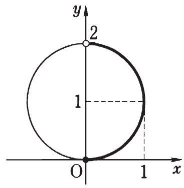
また，$t>0$ より $\dfrac{y}{x}>0$

$\therefore\ \ xy>0$

以上まとめて

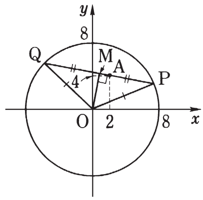
円 $x^2+(y-1)^2=1$ の $x>0$ の部分および原点．

図示すると右図．



52-1 弦 PQ は点 A(2，4) を通るから，直線 PQ の方程式は

$a(x-2)+b(y-4)=0\ (a^2+b^2\neq0)$ ……①



とおけて，このとき PQ の中点Mを通る直線 OM の方程式は

$bx-ay=0$ ……②

となる．

①，②を同時にみたす実数 a，b $(a^2+b^2\neq0)$ が存在するための x，y の条件を求める．

②を $ya=bx$ として a についての方程式とみると

(i) $y=0$ のとき，「①かつ②」は

$$\begin{cases}a(x-2)-4b=0\\ bx=0\end{cases}$$

(ア) $x=0$ のとき，

$$\begin{cases}a+2b=0\\ b\text{ は任意}\end{cases}$$

であり，これをみたす a，b $(a^2+b^2\neq0)$ は存在する．

よって，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ は適する．

(イ) $x\neq0$ のとき，

$$\begin{cases}a(x-2)=0\\ b=0\end{cases}$$

(a) $x\neq2$ のとき，$a=b=0$ となるが，$a^2+b^2\neq0$ をみたさないので適さない．

(b) $x=2$ のとき，

$$\begin{cases}a\text{ は任意}\\ b=0\end{cases}$$

これをみたす a，b $(a^2+b^2\neq0)$ は存在す

るので，$(x,\ y)=(2,\ 0)$ は適する．

(ii)　$y\neq 0$ のとき，②をみたす a の値は　$a=b\cdot\dfrac{x}{y}$

このとき①は　$b\cdot\dfrac{x}{y}(x-2)+b(y-4)=0$

$\therefore\ b\{x(x-2)+y(y-4)\}=0$ ……③

であり，$a^2+b^2\neq 0$ は $b^2\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1\right\}\neq 0$

したがって $b\neq 0$ ……④ である．

③，④を同時にみたす b が存在するような $x,\ y$ の条件は

$$x(x-2)+y(y-4)=0$$

$$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5\ (y\neq 0)$$

(i)，(ii)をまとめると

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=5}$$

別解　つねに OM⊥AM であるから，Mは O，A を直径の両端とする円周上を動く．

このとき，直線 PQ は点Aを通る直線のすべてを動くから，弦 PQ の中点であるMも上の円周上すべてを動く．

この円の方程式は（標問 **41** の 研究 参照）

$$x(x-2)+y(y-4)=0$$

$$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=5$$

52-2　$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}\,p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{3}\,q^2)$ とおくと，Rの座標 $(x,\ y)$ は

$x=\dfrac{p+q}{2}$ …①，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(p^2+q^2)$ …②

また，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ より

$$(\text{OP の傾き})\times(\text{OQ の傾き})=-1$$

$$\therefore\ \sqrt{3}\,p\cdot\sqrt{3}\,q=-1$$

$$\therefore\ pq=-\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③を同時にみたす実数 $p,\ q$ が存在するための $x,\ y$ の条件を求める．

①，③をみたす $p,\ q$ は

$$t^2-2xt-\frac{1}{3}=0$$

の2解であり，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=x^2+\frac{1}{3}>0$$

であるから，$p,\ q$ はつねに実数である．

$p,\ q$ が①，③をみたすという条件のもとで②を変形して

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\{(p+q)^2-2pq\}$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{(2x)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$\therefore$　**放物線** $\boldsymbol{y=2\sqrt{3}\,x^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

53　$X=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$Y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ より，

$$X^2+Y^2=\frac{4}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ x=\frac{2X}{X^2+Y^2},\ y=\frac{2Y}{X^2+Y^2}$$

円弧①を表す式に代入して，

$$\left(\frac{2X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\frac{2Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1,$$

$$0\leqq\frac{2X}{X^2+Y^2}\leqq 1,\ 0\leqq\frac{2Y}{X^2+Y^2}\leqq 1$$

$\therefore\ X^2+Y^2=4,$

$0\leqq X\leqq 2,$

$0\leqq Y\leqq 2$ ……①′

線分②を表す式に代入して，

$$\frac{2Y}{X^2+Y^2}=1,\ 0\leqq\frac{2X}{X^2+Y^2}\leqq 1$$

$\therefore\ X^2+(Y-1)^2=1,$

$0\leqq X,$

$(X-1)^2+Y^2\geqq 1,$

$X^2+Y^2\neq 0$ ……②′

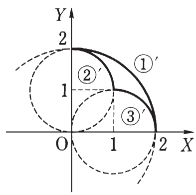
線分③も同様に，

$(X-1)^2+Y^2=1,$

$0\leqq Y,$

$X^2+(Y-1)^2\geqq 1,$

$X^2+Y^2\neq 0$ ……③′



よって，点Qのえがく図形は上図の①′，②′，③′ のようになる．

54　$a=x+y$ ……①

$b=xy$ ……②

$x^2+y^2+2x+2y=1$ ……③

①，②，③を同時にみたす実数 $x,\ y$ が存在するための $a,\ b$ の条件を求める．

$x,\ y$ は $t^2-at+b=0$ の実数解である

から　$D \geqq 0$　　∴　$a^2-4b \geqq 0$　……④

x，y が③をみたすための条件は

$$(x+y)^2-2xy+2(x+y)=1$$

∴　$a^2-2b+2a=1$　……⑤

④，⑤より，求める図形の方程式は

$b \leqq \dfrac{a^2}{4}$，

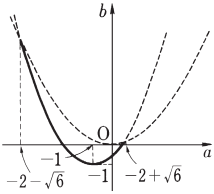
$b=\dfrac{1}{2}a^2+a-\dfrac{1}{2}$

である．両端の a 座標は

$\dfrac{1}{2}a^2+a-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{4}$

を解いて　$a=-2\pm\sqrt{6}$

よって，図のようになる．



55　(1)　$x^2=-y$ と $x^2+y^2=2$ は 2 点 $(\pm1,\ -1)$ で交わり，下図の斜線部分を得る．

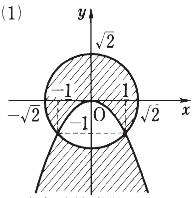
(2)　与えられた不等式は

$$(x^2+y^2-9)(y+x)(y-x)<0$$

と変形できる．

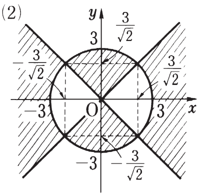
$x^2+y^2=9$ は，$y=\pm x$ と，4 点 $\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$（複号任意）で交わり，下図の斜線部分を得る．

(1)



（境界線上除く）

(2)



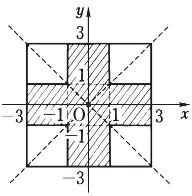
（境界線上除く）

56　条件(i)，(ii)は

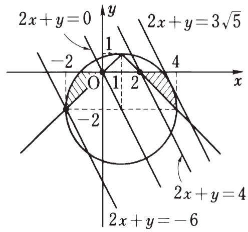
$$\begin{cases} |x| \leqq |y| \text{ のとき，} \\ \quad |x| \leqq 1 \text{ かつ } |y| \leqq 3 \\ |x| \geqq |y| \text{ のとき，} \\ \quad |x| \leqq 3 \text{ かつ } |y| \leqq 1 \end{cases}$$

である．これを図示すると，右図を得る．境界線上を含む．よって

面積$=6^2-4\times2^2$
$=\mathbf{20}$



57-1　右図の斜線部分（境界線上含む）が D である．



$k=2x+y$ が最大になるのは

$y=-2x+k$

が円 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ と $x>0$ において接するときで，円の中心と直線の距離を考えると

$$\frac{|2-2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3$$

$k>0$ より，$k=3\sqrt{5}$

また，直線 $y=-2x+k$ が $(x,\ y)=(-2,\ -2)$，$(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るときの k の値を求めると，順に

$k=-6$，0，4

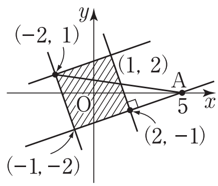
となるので

$\boldsymbol{-6 \leqq k \leqq 0}$，$\boldsymbol{4 \leqq k \leqq 3\sqrt{5}}$

57-2

$-5 \leqq 3x+y \leqq 5$，
$-5 \leqq x-3y \leqq 5$

をみたす点の集合は右図の斜線部分（境界線上含む）である．



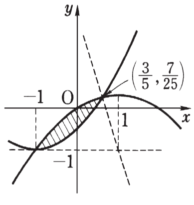
$$x^2-10x+y^2=(x-5)^2+y^2-25$$

は，点 A(5，0) から最も遠い点 $(-2,\ 1)$ において最大，最も近い点 $(2,\ -1)$ において最小となる．

これより，**最大値 25**，**最小値 −15**

57-3　(1)　$x^2-2x+3y=0$，
$x^2+2x-2y-1=0$

は 2 点 $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{7}{25}\right)$，$(-1,\ -1)$ で交わり，2 つの不等式を同時にみたす領域は右図の斜線部分（境界線上含む）である．



(2) $\dfrac{y+1}{x-1}$ は，2 点 $(x,\ y)$，$(1,\ -1)$ を結ぶ直線の傾きであり，図より，

$x=y=-1$ のとき傾きは最大となり，

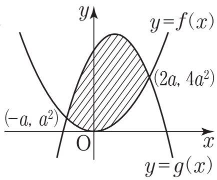
$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{7}{25}$ のとき傾きは最小となる．

したがって，

最大値　$\mathbf{0}$　$(x=y=-1)$

最小値　$-\dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}$　$\left(x=\dfrac{3}{5},\ y=\dfrac{7}{25}\right)$

58　$f(x)=x^2$，$g(x)=-2x^2+3ax+6a^2$ とおく．



$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$$
$$\therefore\quad 3(x^2-ax-2a^2)=0$$
$$\therefore\quad 3(x+a)(x-2a)=0$$
$$\therefore\quad x=-a,\ 2a$$

領域 D は上図の斜線部分となる．境界も含む．

$x+y=k$ とおく．直線 $y=-x+k$ と放物線 $y=g(x)$ が接するのは

$$-x+k=-2x^2+3ax+6a^2$$

すなわち

$$2x^2-(3a+1)x+k-6a^2=0$$

が重解をもつときであり，判別式を D_1 とすると，$D_1=0$ である．

$$(3a+1)^2-4\cdot 2(k-6a^2)=0$$
$$\therefore\quad k=\frac{1}{8}(57a^2+6a+1)$$

このとき接点の x 座標は $x=\dfrac{3a+1}{4}$ である．

$-a\leqq\dfrac{3a+1}{4}\leqq 2a$ をみたす a は $a\geqq\dfrac{1}{5}$ であり，この範囲では直線が放物線に接するとき k は最大となる．

$0<a\leqq\dfrac{1}{5}$ のときは，直線が点 $(2a,\ 4a^2)$ を通るとき，k は最大となる．

よって，**最大値は**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{8}(57a^2+6a+1) & \left(a\geqq\dfrac{1}{5}\ \text{のとき}\right) \\ 2a+4a^2 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{5}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

直線 $y=-x+k$ と放物線 $y=f(x)$ が接するのは

$$-x+k=x^2\qquad\therefore\quad x^2+x-k=0$$

が重解をもつときであり，判別式を D_2 とすると，$D_2=0$ である．

$$1+4k=0\qquad\therefore\quad k=-\frac{1}{4}$$

接点の x 座標は $x=-\dfrac{1}{2}$ である．

$-a\leqq-\dfrac{1}{2}\leqq 2a$ をみたす a は $a\geqq\dfrac{1}{2}$ であり，この範囲では直線が放物線に接するとき k は最小となる．

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のときは，直線が点 $(-a,\ a^2)$ を通るとき，k は最小となる．

よって，**最小値は**

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4} & \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right) \\ -a+a^2 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

59-1　(1)　$F(x,\ y)$

$=(3y-x+1)^2+(x-2)^2+2$

x，y はすべての実数値をとるから

$$\begin{cases} 3y-x+1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

すなわち，

$x=2,\ y=\dfrac{1}{3}$ **のとき，最小値 2 をとる．**

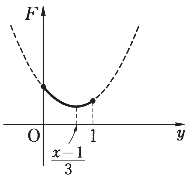
(2)　x を固定し，$F(x,\ y)$ を y についての 2 次関数とみる．
$3\leqq x\leqq 5$ より，$F(x,\ y)$ のグラフの軸 $y=\dfrac{x-1}{3}$ の位置は

$$\frac{2}{3}\leqq\frac{x-1}{3}\leqq\frac{4}{3}$$

最大値について，
軸は定義域 $0\leqq y\leqq 1$ の中点より右側にあるから，最大値は $F(x,\ 0)$ である．
ついで，x を動かす．

$$\begin{aligned}F(x,\ 0)&=(-x+1)^2+x^2-4x+6\\&=2x^2-6x+7\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるから，$F(x,\ 0)$ は $x=5$ のとき**最大値 27** をとる．
最小値について，
(i)　$\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{x-1}{3}\leqq 1$
$(3\leqq x\leqq 4)$ のとき
最小値は
$F\left(x,\ \dfrac{x-1}{3}\right)$ である．

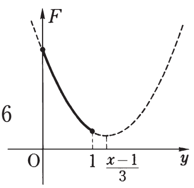


$$F\left(x,\ \frac{x-1}{3}\right)=(x-2)^2+2$$

ついで，x を動かすと $F\left(x,\ \dfrac{x-1}{3}\right)$ は $x=3$ のとき最小値 3 をとる．

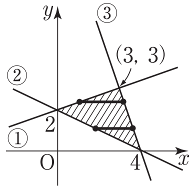
(ii)　$1\leqq\dfrac{x-1}{3}\leqq\dfrac{4}{3}$ $(4\leqq x\leqq 5)$ のとき
最小値は $F(x,\ 1)$ である．

$$\begin{aligned}&F(x,\ 1)\\&=(4-x)^2+x^2-4x+6\\&=2x^2-12x+22\\&=2(x-3)^2+4\end{aligned}$$



ついで，x を動かすと $F(x,\ 1)$ は $x=4$ のとき最小値 6 をとる．
(i)，(ii)より　**最小値 3**

59-2　(1)
$x-3y=-6$　……①
$x+2y=4$　……②
$3x+y=12$　……③
領域 D は右図の斜線(境界を含む)の部分である．



(2)　$F(x,\ y)=x^2-y^2$ とおく．
y を固定するとき，x の動く範囲は

$$\begin{cases}0\leqq y\leqq 2 \text{ のとき，} 4-2y\leqq x\leqq 4-\dfrac{y}{3}\\[2mm] 2\leqq y\leqq 3 \text{ のとき，} 3y-6\leqq x\leqq 4-\dfrac{y}{3}\end{cases}$$

最大値について，
$F(x,\ y)$ は $x=4-\dfrac{y}{3}$ のとき最大となる．

$$\begin{aligned}F\left(4-\frac{y}{3},\ y\right)&=\left(4-\frac{y}{3}\right)^2-y^2\\&=-\frac{8}{9}y^2-\frac{8}{3}y+16\end{aligned}$$

ついで，y を動かすと $F\left(4-\dfrac{y}{3},\ y\right)$ は $y=0$ のとき**最大値 16** をとる．
最小値について，
(i)　$0\leqq y\leqq 2$ のとき
$F(x,\ y)$ は $x=4-2y$ のとき最小となる．

$$\begin{aligned}F(4-2y,\ y)&=(4-2y)^2-y^2\\&=3y^2-16y+16\end{aligned}$$

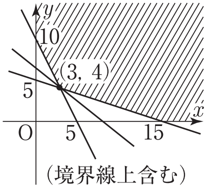
ついで，y を動かすと $F(4-2y,\ y)$ は $y=2$ のとき最小値 -4 をとる．
(ii)　$2\leqq y\leqq 3$ のとき
$F(x,\ y)$ は $x=3y-6$ のとき最小となる．

$$\begin{aligned}F(3y-6,\ y)&=(3y-6)^2-y^2\\&=8y^2-36y+36\\&=8\left(y-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

ついで，y を動かすと $F(3y-6,\ y)$ は $y=\dfrac{9}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{2}$ をとる．

(i)，(ii)より　**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}}$

60-1 P, Qそれぞれを x g, y g とるとすると，条件より



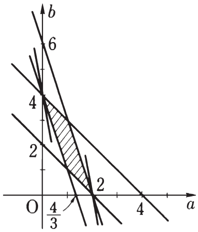
（境界線上含む）

$x\geqq0$, $y\geqq0$,
$2x+y\geqq10$,
$x+3y\geqq15$

これらをすべてみたす領域において，
$2x+3y$ を最小にするには，$x=3$,
$y=4$ とすればよい（上図参照）.
これより，**Pを 3 g, Qを 4 g とればよく，最小費用は 18 円**

60-2 $y=ax+b$ において，
$x=1$ のとき，$2\leqq y\leqq4$
$x=3$ のとき，$4\leqq y\leqq6$ よって

$$\begin{cases}2\leqq a+b\leqq4\\4\leqq 3a+b\leqq6\end{cases}$$



これは右図の斜線部分となる（境界を含む）.
$x=6$ のときの生産量を k とすると

$6a+b=k$

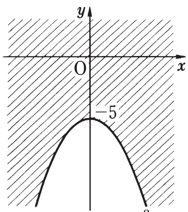
$\therefore\ \ b=-6a+k$

傾き -6 の直線と上図の領域が共有点をもつときを調べて，
$(a,\ b)=(0,\ 4)$ で最小値 **4** トン
$(a,\ b)=(2,\ 0)$ で最大値 **12** トン

61 a について整理して，
$a^2+xa-(y+5)=0$
これをみたす実数 a が存在する条件は，

$x^2+4(y+5)\geqq0$

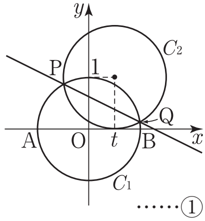
$\therefore\ \ y\geqq-\dfrac{x^2}{4}-5$



$y=-\dfrac{x^2}{4}-5$

図示すると図の斜線部分を得る．ただし，境界線上の点を含む．

62 (1) AB を直径とする円を C_1 とし，C_1 を弦 PQ に関して対称移動した円を C_2 とする．



$C_1:x^2+y^2=1$ ……①

C_2 は点 $(t,\ 0)$ で x 軸と接するから，

$C_2:(x-t)^2+(y-1)^2=1$ ……②

C_1, C_2 の交線が直線 PQ であるから，求める直線の方程式は，①−②より

$$\boldsymbol{2tx+2y-t^2-1=0}$$

(2) 弦PQが通過する範囲は，直線PQが通過する範囲と半円の周および内部

$x^2+y^2\leqq1$ かつ $y\geqq0$ ……③

との共通部分である．
まず，t が -1 から 1 まで動くときの直線 PQ が通過する範囲を求める．
点 $(x,\ y)$ が直線 PQ が通過する範囲内の点であるための条件は，$(x,\ y)$ に対して，(1)の方程式をみたす $t\ (-1\leqq t\leqq1)$ が存在することである．

$f(t)=t^2-2xt+1-2y$

とおき，

$f(t)=0$ かつ $-1\leqq t\leqq1$ をみたす t が存在する ……(*)

ための x, y の条件を求める．$f(t)$ のグラフの軸 $t=x$ が定義域 $-1\leqq t\leqq1$ の中にあるか否かで場合分けする．

(i) $x\leqq-1$ のとき，

$$(*)\iff\begin{cases}f(-1)\leqq0\\f(1)\geqq0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}2x-2y+2\leqq0\\-2x-2y+2\geqq0\end{cases}$$

$\therefore\ \ x+1\leqq y\leqq-x+1$

(ii) $-1\leqq x\leqq1$ のとき，

$$(*)\iff\begin{cases}(\text{判別式})\geqq0\\\text{「}f(-1)\geqq0\ \text{または}\\f(1)\geqq0\text{」}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x^2-(1-2y)\geqq 0 \\ 「2x-2y+2\geqq 0 \\ \text{または} \\ -2x-2y+2\geqq 0」 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y\geqq \dfrac{1-x^2}{2} \\ 「y\leqq x+1 \ \text{または}\ y\leqq -x+1」 \end{cases}$$

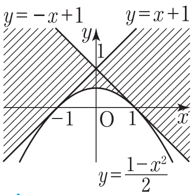
(iii) $1\leqq x$ のとき,

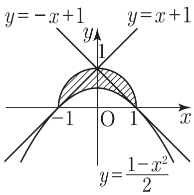
$$(*) \iff \begin{cases} f(-1)\geqq 0 \\ f(1)\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2x-2y+2\geqq 0 \\ -2x-2y+2\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad -x+1\leqq y\leqq x+1$$

これを図示すると，左下図の斜線部分となり，③との共通部分をとると，右下図の斜線部分となる．これが求める範囲である．境界も含む．





注 ③より

$$0\leqq y^2\leqq 1-x^2 \quad \therefore \quad -1\leqq x\leqq 1$$

であり，先に x の範囲を絞っておけば，(i)，(iii)の考察は不要である．

別解 **1.** (1)の式を

$$y=\frac{t^2}{2}-xt+\frac{1}{2}$$

として，x を固定し，t が $-1\leqq t\leqq 1$ を動くときの y の動く範囲を調べてもよい．

$$g(t)=\frac{t^2}{2}-xt+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(t-x)^2-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

とおく．③より $-1\leqq x\leqq 1$ としてよいから，軸 $t=x$ は定義域 $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲にある．よって，y の動く範囲は

$$g(x)\leqq y\leqq \max\{g(-1),\ g(1)\}$$

$$\therefore \quad \frac{1-x^2}{2}\leqq y\leqq \max\{x+1,\ -x+1\}$$

であり，これが表す領域は，前段の左図の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分である．③との共通部分をとると，前段の右図を得る．

2. 直線族 $2tx+2y-t^2-1=0$ ……④ は

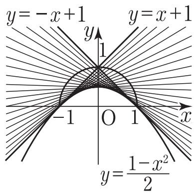
$$t^2-2xt-2y+1=0$$
$$(t-x)^2-x^2-2y+1=0$$

と変形される．ここで，曲線

$x^2+2y-1=0$ ……⑤ を考えて，④と⑤を連立すると

$$(t-x)^2=0 \qquad \therefore \quad x=t\ (\text{重解})$$

よって，④は⑤上の点 $\left(t,\ \dfrac{1-t^2}{2}\right)$ における接線である．t は $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くから④は右図のように動く．③との共通部分をとると，解答の図を得る．



63-1 a について整理して，

$$a^2-(2y+1)a+x^2+y^2=0$$

これをみたす正の数 a が少なくとも 1 つ存在する条件を調べる．

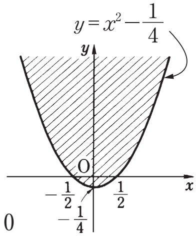
$$f(a)=a^2-(2y+1)a+x^2+y^2$$

とおく．

(i) 2 つの正の実数解 (重解を含む) をもつ条件は，

$$\begin{cases} \text{判別式}:(2y+1)^2-4(x^2+y^2)\geqq 0 \\ f(a)\ \text{のグラフの対称軸}:\dfrac{2y+1}{2}>0 \\ f(0)>0:x^2+y^2>0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y\geqq x^2-\dfrac{1}{4} \\ y>-\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$



(ii) 正，負の解を 1 つずつもつ条件は

$$f(0)<0:x^2+y^2<0$$

これをみたす x，y は存在しない．

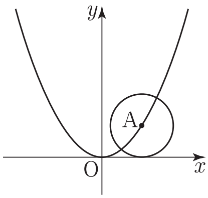
(iii) 0 と正の解をもつ条件は，

$$\begin{cases} f(0)=0 : x^2+y^2=0 \\ f(a)\text{ のグラフの対称軸} : \dfrac{2y+1}{2}>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x=y=0$$

以上より，円Cの存在領域を図示すると前ページの図のようになる．ただし，境界線上の点を含む．

63-2 A$(t,\ at^2)$を中心としx軸に接する円Cの内部を表す不等式は



$$(x-t)^2+(y-at^2)^2<(at^2)^2$$

$$\therefore \quad (1-2ay)t^2-2xt+x^2+y^2<0$$

どの円Cの内部にも含まれない点の集合を求めるには，
どの t に対しても

$$(1-2ay)t^2-2xt+x^2+y^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つための x，y の条件を求めればよい．

(i) $1-2ay=0$ のとき

$$① \iff -2xt+x^2+\left(\frac{1}{2a}\right)^2\geqq 0$$

であるから，条件をみたす x，y は

$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2a}\right)$ のみである．

(ii) $1-2ay\neq 0$ のとき，①の左辺$=0$とした 2 次方程式の判別式をDとすると求める条件は

$$\begin{cases} 1-2ay>0 \\ D\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 1-2ay>0 \\ x^2-(1-2ay)(x^2+y^2)\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y<\dfrac{1}{2a} \quad (\because \quad a>0) \\ -y^2+2ay(x^2+y^2)\leqq 0 \end{cases}$$

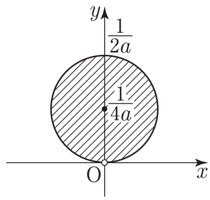
$$\therefore \begin{cases} y<\dfrac{1}{2a} \\ 2ay\left(x^2+y^2-\dfrac{y}{2a}\right)\leqq 0 \end{cases}$$

$y>0$，$a>0$ より

$$\begin{cases} 0<y<\dfrac{1}{2a} \\ x^2+\left(y-\dfrac{1}{4a}\right)^2\leqq\left(\dfrac{1}{4a}\right)^2 \end{cases}$$

となる．

以上(i)，(ii)を図示すると右図の斜線部分となる．境界は原点以外をすべて含む．



第4章

64-1 $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{3}$ より，1 は第 1 象限の角である．

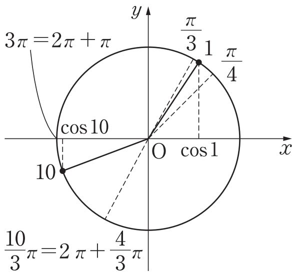
また，$3\pi<10<\dfrac{10}{3}\pi=2\pi+\dfrac{4}{3}\pi$

より，10 は第 3 象限の角である．

したがって

$$\cos 10<0<\cos 1$$

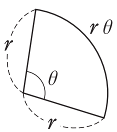
$\therefore$ $\boldsymbol{\cos 10<\cos 1}$



64-2 (1) $\boldsymbol{l=r\theta}$

(2) $r\theta+2r=\pi$ ……①

$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ ……②



①より $\theta=\dfrac{\pi-2r}{r}$ ……①′

これを②に代入して，

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}r(\pi-2r)}$$

(3) ①′をみたす θ が存在するための r の条件は $0<\dfrac{\pi-2r}{r}<2\pi$

より $\dfrac{\pi}{2(\pi+1)}<r<\dfrac{\pi}{2}$ ……(*)

($\because$ $r>0$)

(*)の範囲で S の最大を考えればよい．

$$S=-\left(r-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}$$

は $r=\dfrac{\pi}{4}$ ((*)をみたす) のとき最大となり，

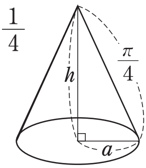
$$S=\frac{\pi^2}{16}$$

また，①′と $r=\dfrac{\pi}{4}$ から $\theta=2$

以上より，$\boldsymbol{r=\dfrac{\pi}{4}}$，$\boldsymbol{\theta=2}$，$\boldsymbol{S=\dfrac{\pi^2}{16}}$

(4) 円錐の高さを h，底面の半径を a とする．

$2\pi a=r\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より $a=\dfrac{1}{4}$



$$\therefore\ h=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi^2-1}}{4}$$

よって，求める円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-1}}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{\pi^2-1}}{192}}$$

65 回転数は無視して，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ としてよい．

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より

$\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\alpha<\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ ……①

$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，$0<\dfrac{5}{13}<\dfrac{1}{2}$ より

$\cos\dfrac{3}{2}\pi<\cos\beta<\cos\dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore$ $\dfrac{3}{2}\pi<\beta<\dfrac{5}{3}\pi$ ……②

①，②より $\dfrac{5}{3}\pi<\alpha+\beta<\dfrac{23}{12}\pi$

よって，$\alpha+\beta$ は**第 4 象限**の角である．

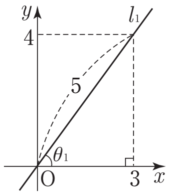
66 (1) θ_1 は直線 $l_1: y=\dfrac{4}{3}x$ が x 軸と作る鋭角であるから

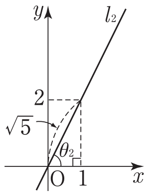
$$\sin\theta_1=\boldsymbol{\frac{4}{5}},\ \cos\theta_1=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

θ_2 は直線 $l_2: y=2x$ が x 軸と作る鋭角であるから

$$\sin\theta_2=\frac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$





(2) 加法定理より

$$\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

68 $\tan\theta=t$ とおくと，

$\sin2\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ なので

$$\frac{2t}{1+t^2}=-\frac{4}{5}$$
$$\therefore\ 2t^2+5t+2=(t+2)(2t+1)=0$$
$$\therefore\ t=-2,\ -\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots①$$

$\cos2\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ なので

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{3}{5}$$
$$\therefore\ 3(1+t^2)=-5(1-t^2)$$
$$\therefore\ t=\pm2\qquad\cdots\cdots②$$

①，②を同時にみたす t の値は，$t=-2$

よって　$\boldsymbol{\tan\theta=-2}$

別解　$\sin2\theta<0$，$\cos2\theta<0$ より 2θ は第 3 象限の角であり

$$\pi+2n\pi<2\theta<\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$
（n は整数）

$$\frac{\pi}{2}+n\pi<\theta<\frac{3}{4}\pi+n\pi$$
$$\therefore\ \tan\theta<0$$
$$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

一方，$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ なので，

$\tan\theta=t\,(<0)$ とおくと

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ 2t^2+3t-2=0$$
$$\therefore\ (2t-1)(t+2)=0$$

$t<0$ より　$t=-2$　∴　$\tan\theta=-2$

69 (1) $\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)$$

$0^\circ<x<90^\circ$，$0^\circ<y<90^\circ$ ゆえ，

$$0^\circ<\frac{x+y}{2}<90^\circ,$$
$$0^\circ\leqq\frac{|x-y|}{2}<\frac{x+y}{2}<90^\circ$$
$$\therefore\ \sin\frac{x+y}{2}>0,$$
$$\cos\frac{x+y}{2}<\cos\frac{x-y}{2}$$

よって，$\sin(x+y)-(\sin x+\sin y)<0$

$$\therefore\ \boldsymbol{\sin(x+y)<\sin x+\sin y}$$

(2) $2\sin(x+y)-(\sin2x+\sin2y)$

$$=2\sin(x+y)-2\sin(x+y)\cos(x-y)$$
$$=2\sin(x+y)\{1-\cos(x-y)\}\geqq0$$
$$(\because\ 0^\circ<x+y<180^\circ)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{2\sin(x+y)\geqq\sin2x+\sin2y}$$
（等号は $x=y$ のとき成立）

71 (1) 右辺を加法定理で展開，整理すると

$$y=\frac{3}{2}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{3},\ b=\frac{2}{3}\pi$$

(2) (1)より，求める周期は，

$$\frac{2\pi}{2}=\pi$$

72 (1) $\frac{1}{4}+\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=0$

$$\cos^2\theta+\cos\theta-\frac{3}{4}=0$$

$$\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\theta+\frac{3}{2}\right)=0$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より $\cos\theta=\frac{1}{2}$

よって，$\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$（$n$ は整数）

(2) $(1-\sin^2\theta)+\sin\theta=\frac{5}{4}$

$$\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{1}{4}=0$$

$$\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2=0\qquad\therefore\quad\sin\theta=\frac{1}{2}$$

よって，$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi$

または $\frac{5}{6}\pi+2n\pi$（n は整数）

(3) $1+\sin\theta+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$

$$\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=0$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)(1+\cos\theta)=0$$

$$\therefore\quad\tan\theta=-1,\ \cos\theta=-1$$

$$(\because\quad\cos\theta\neq0)$$

よって，$\theta=\frac{3}{4}\pi+n\pi$

または $\pi+2n\pi$（n は整数）

73 (1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x=\sqrt{3}$

$$\therefore\quad 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\qquad\therefore\quad x+\frac{\pi}{6}=2n\pi$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

(2) 和を積に直す公式によって両辺を変形すると

$$2\sin2x\cos x+\sin2x$$
$$=2\cos2x\cos x+\cos2x$$
$$(2\cos x+1)\sin2x=(2\cos x+1)\cos2x$$
$$(2\cos x+1)(\sin2x-\cos2x)=0$$

$\therefore\quad 2\cos x+1=0$

または $\sin2x=\cos2x$

$2\cos x+1=0$ のとき，$\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore\quad x=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$（$n$ は整数）

$\sin2x=\cos2x$ のとき，$\tan2x=1$

$$(\because\quad\cos2x\neq0)$$

$\therefore\quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{n}{2}\pi$（$n$ は整数）

よって，解は $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$，

$\frac{\pi}{8}+\frac{n}{2}\pi$（$n$ は整数）

(3) 与式を変形して，

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$ かつ $\cos x\neq0$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$0\leqq x<2\pi$ かつ $\cos x\neq0$ より

$$x=\frac{\pi}{6}$$

74 (1) 2式を

$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4$ に代入して

$$3\sin^2y+(1-\cos y)^2=4$$

$\therefore\quad 3(1-\cos^2y)+1-2\cos y+\cos^2y=4$

$\therefore\quad\cos y(\cos y+1)=0$

$$\therefore\quad\begin{cases}\cos y=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\text{ または }\begin{cases}\cos y=-1\\ \cos x=1\end{cases}$$

$2\sin x=\sqrt{3}\sin y$ に注意して

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2m\pi \\ y=\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi \end{cases} \text{(複号同順)}$$

$$\begin{cases} x=2m\pi \\ y=(2n+1)\pi \end{cases}$$

(m, n は整数)

(2) 第 1 式は $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$$\therefore\quad 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0$$

$x+y=2l\pi$, $x=2m\pi$, $y=2n\pi$
(l, m, n は整数)

$x=2m\pi$ のとき，第 2 式は
$\cos y=1+\cos y$ で不成立．$y=2n\pi$ のときも同じ．

$x+y=2l\pi$ のとき，第 2 式より

$$1=\cos x+\cos(2l\pi-x)$$

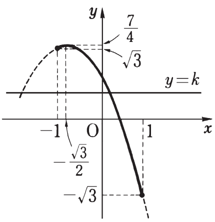
$$\cos x=\cos y=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2m'\pi,$$

$$y=\mp\frac{\pi}{3}+2n'\pi$$

(複号同順，m'，n' は整数)

75-1



$\sin\theta=x$ とおくと，
与式は
$-x^2-\sqrt{3}x+1=k$ となる．
この左辺を $f(x)$ とおき，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフとが $-1\leqq x\leqq 1$ で交わるような k の範囲を求めればよい．

$$f(x)=-\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

これと上図より　$\boldsymbol{-\sqrt{3}\leqq k\leqq \dfrac{7}{4}}$

75-2 与えられた方程式は 2 倍角の公式により

$$1-2\sin^2x+4a\sin x+a-2=0 \quad\cdots(*)$$

と変形される．
$\sin x=X$ とおくと，(*)は

$$2X^2-4aX-a+1=0 \quad\cdots\cdots①$$

となる．$0\leqq x\leqq\pi$ より，①の解が，$0\leqq X<1$ においてただ 1 つの解をもつような a の値を求めればよい (①が $X=1$ を解にもつとき $a=\dfrac{3}{5}$ である．

このとき，①の解は $X=1$, $\dfrac{1}{5}$ となり，(*)は異なる 3 つの解をもち不適)．

(i) $X=0$ のとき，①より $a=1$
このとき，①の解は $X=0$, 2．よって，(*)の解は，$x=0$, π となり適する．

(ii) ①が $0<X<1$ に 1 つだけ解をもつ条件は，①の左辺を $f(X)$ とおくと

(ア) $f(0)f(1)<0$

$$\therefore\quad (-a+1)(2-4a-a+1)<0$$

$$\therefore\quad \frac{3}{5}<a<1$$

または

(イ) ①の判別式 $D=0$ かつ
$f(x)$ のグラフの軸の位置：
$0<a<1$ をみたすことである．
$D=0$ より

$$4a^2-2(-a+1)=0$$

$$\therefore\quad (2a-1)(a+1)=0$$

$0<a<1$ より

$$a=\frac{1}{2}$$

(i)，(ii)より，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{5}<a\leqq 1}$

76 (1) $2\cos^2x-1+\cos x<0$

$$(2\cos x-1)(\cos x+1)<0$$

$$-1<\cos x<\frac{1}{2}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}<x<\pi}$$

(2) (i) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin x>\cos x$

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

$-\dfrac{\pi}{4}<x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より

$0<x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4}<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき

$\sin x>-\cos x$

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

$\dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{4}\pi$ より

$\dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\pi$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{4}\pi$

(i), (ii)をまとめて

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi}$

(3) $\cos 5x>\cos x$ を変形すると

$-2\sin 3x\sin 2x>0$

$\therefore\ \begin{cases}\sin 3x>0\\ \sin 2x<0\end{cases}$ または $\begin{cases}\sin 3x<0\\ \sin 2x>0\end{cases}$

$0<x<\pi$ より

$\begin{cases}0<3x<\pi \text{ または } 2\pi<3x<3\pi\\ \pi<2x<2\pi\end{cases}$

または

$\begin{cases}\pi<3x<2\pi\\ 0<2x<\pi\end{cases}$

$\therefore\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi<x<\pi}$

(4) $\sin^2 2x+6\sin^2 x\leqq 4$ を変形して

$4\sin^2 x\cos^2 x+6\sin^2 x-4\leqq 0$

$2\sin^2 x(1-\sin^2 x)+3\sin^2 x-2\leqq 0$

$2\sin^4 x-5\sin^2 x+2\geqq 0$

$\therefore\ (2\sin^2 x-1)(\sin^2 x-2)\geqq 0$

ここで, $|\sin x|\leqq 1$ より $\sin^2 x-2<0$ であるから

$2\sin^2 x-1\leqq 0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より

$\boldsymbol{0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi,}$

$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}\pi\leqq x\leqq 2\pi}$

77 (1) $y=(1-\cos^2 x)+\cos x+1$

$=-\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ ゆえ, $\cos x=\dfrac{1}{2}$ で最大, $\cos x=-1$ で最小となる.

最大値 $\dfrac{9}{4}$, 最小値 0

(2) $\cos x=X$, $\sin x=Y$ とおくと, $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より, X, Y は

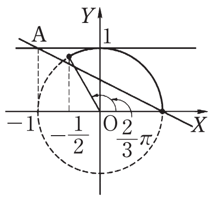
$X^2+Y^2=1,\ -\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 1,\ Y\geqq 0$ ……①

をみたす.

$-y=\dfrac{\sin x-1}{\cos x+1}$

$=\dfrac{Y-1}{X-(-1)}$

より, $-y$ は点 A$(-1,\ 1)$ と点 $(X,\ Y)$ を通る直線の傾きである.



点 $(X,\ Y)$ は①をみたすので, 図より $-y$ のとり得る値の範囲は

$\dfrac{0-1}{1+1}\leqq -y\leqq\dfrac{1-1}{0+1}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\leqq -y\leqq 0\qquad \therefore\ 0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$

よって, **最小値 0, 最大値 $\dfrac{1}{2}$**

別解 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと, 与式は

$$\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1}{2}(t-1)^2$$

$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ より $0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{3}$ であり，t のとり得る値の範囲は

$$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

よって，$f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}(t-1)^2$ は $0\leqq t\leqq\sqrt{3}$ の範囲で

$$\begin{cases} t=1\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right) \text{ のとき，最小値 } 0 \\ t=0\ (x=0) \text{ のとき，最大値 } \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

78-1　$\sin x+\sin y$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$x+y=\frac{2}{3}\pi$ より

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3},\quad \frac{x-y}{2}=x-\frac{\pi}{3}$$

なので

$$\sin x+\sin y=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

である．

また，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より，

$-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{6}$ なので

$$\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(等号は $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，すなわち $x=0$ のとき成立)

以上より，**最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

78-2　$f(x)=2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x$

$$=1-\cos 2x-2\sin 2x+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x-2\sin 2x$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ だから}\right]$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\cos(2x+\alpha)$$

$$\left[\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right]$$

よって，$f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\leqq f(x)\leqq\frac{7}{2}+\frac{5}{2}$$

$$1\leqq f(x)\leqq 6$$

これより，**最大値 6，最小値 1**

79　(1)　$\sin x+\cos x=t$ とおくと

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\therefore\quad y=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x\times(\sin x+\cos x)+4\sin x\cos x$$

$$=t^3+\frac{t^2-1}{2}(-3t+4)$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3+2t^2+\frac{3}{2}t-2}$$

(2)　$t=\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

y を t で微分すると

$$y'=-\frac{3}{2}t^2+4t+\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(t-3)(3t+1)$$

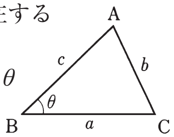
よって，増減表は次のようになる．

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\frac{61}{27}$	↗	$\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

これより

最大値 $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$，最小値 $-\frac{61}{27}$

80 △ABC が存在する



$\Longleftrightarrow$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$ をみたす $c\,(>0)$ が存在する

を示す.

(⇒の証明) AB$=c$ とすると

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$ は余弦定理である.

(⇐の証明)

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta$$

より $\cos\theta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$0<\theta<\pi$ より $-1<\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<1$ ……(*)

$a>0,\ b>0,\ c>0$ より,(*)を変形すると

$$-2ac<a^2+c^2-b^2<2ac$$

$$\therefore\ \begin{cases} b^2<(a+c)^2 \\ (a-c)^2<b^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ |a-c|<b<a+c$$

よって,$a,\ b,\ c$ を 3 辺とする △ABC が存在する.

81-1 (1) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\left[\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}\ \text{ゆえ}\right]$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(2) $\sin B+\sin C-\sin A$

$$=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

よって,与えられた式は

$$4\cdot\cos^2\frac{A}{2}\cdot2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$=3\sin B\sin C$

$$\therefore\ 4\cos^2\frac{A}{2}\sin B\sin C=3\sin B\sin C$$

$\sin B>0,\ \sin C>0$ より

$$4\cos^2\frac{A}{2}=3$$

となる.$0<\dfrac{A}{2}<90^\circ$ に注意すると

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって,**$A=60^\circ$ の三角形**

81-2 $2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}+2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{D}{2}=2$

$$\therefore\ \cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}+\cos\frac{C-D}{2}=2$$

$\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C+D}{2}=180^\circ$ より,

$$\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+D}{2}=0$$

$\cos\dfrac{A-B}{2}\leqq1,\ \cos\dfrac{C-D}{2}\leqq1$ で,

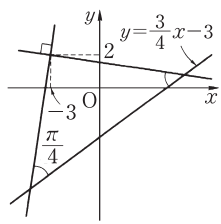
$\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{C-D}{2}=2$ ゆえ,

$$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C-D}{2}=1$$

$\therefore\ A=B,\ C=D$

すなわち,**$A=B$ の等脚台形.**

82-1 求める直線は 2 本ある.その傾きを m_1,$m_2\,(m_1>m_2)$ とすると,$m_1>\dfrac{3}{4}$ ゆえ,tan の加法定理より



$$\frac{m_1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{3}{4}m_1}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\quad \dfrac{4m_1-3}{4+3m_1}=1$

$\therefore\quad m_1=7$

したがって，$m_1m_2=-1$ より，

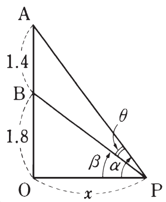
$$m_2=-\frac{1}{7}$$

ゆえに，求める直線の方程式は

$$y=7(x+3)+2,\ y=-\frac{1}{7}(x+3)+2$$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=7x+23,\ y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{11}{7}}$

82-2 絵の上端をA，下端をB，眼の位置をPとする．絵の真下で，Pと同じ高さの点をOとする．



また $\angle\mathrm{APO}=\alpha$，$\angle\mathrm{BPO}=\beta$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$，$\mathrm{OP}=x$ m とする．

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan\alpha=\frac{3.2}{x},\ \tan\beta=\frac{1.8}{x}$$

であるから，

$$\tan\theta=\frac{3.2-1.8}{x+\dfrac{3.2\times1.8}{x}}$$

である．いま

分母$\geqq 2\sqrt{3.2\times1.8}$

であり，等号成立は $x=\dfrac{3.2\times1.8}{x}$ から

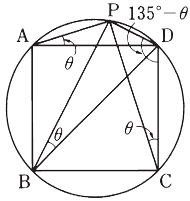
$x=2.4$ のときである．

このとき $\tan\theta$ は最大となり θ も最大となる．これより，求める位置は，壁から

2.4 m

別解 研究と同じようにして解くこともできる．

83 (1) $\angle\mathrm{ABP}=45^\circ-\theta$，$\triangle\mathrm{ABP}$，$\triangle\mathrm{PCD}$ の外接円の半径は1だから，正弦定理から



$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{\mathrm{PB}}{\sin(90^\circ+\theta)}=2,$$

$$\frac{\mathrm{PC}}{\sin(135^\circ-\theta)}=\frac{\mathrm{PD}}{\sin\theta}=2$$

$\therefore\quad \mathrm{PA}=2\sin(45^\circ-\theta)$

$\quad=\boldsymbol{\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)}$

$\mathrm{PB}=2\sin(90^\circ+\theta)=\boldsymbol{2\cos\theta}$

$\mathrm{PC}=2\sin(135^\circ-\theta)$

$\quad=\boldsymbol{\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)}$

$\mathrm{PD}=\boldsymbol{2\sin\theta}$

(2) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2$

$=2(\cos\theta-\sin\theta)^2+4\cos^2\theta$

$\quad+2(\cos\theta+\sin\theta)^2+4\sin^2\theta$

$=8(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\boldsymbol{8}$

(3) $\mathrm{PA}^4+\mathrm{PB}^4+\mathrm{PC}^4+\mathrm{PD}^4$

$=4(\cos\theta-\sin\theta)^4+16\cos^4\theta$

$\quad+4(\cos\theta+\sin\theta)^4+16\sin^4\theta$

$=24(\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta)$

$=24(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=\boldsymbol{24}$

84 (1) $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ ゆえ，OはPQの垂直二等分線上にあり，それはRSの垂直二等分線でもあるから，

$$\mathrm{OS}=\mathrm{OR}$$

よって，$\triangle\mathrm{OSR}$ は正三角形．

したがって $\mathrm{OS}=\mathrm{SR}=\mathrm{PQ}$，

$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}-2\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$ だから

$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ-2\theta$

$\therefore\quad \mathrm{OS}=\mathrm{PQ}=\boldsymbol{2\sin(30^\circ-\theta)}$

(ただし，$0^\circ<\theta<30^\circ$)

(2) PからOAにおろした垂線PHの長さは $\mathrm{OP}\sin\theta=\sin\theta$ だから，

$\mathrm{SP}=2\sin\theta$ ($\because\ \angle\mathrm{PSA}=30^\circ$)

よって，

$\square\mathrm{PQRS}=\mathrm{RS}\cdot\mathrm{SP}$

$=4\sin(30^\circ-\theta)\sin\theta$
$=2\{\cos(30^\circ-2\theta)-\cos 30^\circ\}\leqq 2-\sqrt{3}$
等号は $30^\circ-2\theta=0$，すなわち $\theta=15^\circ$ のとき．
これより，$\theta=15^\circ$ のとき，面積は最大値 $2-\sqrt{3}$ をとる．

第5章

85 (1)

(i) $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{2^{6x}+1}{2^{2x}(2^{2x}+1)}$

$=\dfrac{3^3+1}{3(3+1)}=\dfrac{28}{3\cdot 4}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$

別解 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=2^{2x}-2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x}$

$=3-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

(ii) $\log_{3\sqrt{3}}81\sqrt{3}=\dfrac{\log_3 3^4\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\log_3 3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{9}{2}\div\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{3}$

(iii) $-\log_2(\sqrt{2}+1)=\log_2(\sqrt{2}+1)^{-1}$

$=\log_2\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\log_2(\sqrt{2}-1)$

$\therefore\quad 2^{-\log_2(\sqrt{2}+1)}=2^{\log_2(\sqrt{2}-1)}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(iv) $(\log_2 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$

$=\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}+\dfrac{\log 3}{3\log 2}\right)\left(\dfrac{\log 2}{\log 3}+\dfrac{\log 2}{2\log 3}\right)$

(底は 10 とし，省略する)

$=\dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 2}{\log 3}\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{2}$

(2) $3^x=5^y=a$ から

$x\log 3=y\log 5=\log a$

(底は 10 とし，省略する)

第 2 式が成立することから $x\neq 0$，$y\neq 0$ であり，$\log a\neq 0$ であるから

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log 3}{\log a},\quad \dfrac{1}{y}=\dfrac{\log 5}{\log a}$

これらを第 2 式に代入して

$\dfrac{\log 3}{\log a}+\dfrac{\log 5}{\log a}=2$

$\therefore\quad 2\log a=\log 3+\log 5=\log 15$

$\therefore\quad \log a=\log\sqrt{15}\qquad\therefore\quad a=\boldsymbol{\sqrt{15}}$

86 (1) $2^{x+2}-2^{-x}+3=0$

$4\cdot(2^x)^2+3\cdot 2^x-1=0$

$(2^x+1)(4\cdot 2^x-1)=0$

$2^x>0$ より，$2^x=2^{-2}$

∴ $\boldsymbol{x=-2}$

(2) 真数>0 ゆえ，$x>6$

このとき，与式は

$$\log_{10}(x+3)(x-6)=\log_{10}10$$

∴ $(x+3)(x-6)=10$

∴ $x^2-3x-28=0$

∴ $(x-7)(x+4)=0$

$x>6$ ゆえ，$x=\boldsymbol{7}$

(3) $x^{2\log_{10}x}=\dfrac{1}{100}x^5$ ……①

真数は正ゆえ，$x>0$

このとき，①の両辺の 10 を底とする対数をとって

$$2(\log_{10}x)^2=5\log_{10}x-2$$

∴ $(2\log_{10}x-1)(\log_{10}x-2)=0$

∴ $\log_{10}x=\dfrac{1}{2}$，2

∴ $\boldsymbol{x=\sqrt{10}，100}$

これは $x>0$ をみたす．

(4) $3^x=X$，$3^y=Y$ とおくと，2 式は

$$X-Y=18，XY=3^5$$

$Y=X-18$ を $XY=3^5$ に代入して

$X^2-18X-3^5=0$

∴ $(X+9)(X-27)=0$

$X>0$ ゆえ，$X=3^x=3^3$ ∴ $\boldsymbol{x=3}$

$Y=3^y=3^2$ ∴ $\boldsymbol{y=2}$

87 (1) $(2^x)^2-4\leqq 2(4\cdot 2^x-8)$

$(2^x)^2-8\cdot 2^x+12\leqq 0$

$(2^x-2)(2^x-6)\leqq 0$

∴ $2\leqq 2^x\leqq 6$

∴ $\boldsymbol{1\leqq x\leqq \log_2 6}$

(2) $\log_2 x+\log_2(x-1)\leqq 1$

真数>0 ゆえ，$x>1$

このとき，与式は

$$\log_2 x(x-1)\leqq \log_2 2$$

∴ $x(x-1)\leqq 2$

∴ $(x-2)(x+1)\leqq 0$

$x+1>0$ ゆえ，$x\leqq 2$

∴ $\boldsymbol{1<x\leqq 2}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}x^2<(\log_{\frac{1}{2}}x)^2$

真数>0 ゆえ，$x>0$

このとき，与式は

$$2\log_{\frac{1}{2}}x<(\log_{\frac{1}{2}}x)^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}x(\log_{\frac{1}{2}}x-2)>0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}x<0，\log_{\frac{1}{2}}x>2$$

∴ $\boldsymbol{x>1，0<x<\dfrac{1}{4}}$

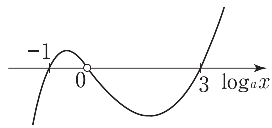
(4) x，a はともに真数でともに底だから，$x>0$，$x\neq 1$；$a>0$，$a\neq 1$

このとき，与式の底を a にそろえると

$$\log_a x-\frac{3}{\log_a x}>2$$

∴ $\dfrac{(\log_a x+1)(\log_a x-3)}{\log_a x}>0$

∴ $\log_a x(\log_a x+1)(\log_a x-3)>0$



∴ $-1<\log_a x<0$，$3<\log_a x$

∴ $\log_a\dfrac{1}{a}<\log_a x<\log_a 1$，

$\log_a a^3<\log_a x$

ゆえに

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a<1} \text{ のとき，} \\ \qquad \boldsymbol{1<x<\dfrac{1}{a}，0<x<a^3} \\ \boldsymbol{a>1} \text{ のとき，} \boldsymbol{\dfrac{1}{a}<x<1，a^3<x} \end{cases}$$

(5) 真数>0 ゆえ，

$x>0$ かつ $\log_2 x-1>0$

∴ $x>2$

このとき，与式は

$\log_9(\log_2 x-1)\leqq \log_9 9^{\frac{1}{2}}$ より

$\log_2 x-1\leqq 3$ ∴ $\log_2 x\leqq 4$

∴ $x\leqq 2^4=16$

∴ $\boldsymbol{2<x\leqq 16}$

88 $1<a<b<a^2$ より，底 a の対数をとると $1<\log_a b<2$

このとき

$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ より

$$\frac{1}{2}<\log_b a<1$$

$\log_a\dfrac{a}{b}=1-\log_a b$ より

$$-1<\log_a\frac{a}{b}<0$$

$\log_b\dfrac{b}{a}=1-\dfrac{1}{\log_a b}$ より

$$0<\log_b\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{\log_a\dfrac{a}{b}<\log_b\dfrac{b}{a}<\log_b a<\log_a b}$

90-1　29^{100} は 147 桁なので

$$146\leqq\log_{10}29^{100}<147$$

$\therefore$ $1.46\leqq\log_{10}29<1.47$

$\therefore$ $33.58\leqq\log_{10}29^{23}<33.81$

よって，29^{23} は **34 桁**

90-2　$1.25=\dfrac{5}{4}=\dfrac{10}{2^3}$

$\therefore$ $\log_{10}(1.25)^n=n(1-3\log_{10}2)$

$=n(1-3\times0.3010)$

$=n\times0.0970$

$(1.25)^n$ の整数部分が 3 桁となるのは

$2\leqq n\times0.097<3$　$\therefore$ $\dfrac{2}{0.097}\leqq n<\dfrac{3}{0.097}$

$\therefore$ $20.6\cdots\leqq n<30.9\cdots$

よって，n は整数なので $\boldsymbol{21\leqq n\leqq30}$

90-3　$6.25=25\div4=10^2\times2^{-4}$

$\therefore$ $\log_{10}(6.25)^n=n(2-4\log_{10}2)$

$=n(2-4\times0.3010)$

$=n\times0.796$

$(6.25)^n$ の整数部分が 6 桁ゆえ，

$$5\leqq n\times0.796<6$$

$\therefore$ $6.2<n<7.5$

n は自然数なので，$n=7$ である．

$$\left(\frac{1}{8}\right)^7=2^{-21}$$

$\therefore$ $\log_{10}\left(\dfrac{1}{8}\right)^7=-21\times0.3010$

$=-7+0.679$

よって，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^7$ は**小数第 7 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

90-4　(1)　$x=\left(\dfrac{6}{7}\right)^{50}$ とおく．

$\log_{10}x=50(\log_{10}2+\log_{10}3-\log_{10}7)$

$=50(0.3010+0.4771-0.8451)$

$=-3.35=-4+0.65$

よって，**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

(2)　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-0.3010=0.6990$,

$\log_{10}4=2\times0.3010=0.6020$

$\therefore$ $\log_{10}4<0.65<\log_{10}5$

よって，小数第 4 位に現れる数字は **4**

第6章

91-1 (1) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{2x+1}{x+3}\to\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}\ (x\to1)$

(2) $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)}{x}$

$=\dfrac{(x^2-x+1)-(x+1)^2}{x(\sqrt{x^2-x+1}+x+1)}$

$=\dfrac{-3}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}$

$\to\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}\ (x\to0)$

(3) $x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}\,x)$

$=\dfrac{x^3(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x}$

$=\dfrac{x^3(\sqrt{x^4+1}-x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x}$

$=\dfrac{x^3(x^4+1-x^4)}{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}\,x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)}$

$=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}+1\right)}$

$\to\boldsymbol{\dfrac{1}{4\sqrt{2}}}\ (x\to\infty)$

91-2 与式が成立するためには

$\lim\limits_{x\to1}(x^3+3ax^2+b)=0$

$\therefore\ b=-3a-1$ ……①

であることが必要．①のとき

左辺$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3ax^2-3a-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3-1)+3a(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\{x^2+x+1+3a(x+1)\}$

$=6a+3$

与えられた条件は，①のもとで

$6a+3=-3\quad\therefore\ a=-1$

であることと同値である．よって

$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$

91-3 第1式が成立するためには，

$\lim\limits_{x\to1}(ax^3+bx^2+cx+d)=0$

$\therefore\ a+b+c+d=0$ ……①

であることが必要．

①のとき，第1式の左辺

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x^3-1)+b(x^2-1)+c(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{3a+2b+c}{3}$

$\therefore\ \dfrac{3a+2b+c}{3}=1$ ……②

同様にして，第2式から

$-8a+4b-2c+d=0$ ……③

であることが必要で

$\dfrac{12a-4b+c}{-3}=4$ ……④

与えられた条件は，①かつ③のもとで，②かつ④であることと同値である．すなわち，①，②，③，④を連立させて，

$\boldsymbol{a=-1,\ b=1,\ c=4,\ d=-4}$

92-1 $f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$

$=f'(1)\times2\quad(\because\ h\to0$ のとき $2h\to0)$

$=3\times2=\boldsymbol{6}$

92-2 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2\{f(a+2h)-f(a)\}}{2h}$

$+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3\{f(a-3h)-f(a)\}}{-3h}$

$=2f'(a)+3f'(a)$

$(\because\ h\to0$ のとき $2h\to0,\ -3h\to0)$

$=5f'(a)=\boldsymbol{5b}$

92-3 $F(x)=af(x)-xf(a)$, $G(x)=ag(x)-xg(a)$ とおく．

$F(a)=0$, $G(a)=0$

また $G'(a)=ag'(a)-g(a)\neq0$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\{F(x)-F(a)\}\div(x-a)}{\{G(x)-G(a)\}\div(x-a)}=\frac{F'(a)}{G'(a)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{af'(a)-f(a)}{ag'(a)-g(a)}}$$

参考 この結果は数学Ⅲでロピタルの定理として一般化される．

94 (1) $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $g(x)$ とすると，余りは 1 次以下だから，

$f(x)=(x-1)^2g(x)+p(x-1)+q$ ……①

とおくことができる．

これを x で微分して

$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+p$ ……②

①，②から　$f(1)=q$, $f'(1)=p$

よって，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは

$f'(1)(x-1)+f(1)$

(2) $L=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=4$ となるためには，$f(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れることが必要である．それは(1)から

余り$=0$：$f'(1)(x-1)+f(1)=0$

∴　$f'(1)=0$ かつ $f(1)=0$

と言い換えられる．

$f(1)=0$：$a+b+c+4=0$ ……③

$f'(1)=0$：$5a+4b+c=0$ ……④

このとき，①は

$f(x)=(x-1)^2g(x)$

であり，

$L=\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

②から

$f''(x)=2g(x)+4(x-1)g'(x)+(x-1)^2g''(x)$

∴　$f''(1)=2g(1)$

$f'(x)=5ax^4+4bx^3+c$

$f''(x)=20ax^3+12bx^2$

より

$L=g(1)=\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}(20a+12b)$

よって，$L=4$ は

$5a+3b=2$ ……⑤

与えられた条件は③，④のもとで⑤であることと同値であるから，

③，④，⑤を解いて

∴　$\boldsymbol{a=-2,\ b=4,\ c=-6}$

95 (1) $y=x^3+x^2-1$ より

$y'=3x^2+2x$

よって，$x=t$ における接線は

$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2-1$

∴　$y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2-1$

これが原点を通る条件は

$2t^3+t^2+1=0$

∴　$(t+1)(2t^2-t+1)=0$

t は実数ゆえ，$t=-1$

よって，求める直線は　$\boldsymbol{y=x}$

(2) $y'=2x$ より，$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$y=2t(x-t)+t^2$　∴　$y=2tx-t^2$

これが，(1, 1) における接線と直交する条件は

$2t\cdot(y')_{x=1}=4t=-1$　∴　$t=-\frac{1}{4}$

よって，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}}$$

別解 先に傾きを求めて，判別式を利用して y 切片を決めてもよい．

96 2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=t$ で接線を共有するとすれば

$$\begin{cases}f(t)=g(t)\\ f'(t)=g'(t)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}t^3-3t^2+3t+2=t^2-kt+4\\ 3t^2-6t+3=2t-k\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} t^3-4t^2+3t-2=-kt & \cdots\cdots① \\ k=-3t^2+8t-3 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より

$$t^3-4t^2+3t-2=t(3t^2-8t+3)$$

$$\therefore \quad t^3-2t^2+1=0$$

$$\therefore \quad (t-1)(t^2-t-1)=0$$

$$\therefore \quad t=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに，②から，

$t=1$ のとき，$k=2$

$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$k=-3(t^2-t-1)+5t-6$$

$$=5\cdot\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}-6=\frac{-7\pm5\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{k=2,\ \frac{-7\pm5\sqrt{5}}{2}}$$

97 (1) $y=x^3-ax$ ……①

点 $P(c,\ c^3-ac)$ における①の接線 T_P の方程式は

$$y=(3c^2-a)(x-c)+(c^3-ac)$$

$$\therefore \quad y=(3c^2-a)x-2c^3 \quad \cdots\cdots②$$

①，②を連立して

$$x^3-3c^2x+2c^3=0$$

$$\therefore \quad (x-c)^2(x+2c)=0$$

$$\therefore \quad x=c,\ -2c$$

$c=-2c$ のとき，$c=0$ で $Q=P$.

$c\neq-2c$ のとき，$Q\neq P$ で

$$Q(-2c,\ -8c^3+2ac)$$

以上より　$\boldsymbol{Q(-2c,\ -8c^3+2ac)}$

(2) 題意より $Q\neq P$ で $c\neq0$. 点Qにおける①の接線 T_Q の傾きは

$$3(-2c)^2-a=12c^2-a$$

よって，

$T_P\perp T_Q \Longleftrightarrow (3c^2-a)(12c^2-a)=-1$

$$\therefore \quad 36c^4-15ac^2+a^2+1=0 \quad \cdots\cdots③$$

$c^2=t$ とおくと，$t>0$ で③は

$$36t^2-15at+a^2+1=0 \quad \cdots\cdots④$$

④の判別式を D とすれば

$$D=9(9a^2-16)$$

また，④の 2 つの解の積は正なので，④は 0 を解にもたない．④の異なる正の解の個数は

$a\leqq0$ または $D<0$ のとき　0 個

$a>0$，$D=0$ のとき　1 個

$a>0$，$D>0$ のとき　2 個

よって，③の異なる実数解の個数，すなわち，求める点Pの個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<\dfrac{4}{3}} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a=\dfrac{4}{3}} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a>\dfrac{4}{3}} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases}$$

98 $C: y=x^2$ ……①

$$y'=2x$$

点 $A(a,\ a^2)$ において，曲線 C の接線と直交する直線の方程式は

$$2a(y-a^2)=-(x-a)$$

これと①を連立して

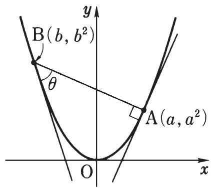
$$2a(x^2-a^2)=-(x-a)$$

$$\therefore \quad (x-a)(2ax+2a^2+1)=0$$

$$\therefore \quad b=-\frac{2a^2+1}{2a} \quad (a\neq0) \quad \cdots\cdots②$$

(1) $a=1$ のとき

$$b=-\frac{3}{2}$$



このとき，直線 AB の傾きを m，点Bにおける接線の傾きを m' とすると

$$m=-\frac{1}{2},\quad m'=-3$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

$$=\left|\frac{-\frac{1}{2}-(-3)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)}\right|=\mathbf{1}$$

(2) ②から

$$|b|=\frac{2a^2+1}{2|a|}=|a|+\frac{1}{2|a|}$$

$$\geqq2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{2|a|}}=\sqrt{2}$$

等号は $|a|=\dfrac{1}{2|a|}$ すなわち，$2a^2=1$

ゆえに，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つから，

$b=\mp\sqrt{2}$ のとき $|b|$ は最小である．

このとき $m=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$m'=\mp2\sqrt{2}$

（複号同順）

$$\therefore\quad \tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\frac{2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+2}$$
$$=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

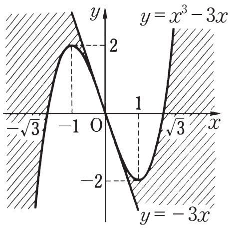
99 曲線上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における接線は

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$
$$\therefore\quad y=3(t^2-1)x-2t^3$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るための条件は，

$$b=3(t^2-1)a-2t^3$$
$$\therefore\quad 2t^3-3at^2+3a+b=0\quad\cdots\cdots①$$

3次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なるので，点 $(a,\ b)$ から曲線に3本の接線がひけるためには，



①が異なる3つの実数解をもつことが必要十分．

そこで，①の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

極値が異符号である条件を求めればよく，それは

$$f(0)f(a)<0$$
$$\therefore\quad (3a+b)(-a^3+3a+b)<0$$

よって，求める存在範囲は

$$(3x+y)(y-x^3+3x)<0$$

であり，図の斜線部分となる．ただし，境界は含まず，$y=-3x$ は $y=x^3-3x$ に原点（変曲点）で接する．

100 $(x+2)^2$，$(x-2)^2$ で $f(x)$ を割ったときの等しい余りを $ax+b$ とおくと，$f(x)-ax-b$ は，x^4 の係数が1の4次式で，$(x+2)^2$，$(x-2)^2$ で割り切れる．したがって

$$f(x)-ax-b=(x+2)^2(x-2)^2$$
$$\therefore\quad f(x)=(x+2)^2(x-2)^2+ax+b$$
$$\therefore\quad f'(x)=2(x+2)(x-2)^2+(x+2)^2\cdot2(x-2)+a$$

$f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れる条件は

$$f(1)=f'(1)=0$$
$$\therefore\quad \begin{cases}9+a+b=0\\6-18+a=0\end{cases}$$
$$\therefore\quad a=12,\quad b=-21$$
$$\therefore\quad f(x)=(x+2)^2(x-2)^2+12x-21$$

直線 $y=12x-21$ は，曲線 $y=f(x)$ と $x=-2$，$x=2$ で接するから，求める直線は $\boldsymbol{y=12x-21}$

101 $f'(x)=3ax^2-2x+(a-2)$

これが負にならない条件を求めればよい．それは

$a>0$ ……① かつ

判別式≦0：$1-3a(a-2)\leqq0$ ……②

②を整理して

$$3a^2-6a-1\geqq0$$
$$\therefore\quad \left(a-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(a-\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\geqq0$$

①とあわせると，求める条件は

$$\boldsymbol{a\geqq\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$$

102-1 $y=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$

$$y'=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$$
$$=4x\{x^2-3(a-1)x+(a^2-1)\}$$

y' の符号が正から負に変わる x が存在するための a の条件を求める．x が十分小さいときは負，十分大きいときは正だから，y' が異なる3つの x で0になることが必要十分である．そのためには，2次方程式

$$x^2-3(a-1)x+(a^2-1)=0$$
が 0 でない，かつ，たがいに異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい．
この条件は 判別式>0 である．

$$\begin{aligned}\text{判別式}&=9(a-1)^2-4(a^2-1)\\&=(a-1)\{9(a-1)-4(a+1)\}\\&=(a-1)(5a-13)\end{aligned}$$

なので，$a<1$ または $\frac{13}{5}<a$ である．
これと $a^2-1\neq0$ から，

$$\boldsymbol{a<-1,\ -1<a<1,\ \frac{13}{5}<a}$$

102-2 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+2x$

$$f'(x)=x^3+ax^2+bx+2 \quad\cdots\cdots①$$

$f(x)$ は $x=-2$ で極値をとるから $f'(-2)=0$．さらに，$f(x)$ は $f'(c)=0$ $(c\neq-2)$ であるが $x=c$ では極値をとらないから

$$f'(x)=(x+2)(x-c)^2$$
$$=x^3+(2-2c)x^2+(c^2-4c)x+2c^2 \quad\cdots\cdots②$$

①，②の係数を比較して

$$a=2-2c,\ b=c^2-4c,\ 2=2c^2$$

以上より，$c=1$ のとき，$\boldsymbol{a=0,\ b=-3}$
$c=-1$ のとき，$\boldsymbol{a=4,\ b=5}$

103-1 $f(x)=x^3+ax^2+2x-2a$
$f'(x)=3x^2+2ax+2$ より，$f(x)$ が 2 つの異なる極値をもつ条件は
$f'(x)=0$ の 判別式>0

$$a^2-6>0 \quad\cdots\cdots①$$

である．
$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{x}{3}+\frac{a}{9}\right)+\frac{2(6-a^2)}{9}x-\frac{20a}{9}$$

ここで，$f'(x)=0$ の解を α，β とすれば，
$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ ゆえ，

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=\frac{2(6-a^2)}{9}(\alpha+\beta)-\frac{40a}{9}\\&=-\frac{4}{27}a(6-a^2)-\frac{40}{9}a\\&=-\frac{4}{27}a(36-a^2)\end{aligned}$$

$f(\alpha)+f(\beta)=0$ となる条件は，①とあわせると　$\boldsymbol{a=\pm6}$

103-2 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$
$f'(x)=9x^2+2ax+b$
α，β は $f'(x)=0$ の異なる 2 つの実数解であるから

$$a^2-9b>0$$

である．このとき，条件(1)より

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\quad \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1$$

$\therefore$ $a=0$，$f(\alpha)+f(\beta)=2$
このとき，

$$f(x)=3x^3+bx+c\ (b<0)$$

であり，$f(x)$ を
$f'(x)=9x^2+b$ で割ると

$$f(x)=f'(x)\cdot\frac{x}{3}+\left(\frac{2b}{3}x+c\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(\alpha)+f(\beta)&=\frac{2b}{3}(\alpha+\beta)+2c\\&=2c\end{aligned}$$

であり，$2c=2$
$\therefore$ $c=1$
$b<0$ より $\alpha<\beta$ とすれば

$$\alpha=-\frac{\sqrt{-b}}{3},\quad \beta=\frac{\sqrt{-b}}{3}$$

ゆえ，条件(2)と

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)|&=\left|\frac{2b}{3}(\alpha-\beta)\right|\\&=\left|-\frac{4b}{9}\sqrt{-b}\right|\\&=\frac{4}{9}(\sqrt{-b}\,)^3\end{aligned}$$

から

$$\frac{4}{9}\sqrt{(-b)^3}=\frac{4}{9}$$

$\therefore$ $b=-1$
$\therefore$ $\boldsymbol{a=0,\ b=-1,\ c=1}$

103-3 (1) α, β は極値を与える x の値だから,

$$f'(x)=0$$
$$\therefore\quad 3x^2+2ax+b=0$$

の 2 つの解である．解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3},\quad \alpha\beta=\frac{b}{3}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta),\ b=3\alpha\beta}$$

(2) $f(\gamma)=f(\alpha)=k$ とおくと，方程式 $f(x)-k=0$ は $x=\alpha$ を重解，γ を他の解としてもち，$f(x)$ の x^3 の係数は 1 だから

$$f(x)-k=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$$
$$\therefore\quad f'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$$
$$=(x-\alpha)(3x-2\gamma-\alpha)$$

$f'(\beta)=0$ で $\alpha\neq\beta$ ゆえ，$3\beta=2\gamma+\alpha$

$$\therefore\quad 2(\gamma-\beta)=\beta-\alpha$$
$$\therefore\quad (\gamma-\beta):(\beta-\alpha)=\boldsymbol{1:2}$$

104 (1) $f(x)=3x^2-ax^3$ より,

$$f'(x)=6x-3ax^2=3x(2-ax)$$

$a\leqq0$ のとき，$f'(x)\geqq0$ $(0\leqq x\leqq2)$ より，最小値 $f(0)=0$ となり不適.

$0<a\leqq1$ のとき，$\dfrac{2}{a}\geqq2$ ゆえ,

$f'(x)=3ax\left(\dfrac{2}{a}-x\right)\geqq0$ $(0\leqq x\leqq2)$ で,

やはり最小値 $f(0)=0$ となり不適.

$a>1$ のとき，$0<\dfrac{2}{a}<2$ より $f(x)$ は

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{a}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

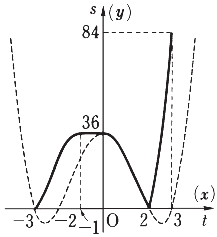
上の表のように増減するから，最小値が -4 である条件は

$$f(2)=-4$$
$$\therefore\quad 12-8a=-4$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a=2}\ (a>1\ をみたす)$$

(2) (1)より，$f(x)=3x^2-2x^3$ の最大値 M は

$$f\left(\frac{2}{a}\right)=f(1)=\boldsymbol{1}$$

105 $y=f(x)$ のグラフは次図の破線のようになり



$t\leqq x\leqq t+1$ $(-3\leqq t\leqq3)$ における $f(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$-3\leqq t\leqq-1$ のとき；$g(t)=f(t+1)$

$t\leqq0\leqq t+1$ すなわち $-1\leqq t\leqq0$ のとき；

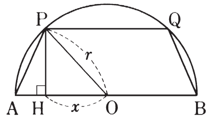
$$g(t)=f(0)=36$$

$0\leqq t\leqq2$ のとき；$g(t)=f(t)$

$2\leqq t\leqq3$ のとき；$g(t)=f(t+1)$

ゆえに，$s=g(t)$ $(-3\leqq t\leqq3)$ のグラフは図における太実線である.

106 AB の中点を O とし，P から AB に下ろした垂線の足を H とする．OH$=x$ とおくと



$$\text{PH}=\sqrt{r^2-x^2},\quad \text{PQ}=2x\ (0<x<r)$$

ゆえに，台形 ABQP の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}(2x+2r)\sqrt{r^2-x^2}$$
$$=\sqrt{(x+r)^2(r^2-x^2)}$$

$f(x)=(x+r)^2(r^2-x^2)$ とおけば

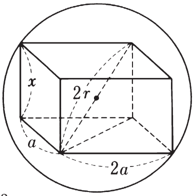
$$f'(x)=2(x+r)(r^2-x^2)-2x(x+r)^2$$
$$=2(x+r)^2(r-2x)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{r}{2}$	$\cdots$	(r)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

増減表より，求める最大値は

$$\sqrt{f\left(\frac{r}{2}\right)}=\frac{3}{2}r\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2}$$

107 (1) 長方形の 2 辺を a, $2a$ とおくと，右図から



$$(2r)^2=(2a)^2+a^2+x^2$$

$$\therefore\quad a^2=\frac{4r^2-x^2}{5}\quad\cdots\cdots①$$

$$\therefore\quad V=2a^2x=\boldsymbol{\frac{2(4r^2-x^2)x}{5}}$$

(2) $V'=\dfrac{2(4r^2-3x^2)}{5}$

①より，$0<x<2r$

V の増減表をつくると，

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$	$\cdots$	$(2r)$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$ のとき V は最大となり，最大値は

$$V_{x=\frac{2\sqrt{3}}{3}r}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}r\left(4r^2-\frac{4r^2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{3}\,r^3}{45}}$$

108-1 $x^3-3ax^2+3=\dfrac{5}{2}$ は，

$$x^3-3ax^2+\frac{1}{2}=0$$

と変形できる．

$f(x)=x^3-3ax^2+\dfrac{1}{2}$ とおき，$f(x)=0$ が，$0\leqq x\leqq 2$ で実数解をもつ a の範囲を求める．

$$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

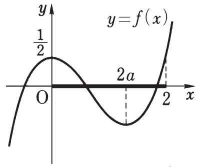
$f(0)=\dfrac{1}{2}$ に注意する．

$a\leqq 0$ のとき，

$f'(x)\geqq 0$ $(x\geqq 0)$ より $0\leqq x\leqq 2$ において $f(x)$ は単調増加であり，不適．

$0<a<1$ のとき，

$0<2a<2$ ゆえ，求める条件は



(0<a<1 のとき)

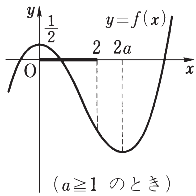
$$f(2a)\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(1-8a^3)\leqq 0$$

$$\therefore\quad a\geqq\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\leqq a<1\quad\cdots①$$

$a\geqq 1$ のとき，$2a\geqq 2$ ゆえ，求める条件は



(a≧1 のとき)

$$f(2)\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{17}{2}-12a\leqq 0$$

$$\therefore\quad a\geqq\frac{17}{24}$$

$$\therefore\quad a\geqq 1\quad\cdots\cdots②$$

①，②より求める a の範囲は，

$$\boldsymbol{a\geqq\frac{1}{2}}$$

108-2 (1) 与えられた条件より

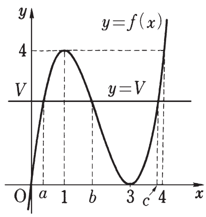
$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ ab+bc+ca=9 \\ abc=V \end{cases}$$

よって，a，b，c $(0<a\leqq b\leqq c)$ は x の3次方程式

$$x^3-6x^2+9x-V=0$$

$$\therefore\quad x^3-6x^2+9x=V$$

の 3 つの正の実数解である．



$f(x)=x^3-6x^2+9x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは上図のようになる．

$f(x)=V$ が 3 つの正の実数解をもつ条件は，$0<V\leqq 4$ で，$V=4$ のとき，

$$x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$\therefore\quad (x-1)^2(x-4)=0$$

$$\therefore\quad x=1,\ 4$$

ゆえに，各辺の長さの動き得る範囲は，

$$\mathbf{0<a\leqq 1\leqq b<3<c\leqq 4}$$

(2) (1)より，$a=b=1$，$c=4$ のとき，V は**最大値 4** をとる．

109 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ を微分して，

$$f'(x)=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)$$

であり，

$$\begin{aligned}&f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3)\\&=(a_1-a_2)(a_1-a_3)\\&\quad\times(a_2-a_1)(a_2-a_3)\\&\quad\times(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\&=-(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_3-a_1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ D=(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_3-a_1)^2=(-1)\times f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3)$$

一方，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\\&=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x-a_1a_2a_3\\&=x^3+px-q\end{aligned}$$

であるから，

$$f'(x)=3x^2+p$$

$$\therefore\ f'(a_j)=3a_j{}^2+p\quad(j=1,\ 2,\ 3)$$

また，$f(a_j)=a_j{}^3+pa_j-q=0$ より

$$a_j{}^2=-p+\frac{q}{a_j}\quad(\because\ q\neq 0\ \text{より}\ a_j\neq 0)$$

であり

$$f'(a_j)=3\left(-p+\frac{q}{a_j}\right)+p=-2p+\frac{3q}{a_j}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{3q}{a_1}\right)\left(x-\frac{3q}{a_2}\right)\left(x-\frac{3q}{a_3}\right)\\&=x^3-\frac{3q(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)}{a_1a_2a_3}x^2+\frac{9q^2(a_1+a_2+a_3)}{a_1a_2a_3}x-\frac{27q^3}{a_1a_2a_3}\\&=x^3+(-3p)x^2+(0)x+(-27q^2)\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}D&=-f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3)\\&=-\left(-2p+\frac{3q}{a_1}\right)\left(-2p+\frac{3q}{a_2}\right)\left(-2p+\frac{3q}{a_3}\right)\\&=\left(2p-\frac{3q}{a_1}\right)\left(2p-\frac{3q}{a_2}\right)\left(2p-\frac{3q}{a_3}\right)\\&=(2p)^3-3p(2p)^2-27q^2\\&=-4p^3-27q^2\end{aligned}$$

(答) ア　$\mathbf{-1}$　イ　$\boldsymbol{-2p}$　ウ　$\boldsymbol{3q}$
エ　$\boldsymbol{-3p}$　オ　$\mathbf{0}$　カ　$\boldsymbol{-27q^2}$
キ　$\boldsymbol{-4p^3-27q^2}$

110-1 $f(x)=x^3-ax+1$ とおく．

$$f'(x)=3x^2-a$$

(i) $a\leqq 0$ のとき，つねに $f'(x)\geqq 0$ であり，$f(x)$ は単調増加．
$f(0)=1$ であるから，$x\geqq 0$ においては，$f(x)\geqq 0$ であり，条件をみたす．

(ii) $a>0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}+1=1-2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

であるから

$x\geqq 0$ において，つねに $f(x)\geqq 0$
$\iff$ $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最小値$\geqq 0$
$\iff$ $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\geqq 0$

$a>0$ であるから，この条件は

$0<a\leqq\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ と同値である．

(i)，(ii)をまとめて　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}}$

110-2 $f(x)=x^3-a(x^2-a)$ がすべての $x\geqq 0$ について，負とならない条件を考えればよい．

$$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$$

(i) $a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ で $f'(x)\geqq 0$，
また $f(0)=a^2\geqq 0$
よって，$x\geqq 0$ で $f(x)\geqq 0$ が成り立つ．

(ii) $a>0$ のとき，増減表は次のようになり

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{8}{27}a^3-\frac{4}{9}a^3+a^2$$
$$=\frac{4}{27}a^2\left(\frac{27}{4}-a\right)$$

これが $x\geqq 0$ における最小値で，これが負でないことが条件である．

$$\therefore\quad 0<a\leqq\frac{27}{4}$$

(i)，(ii)あわせて，$\boldsymbol{a\leqq\frac{27}{4}}$

第7章

114 条件(ii)より

$$f'(x)=ax(x-1)-3$$
$$=ax^2-ax-3$$

と実数 $a\ (\neq 0)$ を用いて表すことができる．
条件(iii)より，$f(x)$ は極大値，極小値をもつから，$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ．よって，
(判別式)>0 であり

$$a^2+12a>0$$
$$\therefore\quad a<-12,\ 0<a \quad\cdots\cdots①$$

また，$|f(\beta)-f(\alpha)|=\beta-\alpha \quad\cdots\cdots②$
ここで

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

であり

$$\beta-\alpha$$
$$=\left|\frac{a+\sqrt{a^2+12a}}{2a}-\frac{a-\sqrt{a^2+12a}}{2a}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+12a}}{|a|}$$

である．これらを②に代入して

$$\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}=\beta-\alpha$$
$$\therefore\quad |a|(\beta-\alpha)^2=6$$
$$\therefore\quad |a+12|=6 \qquad \therefore\quad a=-6,\ -18$$

①より，$a=-18$

$$\therefore\quad f'(x)=-18x^2+18x-3$$
$$\therefore\quad f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=-6x^3+9x^2-3x+C$$

（Cは定数）

条件(i)より　$f(0)=1$　　$\therefore\quad C=1$
以上より $\boldsymbol{f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1}$

116-1 (1) (i) $t\leqq -1$ のとき，
$-1\leqq x\leqq 1$ の全域で $x\geqq t$ となるから

$$f(t)=\int_{-1}^{1}(x-t)\,dx=-\int_{-1}^{1}t\,dx=-2t$$

(ii)　$-1<t<1$ のとき，x が -1 から 1 まで変わるとき，途中で t との大小が入れかわり，

$-1\leqq x\leqq t$ で $|x-t|=t-x$,

$t\leqq x\leqq 1$ で $|x-t|=x-t$

$$\therefore\quad f(t)=\int_{-1}^{t}(t-x)\,dx+\int_{t}^{1}(x-t)\,dx$$

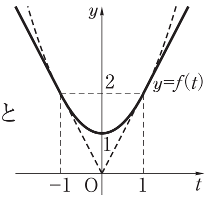
$$=\left[tx-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{t}+\left[\frac{x^2}{2}-tx\right]_{t}^{1}$$

$$=t^2+1$$

(iii)　$1\leqq t$ のとき，$-1\leqq x\leqq 1$ の全域で　$x\leqq t$

$$\therefore\quad f(t)=\int_{-1}^{1}(t-x)\,dx=2t$$

(i)，(ii)，(iii)から右図の太線が得られる．



$y=t^2+1$ と $y=\pm 2t$ を連立すると

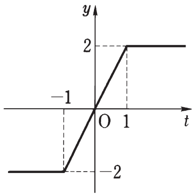
$(t\mp 1)^2=0$

$t=\pm 1$ (重解)

ゆえ，直線と放物線は $t=\pm 1$ で接する．

(2)　(1)から $f'(t)$

$$=\begin{cases}-2 & (t<-1)\\ 2t & (-1<t<1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$



$t=1$ では，$t<1$ 側の接線が $t>1$ の直線と一致するので，

$f'(1)=2$　同様にして，$f'(-1)=-2$

よって，$y=f'(t)$ のグラフは上のようになる．

116-2　$t^3-t=(t+1)t(t-1)$ ゆえ，

$t\leqq -1$，$0\leqq t\leqq 1$ で　$t^3-t\leqq 0$；

$-1\leqq t\leqq 0$，$t\geqq 1$ で　$t^3-t\geqq 0$

$-1\leqq x\leqq 1$ より

$$\begin{cases}-1\leqq -x\leqq 1\\ 0\leqq 1-x\leqq 2\end{cases}$$

である．積分区間 $-x\leqq t\leqq 1-x$ の中に $t=0$，1 があるか否かで場合分けする．

(i)　$-1\leqq -x\leqq 0\leqq 1-x\leqq 1$

(すなわち $0\leqq x\leqq 1$) のとき

$$f(x)=\int_{-x}^{0}(t^3-t)\,dt+\int_{0}^{1-x}-(t^3-t)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1-x}$$

$$=-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\therefore\quad f'(x)=-x^3+x-(x-1)^3+(x-1)$$

$$=-x(x-1)(2x-1)$$

(ii)　$0\leqq -x\leqq 1\leqq 1-x$

(すなわち $-1\leqq x\leqq 0$) のとき

$$f(x)=\int_{-x}^{1}-(t^3-t)\,dt+\int_{1}^{1-x}(t^3-t)\,dt$$

$$=\left[-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{1}+\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{(x-1)^4}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\therefore\quad f'(x)=x^3-x+(x-1)^3-(x-1)$$

$$=x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2-2x)$$

$$=x(x-1)(2x-1)$$

よって，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	

最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)$，最大値は $f(-1)$，$f(1)$ のうち小さくない方である．

$$f(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4-2=\frac{9}{4}$$

$$f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{64}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$$

これより，$f(x)$ の**最大値は $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$，最小値は $\boldsymbol{\frac{7}{32}}$**

117　(1)　$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\,dx=k$ (定数)　……①

とおくと

$$f(x)=x^3-2x+k \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して，

$$k=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-2x+k)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1+k\right)$$
$$\therefore \quad k=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=x^3-2x-\frac{3}{4}}$$

(2) $2\int_0^1|f(t)|dt=k \quad \cdots\cdots①$

とおくと，k は $k\geqq 0$ である．

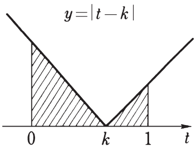
$$f(x)=x-k \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して，

$$2\int_0^1|t-k|dt=k \quad \cdots\cdots(*)$$

$0\leqq k\leqq 1$ のとき，(*)の左辺は下図の2つの三角形の面積の和なので

$$2\left\{\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=k$$



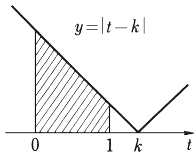
$\therefore \quad 2k^2-3k+1=0$

$\therefore \quad k=1,\ \dfrac{1}{2}$

$k>1$ のとき，(*)の左辺は下図の台形の面積なので

$$2\cdot\frac{1}{2}\{k+(k-1)\}\cdot 1=k \qquad \therefore \quad k=1$$

これは $k>1$ をみたさないから不適．



$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=x-1,\ x-\frac{1}{2}}$

(3) $\int_{-1}^1(x-t)^2f(t)dt$

$$=x^2\int_{-1}^1f(t)dt-x\int_{-1}^1 2tf(t)dt+\int_{-1}^1t^2f(t)dt$$

であり

$\int_{-1}^1f(t)dt=a,\ \int_{-1}^1 2tf(t)dt=b,$

$\int_{-1}^1t^2f(t)dt=c \quad \cdots\cdots①$とおくと

$$f(x)=x^3+(1+a)x^2-bx+c$$

これを用いると，①の3式は，

$$a=\int_{-1}^1f(t)dt=2\int_0^1\{(1+a)t^2+c\}dt$$
$$=\frac{2(1+a)}{3}+2c$$
$$b=\int_{-1}^1 2tf(t)dt=2\int_0^1(2t^4-2bt^2)dt$$
$$=\frac{4}{5}-\frac{4}{3}b$$
$$c=\int_{-1}^1t^2f(t)dt=2\int_0^1\{(1+a)t^4+ct^2\}dt$$
$$=\frac{2(1+a)}{5}+\frac{2c}{3}$$

となる．

これから $a=-\dfrac{46}{31},\ b=\dfrac{12}{35},\ c=-\dfrac{18}{31}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=x^3-\frac{15}{31}x^2-\frac{12}{35}x-\frac{18}{31}}$$

(4) $\int_{-1}^1f(t)dt=k \quad \cdots\cdots①$とおくと，

$$g(x)=x^2-x+k$$
$$\therefore \quad f(x)=1+\int_0^x(t^2-t+k)dt$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+kx+1$$

これを①に代入して

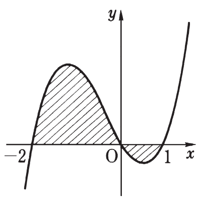
$$k=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+kt+1\right)dt$$
$$=2\int_0^1\left(-\frac{1}{2}t^2+1\right)dt=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{3}x+1,}$$
$$\boldsymbol{g(x)=x^2-x+\frac{5}{3}}$$

118 (1) 与式は

$y=x(x+2)(x-1)$

と変形される．求める面積は

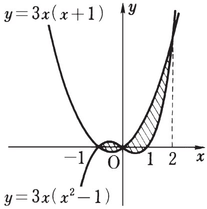


$$\int_{-2}^0(x^3+x^2-2x)dx-\int_0^1(x^3+x^2-2x)dx$$

$=\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{1}$

$=\dfrac{8}{3}+\dfrac{5}{12}=\boldsymbol{\dfrac{37}{12}}$

(2) $3x(x^2-1)$
$-3x(x+1)$
$=3x(x+1)(x-2)$
より，2 曲線の上下関係は右図のようになる．ゆえに，求める面積は



$\displaystyle\int_{-1}^{0}\{3x(x^2-1)-3x(x+1)\}\,dx$

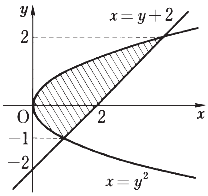
$\displaystyle+\int_{0}^{2}\{3x(x+1)-3x(x^2-1)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}(3x^3-3x^2-6x)\,dx$

$\displaystyle-\int_{0}^{2}(3x^3-3x^2-6x)\,dx=\frac{5}{4}+8$

$=\boldsymbol{\dfrac{37}{4}}$

(3) $y^2=x$ と $y=x-2$ を連立すると $y^2=y+2$
∴ $y=-1,\ 2$
よって，求める面積は



$\displaystyle\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}\,dy$

$=\left[-\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

119 (1) 直線の方程式は
$y-4=a(x-2)$
∴ $y=ax+4-2a$
曲線の方程式 $y=(x-1)^2+2$ と直線の方程式を連立すると
$ax+4-2a=(x-1)^2+2$
∴ $x^2-(a+2)x+(2a-1)=0$ ……①
①の左辺を $f(x)$ とおく．
$f(x)=0$ の方程式の判別式は
$(a+2)^2-4(2a-1)=(a-2)^2+4>0$
よって，$f(x)=0$ の解 $\alpha,\ \beta$ はつねに異なる実数である．$\alpha<\beta$ とする．
$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解でき，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $f(x)\geqq 0$ ゆえ，求める面積は

$\displaystyle S=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\alpha,\ \beta$ は $\dfrac{a+2\pm\sqrt{D}}{2}$ ゆえ，$\beta-\alpha=\sqrt{D}$

∴ $S=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\{(a-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}}$

(2) (1)より S が最小となる a の値は，
$a=\boldsymbol{2}$

120 (1) $Q_1(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q_2(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，点 Q_1 における接線の方程式は
$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$
∴ $y=2\alpha x-\alpha^2$
となり，これが $P(a,\ a-1)$ を通るから
$a-1=2\alpha a-\alpha^2$ ……①
点 Q_2 についても同様に，
$a-1=2\beta a-\beta^2$ ……②
①−②より $\alpha+\beta=2a$ ……③
①＋②，③より $\alpha\beta=a-1$ ……④
ここで，直線 Q_1Q_2 の方程式は
$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$
∴ $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$
よって，

$\displaystyle S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}\,dx$

$\displaystyle =\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

③，④より $\alpha,\ \beta$ は，2 次方程式
$t^2-2at+a-1=0$
の解であり
$t=a\pm\sqrt{a^2-a+1}$
であるから
$\beta-\alpha=2\sqrt{a^2-a+1}$
∴ $S=\dfrac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a+1}\,)^3$

$$=\frac{4}{3}(\sqrt{a^2-a+1})^3$$

(2)　$S=\dfrac{4}{3}\left\{\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\right\}^3$

$$\geqq\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\left(\text{等号は } a=\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right)$

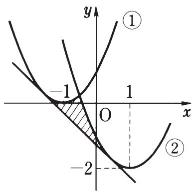
これより，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は**最小値** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる．

121　(1)　l の方程式を $y=mx+n$ とおく．l の方程式と①を連立して

$$(x+1)^2=mx+n$$

$\therefore\quad x^2+(2-m)x+(1-n)=0\quad\cdots③$

接する条件は，(③の判別式)$=0$，すなわち



$(2-m)^2-4(1-n)=0$

$\therefore\quad m^2-4m+4n=0\quad\cdots\cdots④$

同様に，l の方程式と②を連立させて

$x^2-(m+2)x-(n+1)=0\quad\cdots\cdots⑤$

(⑤の判別式)$=0$ から

$m^2+4m+4n+8=0\quad\cdots\cdots⑥$

⑥−④より

$8m+8=0\qquad\therefore\quad m=-1$

$\therefore\quad n=-\dfrac{5}{4}\qquad l:\boldsymbol{y=-x-\dfrac{5}{4}}$

(2)　③，⑤の重解はそれぞれ

$$x=\frac{m}{2}-1=-\frac{3}{2},\quad x=\frac{m}{2}+1=\frac{1}{2}$$

また，①，②の交点の x 座標は，

$$x=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，求める面積を S とすれば

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}\{(x+1)^2-(mx+n)\}dx$$
$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{(x-1)^2-2-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

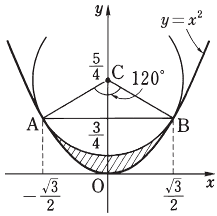
別解　①の $x=\alpha$ における接線と②の $x=\beta$ における接線：

$y=2(\alpha+1)x-\alpha^2+1,$

$y=2(\beta-1)x-\beta^2-1$

が一致する条件を考え，係数を比較してもよい．

123　2 曲線の方程式から x を消去して



$y+(y-p)^2=1$

$\therefore\quad y^2-(2p-1)y+p^2-1=0\cdots\cdots①$

これらが異なる 2 点で共通接線をもつ条件は (判別式)$=0$ すなわち

$(2p-1)^2-4(p^2-1)=0$

$\therefore\quad -4p+5=0\qquad\therefore\quad p=\dfrac{5}{4}$

このとき，①は

$$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=0\qquad\therefore\quad y=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，円の中心をCとすれば

$\sin\angle\mathrm{OCB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad\angle\mathrm{OCB}=60^\circ$

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx$$
$$-(\text{扇形 CAB}-\text{三角形 CAB})$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$
$$-\left(\frac{120}{360}\pi-\frac{1}{2}\sin 120^\circ\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$$

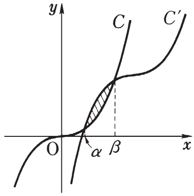
124 (1) C と

C'：$y=(x-a)^3+a$

の方程式を連立して

$$x^3=(x-a)^3+a$$

$$\therefore\quad 3x^2-3ax+a^2-1=0\quad\cdots\cdots①$$



よって，C と C' が異なる 2 点で交わる条件は

$$D>0\quad\therefore\quad -3(a^2-4)>0$$

$a>0$ より　$\mathbf{0<a<2}$

(2) ①の解 $\dfrac{3a\pm\sqrt{12-3a^2}}{6}$

を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とすれば

$$S=\int_\alpha^\beta\{(x-a)^3+a-x^3\}dx$$

$$=-3a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3a\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{-6}=\frac{a}{2}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{12-3a^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\mathbf{\sqrt{3}}}{\mathbf{18}}\boldsymbol{a}(\mathbf{4}-\boldsymbol{a}^2)^{\frac{3}{2}}$$

(3) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{a^2(4-a^2)^3}$ において

$4-a^2=t$ とおくと，$0<t<4$ であり，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{(4-t)t^3}$$

となる．$f(t)=(4-t)t^3$ とおくと

$$f'(t)=12t^2-4t^3$$
$$=4t^2(3-t)$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	27	↘	

$4-a^2=3$ となる a は $0<a<2$ より $a=1$ である．

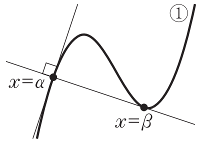
$\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$ のとき，S の**最大値は** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

125-1 $y=\dfrac{1}{18}x^3-\dfrac{4}{3}x\quad\cdots\cdots①$

$$y'=\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}$$

$x=\beta$ における①の接線を $y=mx+n$ とすると，ある実数 α に対して

$$\frac{1}{18}x^3-\frac{4}{3}x-(mx+n)$$
$$=\frac{1}{18}(x-\alpha)(x-\beta)^2$$



が成り立つ．x^2 の係数を比較すると

$$0=\alpha+2\beta$$
$$\therefore\quad \alpha=-2\beta$$

よって，$x=\beta$，-2β における接線が直交する条件は

$$\left(\frac{1}{6}\beta^2-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\beta^2-\frac{4}{3}\right)=-1$$

$$\therefore\quad \beta^4-10\beta^2+25=0\quad\therefore\quad \beta=\pm\sqrt{5}$$

①は原点対称だから，$\beta=\sqrt{5}$ のときを考えればよい．

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{18}x^3-\frac{4}{3}x-(mx+n)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{18}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5})^4}{3^3\cdot 8}=\frac{\mathbf{75}}{\mathbf{8}}$$

125-2 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく．

P$(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 l を $y=px+q$，$y=f(x)$ と l の交点Qの座標を $(\beta,\ f(\beta))$ とすると

$$f(x)-(px+q)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

となる実数 α が存在する．x^2 の係数を比較すると

$$2\alpha+\beta=-a\quad\cdots\cdots①$$

l と C の囲む部分の面積 S_1 は

$$S_1=\left|\int_\alpha^\beta\{(x^3+ax^2+bx+c)-(px+q)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right|=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

点Qにおける接線 m が C と交わる点の x 座標を γ とすれば，β と γ の間には①と同じように

$$2\beta+\gamma=-a \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．また，m と C が囲む部分の面積 S_2 は，S_1 と同じように

$$S_2=\frac{(\beta-\gamma)^4}{12}$$

①−②から，$\beta-\gamma=2(\beta-\alpha)$

したがって，$S_2=\dfrac{2^4(\beta-\alpha)^4}{12}=16S_1$

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{16} \text{（一定）}$$

第8章

127-1 a_n は n について単調であるから，S_n が $n=8$ で最大となることから

$$S_7<S_8 \text{ かつ } S_8>S_9$$

よって，$a_8>0$ かつ $a_9<0$

したがって，

$a+7d>0$ ……① かつ $a+8d<0$ …②

また，$S_8=136$ より，

$$\frac{8}{2}(2a+7d)=136$$

$$\therefore \quad 2a+7d=34 \quad \cdots\cdots③$$

③から

$$a=17-\frac{7}{2}d \quad \cdots\cdots③'$$

③′を①，②に代入すれば，

$$-\frac{34}{7}<d<-\frac{34}{9}$$

d は整数であるから，$d=-4$

このとき，$a=31$（整数）となる．

したがって，$\boldsymbol{a=31,\ d=-4}$

127-2 $(x+1)^n$ の展開式の x^4，x^5，x^6 の係数は，それぞれ ${}_n\mathrm{C}_4$，${}_n\mathrm{C}_5$，${}_n\mathrm{C}_6$ であり，この順に等差数列をなしていることより，

$$2{}_n\mathrm{C}_5={}_n\mathrm{C}_4+{}_n\mathrm{C}_6$$

$$\therefore \quad 2\cdot\frac{n!}{5!(n-5)!}$$

$$=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$$

両辺に $\dfrac{6!(n-4)!}{n!}$ をかけて

$$2\cdot6(n-4)=5\cdot6+(n-5)(n-4)$$

よって，$(n-7)(n-14)=0$

したがって，$n=7$ または $n=14$

$\boldsymbol{n=7}$ のとき，**公差** ${}_7\mathrm{C}_5-{}_7\mathrm{C}_4=\boldsymbol{-14}$

$\boldsymbol{n=14}$ のとき，**公差** ${}_{14}\mathrm{C}_5-{}_{14}\mathrm{C}_4=\boldsymbol{1001}$

128-1

$$a_n=\overbrace{111\cdots11}^{n}$$

$$=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$$

$$=1+10+\cdots+10^{n-2}+10^{n-1}$$

$$=\frac{10^n-1}{10-1}=\mathbf{\frac{10^n-1}{9}}$$

$$S=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$
$$=\mathbf{\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}}$$

128-2 $a_n=(5^n+4\cdot5^{n-1}+4^2\cdot5^{n-2}+\cdots+4^{n-1}\cdot5+4^n)+4^{n+1}$

$$=5^n\left\{1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}+4^{n+1}$$
$$=5^n\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}+4^{n+1}$$
$$=(5^{n+1}-4^{n+1})+4^{n+1}$$
$$=5^{n+1}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は**初項 25，公比 5** である．

128-3 a，b，c の順に等比数列であるから

$$b^2=ac \quad\cdots\cdots①$$

c，a，b の順に等差数列であるから

$$2a=c+b \quad\cdots\cdots②$$

a，b，c の和が 6 であるから

$$a+b+c=6 \quad\cdots\cdots③$$

①，②，③および，a，b，c が相異なることから

$$(a,\ b,\ c)=\mathbf{(2,\ -4,\ 8)}$$

129-1 積立金を a 円とする．

最初の年に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$a(1+0.012)^{10}$ (円)

2 年目に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$a(1+0.012)^9$ (円)

…………

10 年目に預けた a 円は 10 年目の終わりには

$a(1+0.012)$ (円)

となる．ゆえに，

$$a(1+0.012)+a(1+0.012)^2+\cdots+a(1+0.012)^{10}=1000000$$

左辺は初項 $1.012a$，公比 1.012 の等比数列の第 10 項までの和であるから，

$$1.012a\times\frac{(1.012)^{10}-1}{1.012-1}=1000000$$
$$\therefore\quad 1.012a\times(1.13-1)=12000$$
$$\therefore\quad a=\frac{12000}{1.012\times0.13}=91213.1\cdots$$

したがって，100 円未満を切り上げると **91300 円**積立てればよい．

129-2 (1) 対数はすべて常用対数とする．

$$\log1.024=\log\frac{1024}{1000}=\log\frac{2^{10}}{10^3}=10\log2-3$$
$$=10\times0.30103-3=\mathbf{0.0103}$$

(2) $1000\times(1.024)^n>2000$

$$\therefore\quad (1.024)^n>2 \quad\cdots\cdots①$$

をみたす最小の自然数 n が求めるものである．

①の両辺の常用対数をとり，(1)の結果を用いると，

$$n\log1.024>\log2$$
$$\therefore\quad n>\frac{0.30103}{0.0103}=29.2\cdots$$

よって，負債が 2000 万円を超えるのは **30 年後**である．

(3) (借入金の元利合計)

≦(返済額の元利合計)

をみたす最小の自然数 n を求めればよい．

(左辺)$=1000\times(1.024)^n$

(右辺)$=48+48\times1.024+\cdots+48\times(1.024)^{n-1}$

$$=48\cdot\frac{(1.024)^n-1}{1.024-1}$$
$$=2000\{(1.024)^n-1\}$$

であるから，上の不等式は

$$(1.024)^n\geqq2 \quad\cdots\cdots②$$

となる．②は①と等号だけの違いなので，

(2)の結果と同じく，返済完了するのは **30 年後**である．

別解　漸化式を立ててもよい．n 年後の負債残高を a_n (万円) とすると

$$a_{n+1}=1.024a_n-48$$

これは $a_{n+1}-2000=1.024(a_n-2000)$

と変形される．$a_0=1000$ であるから

$$a_n-2000=(1000-2000)(1.024)^n$$
$$=-1000(1.024)^n$$

$a_n\leqq 0$ となるのは

$$2000-1000\times(1.024)^n\leqq 0$$
$$\therefore\quad 2\leqq(1.024)^n$$

以下同じ．

130-1 (1)　k の恒等式

$$(k+1)^5-k^5$$
$$=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

において，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$$

これから，

$$(n+1)^5-1^5$$
$$=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n$$

よって，

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4$$
$$=(n+1)^5-1-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-n$$
$$=(n+1)^5-1-10\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$-10\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\boldsymbol{\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　(1)と同様にして，k の恒等式

$$(k+1)^6-k^6$$
$$=6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1$$

において　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$　として辺々加えると，

$$(n+1)^6-1^6=6\sum_{k=1}^{n}k^5+15\sum_{k=1}^{n}k^4+20\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$+15\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+n$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}(n+1)^6-\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}k^4$$
$$+(n\ \text{の 4 次以下の式})\quad\cdots\cdots②$$

①と②より

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}(n^6+6n^5)$$
$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}n^5+(n\ \text{の 4 次以下の式})$$
$$=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+(n\ \text{の 4 次以下の式})$$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^5$ は n について 6 次式であり，**6 次の項の係数は $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$，5 次の項の係数は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$** である．

130-2 (1)　(右辺)

$$=\frac{a}{n(n+1)}+\frac{2b}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\frac{(a+2b)n+3a}{n(n+1)(n+3)}$$

左辺の分子と比較して　$\begin{cases}a+2b=0\\3a=1\end{cases}$

よって，$a=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$，$b=\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

(2)　$\displaystyle S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{n}{3(n+1)}-\frac{5n^2+13n}{36(n+2)(n+3)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(7n^2+42n+59)}{36(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

130-3 $\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$$
$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

より，

与式

$$=\sum_{k=1}^{n-2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{n}-\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ & \sqrt{4}-\sqrt{3} \\ & \vdots \\ & \sqrt{n-1}-\sqrt{n-2} \\ +) & \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \\ \hline & \sqrt{n}-\sqrt{2} \end{array}$$

131-1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{2^k}=S$ とする．

$$\begin{array}{rl} S= & \dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{2^2}+\cdots+\dfrac{3n}{2^n} \\ -)\ \dfrac{1}{2}S= & \dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3(n-1)}{2^n}+\dfrac{3n}{2^{n+1}} \\ \hline \dfrac{1}{2}S= & \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{3n}{2^{n+1}} \end{array}$$

よって，

$$S=3\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right\}-\frac{3n}{2^n}$$
$$=3\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{3n}{2^n}$$
$$=6\cdot\frac{2^n-1}{2^n}-\frac{3n}{2^n}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3(2^{n+1}-n-2)}{2^n}}$$

131-2

$$\begin{array}{rl} S_{100}= & 1+2\cdot\dfrac{1}{2}+\cdots+100\cdot\dfrac{1}{2^{99}} \\ -)\ \dfrac{1}{2}S_{100}= & 1\cdot\dfrac{1}{2}+\cdots+99\cdot\dfrac{1}{2^{99}}+100\cdot\dfrac{1}{2^{100}} \\ \hline \dfrac{1}{2}S_{100}= & 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{99}}-100\cdot\dfrac{1}{2^{100}} \end{array}$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{100}{2^{100}}$$
$$=2-\frac{51}{2^{99}}$$

これより

$$S_{100}=4-\frac{51}{2^{98}}$$

$0<\dfrac{51}{2^{98}}<1$ であるから

$$3<S_{100}<4$$

よって，求める整数は **3**

131-3 (1)　$50=32+16+2$

$=2^5+2^4+2$

$=1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0$

より

$$\begin{cases} a_1=a_3=a_4=a_7=a_8=\boldsymbol{0}, \\ a_2=a_5=a_6=\boldsymbol{1} \end{cases}$$

(2)　$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ となるのは，a_1，a_2，…，a_n のうちの 1 つが 1 で，他はすべて 0 のときである．

a_k のみ 1 とすると

$$\sum_{i=1}^{n}a_i2^{i-1}=2^{k-1}$$

であるから，求める要素の和は，

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\boldsymbol{2^n-1}$$

(3)　$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ となるのは，a_1，a_2，…，a_n のうちの 2 つが 1 で，他はすべて 0 のときである．

a_j，a_k のみ 1 とすると

$$\sum_{i=1}^{n}a_i2^{i-1}=2^{j-1}+2^{k-1}$$

であるから，求める要素の和は

$$\sum_{1\leqq j<k\leqq n}(2^{j-1}+2^{k-1})$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(2^{j-1}+2^{k-1})$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left\{(n-j)2^{j-1}+2^j\cdot\frac{2^{n-j}-1}{2-1}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\{2^n+(n-j-2)2^{j-1}\}$$

$$=(n-1)2^n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j-2)2^{j-1}$$

ここで，$T_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}(n-j-2)2^{j-1}$ とおくと

$$T_{n-1}=(n-3)+(n-4)2+(n-5)2^2+\cdots+(-1)\cdot 2^{n-2}$$

$$2T_{n-1}=(n-3)2+(n-4)2^2+\cdots+0\cdot 2^{n-2}+(-1)\cdot 2^{n-1}$$

2 式の差をつくると

$$-T_{n-1}=(n-3)-2-2^2-\cdots-2^{n-2}+2^{n-1}$$

$$=n-2-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+2^{n-1}=n-1$$

よって，求める和は

$(n-1)2^n-(n-1)=\boldsymbol{(n-1)(2^n-1)}$

別解　$a_j=1$ ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) のとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ をみたす S_n の要素の和は(2)より，

$$\{(2^n-1)-1\cdot 2^{j-1}\}+(n-1)2^{j-1}$$

$$=(2^n-1)+(n-2)2^{j-1}$$

j を $1\leqq j\leqq n$ の範囲で動かすと

$$\sum_{j=1}^{n}\{(2^n-1)+(n-2)2^{j-1}\}$$

$$=(2^n-1)n+(n-2)\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=2(n-1)(2^n-1)$$

この和は，$a_1+a_2+\cdots+a_n=2$ をみたす S_n の要素を 2 回ずつ加えたものであるから，求める和は $(n-1)(2^n-1)$

132-1

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & & 4 & & 7 & & 11 & & 16 & & \cdots \\ & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & \cdots \end{array}$$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とおく．

第 1 階差 $\{b_n\}$ は初項 2，公差 1 の等差数列であり，$b_{44}=45$ である．よって

$$a_{45}=a_1+(2+3+4+\cdots+45)$$

$$=2+\frac{44(2+45)}{2}=\mathbf{1036}$$

132-2　(1)　$\frac{1}{a_1}=3$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

より数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列である．

よって，$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 1=n+2$ より

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{n+2}}$$

(2)　$b_1=a_1a_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}=\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

より，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{1}{12}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3(n+3)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，$b_n=\boldsymbol{\frac{n}{3(n+3)}}$

133-1　$a_1=S_1=-1+21+65=85$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=-n^3+21n^2+65n$$

$$-\{-(n-1)^3+21(n-1)^2+65(n-1)\}$$

$$=-3n^2+45n+43$$

この結果は，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，$a_n=\boldsymbol{-3n^2+45n+43}$

133-2　(1)　$S_1=a_1=2$ と(＊)より

$$2(S_2+2)=(S_2-2)^2$$

$$\therefore\ S_2(S_2-6)=0$$

各項が正より $S_2>S_1=2$ であり，

$$S_2=\mathbf{6}$$

$S_2=6$ と(＊)より

$$2(S_3+6)=(S_3-6)^2$$

$$\therefore\ (S_3-2)(S_3-12)=0$$

各項が正なので $S_3>S_2=6$ であり，

$$S_3=\mathbf{12}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$2(S_{n+1}+S_n)=(S_{n+1}-S_n)^2$　……①

$2(S_n+S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2$　……②

①−② から
$$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2$$
$\therefore\ \ 2(a_{n+1}+a_n)=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$
$a_{n+1}+a_n>0$ より
$$a_{n+1}-a_n=2 \quad \cdots\cdots③$$
ここで，$a_2=S_2-a_1=6-2=4$ より
$$a_2-a_1=4-2=2$$
よって，③は $n=1$ のときも成り立つ．
$\{a_n\}$ は初項 2，公差 2 の等差数列であるから
$$a_n=2+2(n-1)=\boldsymbol{2n}$$
別解 (1)の結果から，
$S_n=n(n+1)$ ……(＊＊) と予想される．
これを数学的帰納法によって示す．
(Ⅰ) $n=1$ のとき，$S_1=2$ より (＊＊) は成り立つ．
(Ⅱ) $n=k$ のとき (＊＊) が成り立つ，すなわち，$S_k=k(k+1)$ であるとする．
$2(S_{k+1}+S_k)=(S_{k+1}-S_k)^2$ より
$$S_{k+1}{}^2-2(S_k+1)S_{k+1}+S_k(S_k-2)=0$$
これに (＊＊) を代入して，
$$S_{k+1}{}^2-2(k^2+k+1)S_{k+1}+k(k+1)(k-1)(k+2)=0$$
よって，
$$\{S_{k+1}-(k-1)k\}\{S_{k+1}-(k+1)(k+2)\}=0$$
各項が正なので $S_{k+1}>S_k=k(k+1)$ であり
$$S_{k+1}=(k+1)(k+2)$$
となり，$n=k+1$ のときも (＊＊) は成り立つ．
(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての n について (＊＊) は成り立つ．
$n\geqq2$ のとき
$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n(n+1)-(n-1)n\\&=2n\end{aligned}$$
この結果は $n=1$ のときも成り立つ．
よって，$a_n=2n$

134-1 (1) 第 k 項は k なので，
$$\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41=\mathbf{2870}$$
(2) 求める総和を S とする．
$$\begin{aligned}&(1+2+\cdots+20)^2\\&=1^2+2^2+\cdots+20^2\\&\quad+2\{1\cdot2+1\cdot3+\cdots+(n-1)\cdot n\}\\&=1^2+2^2+\cdots+20^2+2S\end{aligned}$$
ここで，(1)の結果と
$$(1+2+\cdots+20)^2=\left(\frac{20\cdot21}{2}\right)^2=44100$$
より
$$44100=2870+2S$$
よって，$S=\mathbf{20615}$
(3) 求める総和を T とする．
$$\begin{aligned}&(1+2+\cdots+20)(1^2+2^2+\cdots+20^2)\\&=(1^3+2^3+\cdots+20^3)+T\end{aligned}$$
ここで，
$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+20^3&=\frac{1}{4}\cdot20^2\cdot21^2\\&=44100\end{aligned}$$
$\therefore\ \ 210\cdot2870=44100+T$
よって，$T=210\cdot2870-44100$
$\qquad=\mathbf{558600}$

134-2 $a_1=S_1=3-5=-2$ であり，
$k\geqq2$ のとき
$$\begin{aligned}a_k&=S_k-S_{k-1}\\&=(3k^2-5k)-\{3(k-1)^2-5(k-1)\}\\&=6k-8\end{aligned}$$
この結果は $k=1$ のときも成り立つ．
よって，$a_k=\boldsymbol{6k-8}$
$b_1=T_1=4+1=5$ であり，
$k\geqq2$ のとき
$$\begin{aligned}b_k&=T_k-T_{k-1}\\&=(4k^2+k)-\{4(k-1)^2+(k-1)\}\\&=8k-3\end{aligned}$$
この結果は $k=1$ のときも成り立つ．
よって，$b_k=\boldsymbol{8k-3}$
また，
$$\begin{aligned}a_kb_k&=2(3k-4)(8k-3)\\&=2(24k^2-41k+12)\end{aligned}$$
よって，
$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

$$=2\left\{24\sum_{k=1}^{n}k^2-41\sum_{k=1}^{n}k+12n\right\}$$
$$=8n(n+1)(2n+1)-41n(n+1)+24n$$
$$=n(\mathbf{16n^2-17n-9})$$

次に，$i\neq j$ とするとき，求める和

$\displaystyle\sum_{i=1,j=1}^{n}a_ib_j$ は

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$

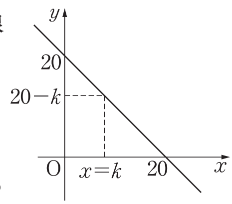
である．ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(6k-8)$$
$$=3n(n+1)-8n$$
$$=n(3n-5)$$
$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(8k-3)$$
$$=4n(n+1)-3n$$
$$=n(4n+1)$$

(求める和)

$$=n(3n-5)\cdot n(4n+1)-n(16n^2-17n-9)$$
$$=n(\mathbf{12n^3-33n^2+12n+9})$$

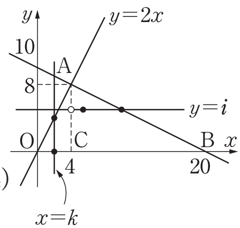
135 (1) 直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ 上の格子点は $0\leqq y\leqq 20-k$ より $(21-k)$ 個ある．



よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\frac{21}{2}(21+1)$$
$$=\mathbf{231}\ \textbf{(個)}$$

(2) 右図において，△AOC 内 (周も含む) において，直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$ 上の格子点は



$0\leqq y\leqq 2k$ より $(2k+1)$ 個であり，△ACB 内 (辺 AC は含まず，端点 A，C を除く他の辺は含む) において，直線 $y=i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 7)$ 上の格子点は $5\leqq x\leqq 20-2i$ より $(20-2i)-4=16-2i$ (個) である．

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1)+\sum_{i=0}^{7}(16-2i)$$
$$=\frac{5}{2}(1+9)+\frac{8}{2}(16+2)=\mathbf{97}\ \textbf{(個)}$$

136 (1) $a+b=k+1$ となる組 $(a,\ b)$ をまとめて第 k 群とよぶことにする．

第 1 群	第 2 群	第 3 群	
(1, 1)	(2, 1), (1, 2)	(3, 1), (2, 2), (1, 3)	…

第 k 群には k 個の自然数の組があるから，200 番目に現れる組が第 k 群にあるとすると

$$1+2+3+\cdots+(k-1)<200$$
$$\leqq 1+2+3+\cdots+(k-1)+k$$
$$\therefore\quad \frac{(k-1)k}{2}<200\leqq\frac{k(k+1)}{2}$$
$$\therefore\quad (k-1)k<400\leqq k(k+1)$$

$19\cdot20=380$，$20\cdot21=420$ より，$k=20$

$\dfrac{19\cdot20}{2}=190$ より，200 番目は第 20 群の $200-190=10$ (番目) にあるから，求める組は

$$\mathbf{(11,\ 10)}$$

(2) $(m,\ n)$ は第 $(m+n-1)$ 群の n 番目の組であるから，これは

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}\ \textbf{番目}$$

に現れる．

137-1 次のような群数列を対応させて求める．

第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群	
1	2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9, 10	…

(1) $a_{m,1}$ は第 m 群の初項である．第 k 群には k 個の項があるから，

$$a_{m,1}=\{1+2+\cdots+(m-1)\}+1$$
$$=\frac{1}{2}(m-1)m+1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(m^2-m+2)}$$

(2)　$a_{m,n}$ は第 $m+n-1$ 群の n 番目であるから，

$$a_{m,n}=\{1+2+\cdots+(m+n-2)\}+n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}$$

137-2

	37	36	35	34	33	32	31	x_4
	38	17	16	15	14	13	30	
	39	18	5	4	3	12	29	
	40	19	6	1	2	11	28	
	41	20	7	8	9	10	27	
	42	21	22	23	24	25	26	
y_4	43	44	45	46	47	48	49	

(1)　1，1〜9，1〜25，1〜49，… はそれぞれ 1 を中心に 1 辺に 1 個，3 個，5 個，7 個，…が並ぶ正方形内にあり，その右下端にその中の最大の数があるので，49 の右斜め下の数は $9^2=\boldsymbol{81}$

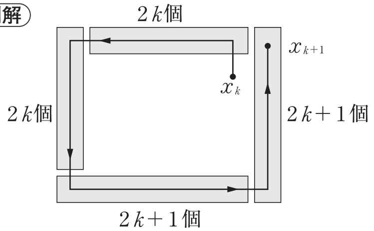
(2)　1 から x_n は，横 $2n$，縦 $2n-1$ の長方形内にあるので，

$$x_n=\boldsymbol{2n(2n-1)}$$

同様に，1から y_n は，横 $2n+1$，縦 $2n$ の長方形内にあるので，

$$y_n=\boldsymbol{2n(2n+1)}$$

別解



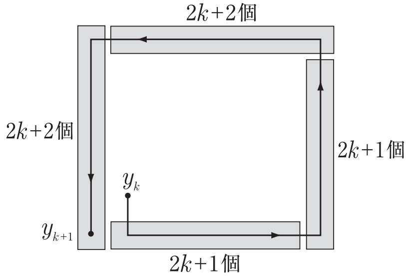
上図より，x_k から x_{k+1} までの間に $8k+2$ 増えるから，

$n\geqq 2$ のとき，

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+2)$$
$$=2+\frac{(n-1)\{10+(8n-6)\}}{2}$$
$$=2+(n-1)(4n+2)$$
$$=4n^2-2n$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

同じく，y_k から y_{k+1} までの間に $8k+6$ 増えるから，



$n\geqq 2$ のとき，

$$y_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+6)$$
$$=6+\frac{(n-1)\{14+(8n-2)\}}{2}$$
$$=6+(n-1)(4n+6)$$
$$=4n^2+2n$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

138-1　与式は

$$a_{n+1}-6=\frac{1}{3}(a_n-6)$$

と変形される．

数列 $\{a_n-6\}$ は，初項 $a_1-6=7-6=1$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n-6=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n=\boldsymbol{6+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

138-2　(1)　$S_n=-5+2n-a_n\ (n\geqq 1)$ ……①

$$S_{n+1}=-5+2(n+1)-a_{n+1}\ (n\geqq 0)$$

$$\cdots\cdots②$$

②−① より

$$a_{n+1}=2-a_{n+1}+a_n$$

したがって，$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1}$ $(\boldsymbol{n\geqq1})$

(2)　①において，$n=1$ とおくと，

$$a_1=-5+2-a_1$$

したがって，$a_1=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$

(3)　(1)の関係式は

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$ と変形されるから，

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって，$a_n=\boldsymbol{2-7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

138-3　(1)　$a_1=1>0$ であることと，与えられた漸化式の形から，すべての n に対して $a_n>0$ である（厳密には数学的帰納法を用いる）．

両辺の逆数をとることができて，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{a_n}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}+3$$

よって，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3}$$

(2)　(1)の結果は $b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ と変形されるから，

$$b_n+3=(b_1+3)\cdot2^{n-1}=4\cdot2^{n-1}$$

よって，$b_n=2^{n+1}-3$

これより，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{2^{n+1}-3}}$$

139-1　(1)　$a_{n+1}-a_n=3^n+2n$

であるから，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3^k+2k)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=1+\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+(n-1)n$$

$$=\frac{3^n}{2}+(n-1)n-\frac{1}{2}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{3^n}{2}+(n-1)n-\frac{1}{2}}$$

(2)　与式の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

となる．$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad b_1=\frac{6}{2}=3$$

よって，$n\geqq2$ のとき，

$$b_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=3+\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=3+\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

$$a_n=2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\boldsymbol{3^n+3\cdot2^{n-1}}$$

別解　**1.** 与式の両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

となる．$\frac{a_n}{3^n}=c_n$ とおくと，

$$c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{3}$$

これは

$$c_{n+1}-1=\frac{2}{3}(c_n-1)$$

と変形される．数列 $\{c_n-1\}$ は初項 $c_1-1=\frac{6}{3}-1=1$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，

$$c_n-1=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{a_n}{3^n}-1=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=3^n+3\cdot2^{n-1}$$

2. $a_{n+1}=2a_n+3^n$ ……①

$\alpha3^{n+1}=2\cdot\alpha3^n+3^n$ ……②

②がどんな自然数nに対しても成り立つのは

$3\alpha=2\alpha+1$ より，$\alpha=1$ のときである．

$\alpha=1$ として①，②の辺々をひくと

$$a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$$

が得られる．

$$a_n-3^n=(a_1-3)\cdot2^{n-1}=3\cdot2^{n-1}$$

これより，

$$a_n=3^n+3\cdot2^{n-1}$$

139-2 $a_1=1>0$ であることと，与えられた漸化式の形から，すべての自然数nに対して，$a_n>0$ である（厳密には数学的帰納法を用いる）．よって，両辺の逆数をとることができて

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{na_n+2}{a_n}=2\cdot\frac{1}{a_n}+n$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，

$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n+n$ ……①

次にすべての自然数nに対して

$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+n$ ……②

となるように，α，βを定めると，

$$\alpha=-1,\ \beta=-1$$

①−②より，$b_{n+1}=2b_n+n$ は

$$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$$

と変形される．

よって，数列 $\{b_n+n+1\}$ は初項 $b_1+1+1=3$，公比 2 の等比数列であるから，

$$b_n+n+1=3\cdot2^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$$

したがって，$a_n=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3\cdot2^{n-1}-n-1}}$

140 (1) $a_{n+2}-pa_{n+1}$

$=q(a_{n+1}-pa_n)$ ……(*)

$$a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n=0$$

であるから，どんなnに対しても成り立つ条件は，与式と比較して

$$p+q=2,\ pq=-1$$

である．p，qは，解と係数の関係より

$t^2-2t-1=0$ の解 $t=1\pm\sqrt{2}$

であり，$p<q$ より

$$\boldsymbol{p=1-\sqrt{2},\ q=1+\sqrt{2}}$$

(2) (*)より，

$$c_{n+1}=qc_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．

また，(*)において，pとqを入れかえた等式も成り立つことから，

$$d_{n+1}=pd_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

も成り立つ．

これらより数列 $\{c_n\}$ は公比 q，初項 $c_1=a_2-pa_1=2-p=q$ の等比数列，数列 $\{d_n\}$ は公比 p，初項pの等比数列である．

よって，

$$c_n=q\cdot q^{n-1}=\boldsymbol{(1+\sqrt{2})^n}$$

$$d_n=p\cdot p^{n-1}=\boldsymbol{(1-\sqrt{2})^n}$$

(3) (2)の結果から

$$\begin{cases}a_{n+1}-pa_n=q^n\\ a_{n+1}-qa_n=p^n\end{cases}$$

これより，$-(p-q)a_n=q^n-p^n$

ここで，$-(p-q)=2\sqrt{2}$

であるから，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}$$

141-1 (1) $a_{n+1}+tb_{n+1}$

$=(2a_n+b_n)+t(4a_n-b_n)$

$=(2+4t)a_n+(1-t)b_n$

より，

$$a_{n+1}+tb_{n+1}=k(a_n+tb_n)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(2+4t)a_n+(1-t)b_n=ka_n+ktb_n$$

これが任意のnに対して成り立つ条件は，

$$\begin{cases}2+4t=k & \cdots\cdots①\\ 1-t=kt & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①を②に代入して，

$$1-t=t(2+4t)$$
$$\therefore\quad 4t^2+3t-1=0$$
$$\therefore\quad (t+1)(4t-1)=0$$
$$\therefore\quad t=-1,\ \frac{1}{4}$$

これより，$(t_1,\ k_1)$，$(t_2,\ k_2)$ は

$$\boldsymbol{(-1,\ -2),\ \left(\frac{1}{4},\ 3\right)}$$

(2) (1)で求めた組 $(t,\ k)$ に対して数列 $\{a_n+tb_n\}$ は公比 k の等比数列であるから，

$$a_n+tb_n=(a_1+tb_1)k^{n-1}$$

$(t_1,\ k_1)=(-1,\ -2)$ に対し

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot(-2)^{n-1}$$
$$=\boldsymbol{-3\cdot(-2)^{n-1}}$$

$(t_2,\ k_2)=\left(\frac{1}{4},\ 3\right)$ に対し

$$a_n+\frac{1}{4}b_n=\left(a_1+\frac{1}{4}b_1\right)\cdot 3^{n-1}=\boldsymbol{2\cdot 3^{n-1}}$$

(3) (2)の結果を連立して，

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{5}\{8\cdot 3^{n-1}-3\cdot(-2)^{n-1}\}}$$
$$\boldsymbol{b_n=\frac{4}{5}\{2\cdot 3^{n-1}+3\cdot(-2)^{n-1}\}}$$

141-2

(1) $a_{n+1}+2b_{n+1}$
$=(a_n+4b_n)+2(a_n+b_n)=3(a_n+2b_n)$
$a_1=b_1=1$ より，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=1+2\cdot 1=3$，公比 3 の等比数列であるから，

$$a_n+2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

(2) $b_n=\dfrac{3^n-a_n}{2}$ を $a_{n+1}=a_n+4b_n$ に代入すると，

$$a_{n+1}=a_n+4\cdot\frac{3^n-a_n}{2}$$
$$\therefore\quad a_{n+1}=-a_n+2\cdot 3^n \quad\cdots\cdots(*)$$

すべての自然数 n に対して

$$p3^{n+1}=-p3^n+2\cdot 3^n$$

が成り立つのは $p=\dfrac{1}{2}$ のときであるから，(*)は，

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}=-\left(a_n-\frac{1}{2}\cdot 3^n\right)$$

と変形できる．

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\cdot 3^n\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$，公比 -1 の等比数列であるから，

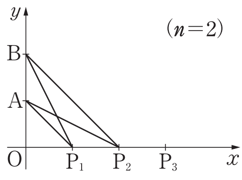
$$a_n-\frac{1}{2}\cdot 3^n=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$$

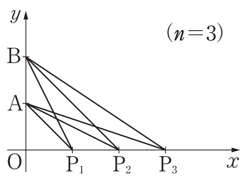
よって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}}$

別解 **1.** $a_{n+1}=-a_n+2\cdot 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割る，あるいは，$(-1)^{n+1}$ で割ることにより(*)を解くこともできる．

2. $\alpha=\dfrac{\alpha+4}{\alpha+1}$ を解くと $\alpha=\pm 2$ なので，(1)の数列 $\{a_n+2b_n\}$ と数列 $\{a_n-2b_n\}$ をあわせて考える．
$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$ より，
$a_n-2b_n=(-1)^n$．これと(1)の結果を連立して，$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$ を得る．

142





(1) 右図から $\boldsymbol{a_2=6}$，$\boldsymbol{a_3=10}$

(2) 線分 AP_1，…，AP_n，BP_1，…，BP_n によって，第1象限が a_n 個の部分に分けられているとき，線分 AP_{n+1} をひけば，この線分はすでにある n 本の線分 BP_1，…，BP_n と交わって，$n+1$ 個の部分に分けられる．この $n+1$ 個の部

分1つ1つに対応して，第1象限の部分が1つずつ増える．さらに BP_{n+1} をひくことで，第1象限の部分がさらに1個増える．よって，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+(n+2)}$$

(3) $a_1=3$ である．(2)より，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)$$
$$=1+2+\{3+4+\cdots+n+(n+1)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

この結果は $n=1$ のときも成り立つ．

143-1 最初に平面と接していた面を A とおく．

(1) $n=1$ のとき；1回目の操作で A は底面でなくなるから，

$$p_1=\boldsymbol{0}$$

$n=2$ のとき；1回目の操作で A は底面にないので，2回目の操作で A が底面にくるためには回転軸の選び方が3本のうちの1つに確定される．

$$p_2=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$n=3$ のとき；2回目の操作で A は底面になく，3回目の操作で A が底面にくるときであるから，

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) $(n+1)$ 回目に A が平面と接するのは，n 回目の操作で A は底面になく，$(n+1)$ 回目の操作で A が底面にくるときであるから，

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$$

この漸化式は

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

と変形されるから，

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

143-2 各列の○または×のつけ方は $2^2=4$（通り）あるから，$2\times n$ のマス目の○または×のつけ方は 4^n 通りである．
少なくとも1つの列に○が2つ並ぶ並び方 P_1，P_2 は

$n=1$ のとき：$\begin{array}{|c|}\hline \bigcirc \\ \hline \bigcirc \\ \hline\end{array}$ だけであり，$P_1=1$

$n=2$ のとき：$\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \\ \hline \bigcirc & \\ \hline\end{array}$ のとき2列目は任意に取れて4通り，さらに

$\begin{array}{|c|c|}\hline \times & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \bigcirc \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline \times & \bigcirc \\ \hline \times & \bigcirc \\ \hline\end{array}$，$\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \bigcirc \\ \hline \times & \bigcirc \\ \hline\end{array}$ の3通りがあるから，$P_2=4+3=7$

また，$2\times(n+1)$ のマス目の少なくとも1つの列に○が2つ並ぶのは

(i) $2\times n$ のマス目の少なくとも1つの列に○が2つ並んでいるとき（第 $(n+1)$ 列目は任意）．

(ii) $2\times n$ のマス目のどの列も○が2つ並ばず（(4^n-P_n) 通り），第 $(n+1)$ 列目は○が2つ並んでいるとき．

の2通りがある．

(i)，(ii) は排反であるから，

$$P_{n+1}=P_n\times 4+(4^n-P_n)\times 1$$
$$=3P_n+4^n$$

である．○と×をそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率でつけるとすると，4^n 通りは等確率で起こるから，$q_n=\frac{P_n}{4^n}$ である．

q_{n+1} を q_n の式で表すと

$$q_{n+1}=\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{4}$$

であり，この漸化式は

$q_{n+1}-1=\frac{3}{4}(q_n-1)$ と変形される．

$q_1=\frac{1}{4}$ なので

$$q_n-1=(q_1-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad q_n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(答)　ア　$\mathbf{4^n}$　イ　**1**　ウ　**7**

エ　$\mathbf{3P_n+4^n}$　オ　$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{q_n}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

カ　$\mathbf{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$

144-1　1度に3段おりてしまうことをしない場合の最上段から n 段おりる場合の数を a_n とすると

(i)　最後に1段おりるとき

最上段から n 段おりる場合の数は

a_{n-1} 通り

(ii)　最後に2段おりるとき

最上段から n 段おりる場合の数は

a_{n-2} 通り

であるから，

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n\geqq 3)$$

よって，$a_1=1$，$a_2=2$ とから

$$a_3=a_2+a_1=3$$
$$a_4=a_3+a_2=5$$
$$a_5=a_4+a_3=8$$
$$a_6=a_5+a_4=13$$
$$a_7=a_6+a_5=21$$
$$a_8=a_7+a_6=34$$
$$a_9=a_8+a_7=55$$

となる．

また，残りがちょうど3段となって，最後に3段おりるおり方の数は最上段から $9-3=6$（段）おりる場合の数 $a_6=13$ であるから，求める場合の数は

$55+13=$ **68（通り）**

144-2

(1)　$n=3$ のとき，
球：1 2 3　1 2 3
箱：1 2 3　1 2 3

上図より　$u_3=\mathbf{2}$

$n=4$ のとき，
1 2 3 4 / 1 2 3 4 の型と 1 2 3 4 / 1 2 3 4 の型

があり，それぞれの場合の数を加えると，

$u_4=3+6=\mathbf{9}$

(2)　“球 x を箱 y に入れる” ことを $f(x)=y$ と書く．$f(1)=a\ (\neq 1)$ とすると a のとり方は $2,\ 3,\ \cdots,\ n+1$ の n 通り．

(i)　$f(a)=1$ のとき，球1，a を除いた残り $n-1$ 個の入れ方は u_{n-1} 通り．

(ii)　$f(a)\neq 1$ のとき，球 a を箱1に入れることができないのだから，箱1を箱 a と考え $2\sim n+1$ の n 個の球の入れ方を考えればよいので u_n 通りある．よって，

$$u_{n+1}=n(u_{n-1}+u_n)=\boldsymbol{nu_n+nu_{n-1}}$$

(3)

$$\begin{aligned}u_{n+1}-(n+1)u_n&=-u_n+nu_{n-1}\\&=-(u_n-nu_{n-1})\end{aligned}$$

であるから $\{u_{n+1}-(n+1)u_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は公比 -1 の等比数列であり，

$$u_{n+1}-(n+1)u_n=(u_2-2u_1)(-1)^{n-1}$$

$u_1=0$，$u_2=1$ だから，

$$u_{n+1}=\boldsymbol{(n+1)u_n+(-1)^{n-1}}$$

参考　これは攪乱(かくらん)順列（完全順列）とよばれているもので，u_n はモンモール数という．

(3)の結果式において $(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$ より，両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{u_n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{u_n}{n!}=\frac{u_1}{1!}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}=0+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

（$k=i+1$ とおいた）

$$\therefore\quad u_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\quad(n\geqq 2)$$

145　(1)　$(x+1)^n$

$=(x^2-2x-2)Q(x)+a_nx+b_n$　……①

とおく．①の両辺に $(x+1)$ をかけて

$$\begin{aligned}&(x+1)^{n+1}\\&=(x^2-2x-2)(x+1)Q(x)\\&\quad+a_nx(x+1)+b_n(x+1)\\&=(x^2-2x-2)(x+1)Q(x)\end{aligned}$$

$$+a_n(x^2-2x-2)$$
$$+(3a_n+b_n)x+(2a_n+b_n)$$

これより，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=3a_n+b_n} \quad \cdots\cdots②$$
$$\boldsymbol{b_{n+1}=2a_n+b_n} \quad \cdots\cdots③$$

(2) ②より $b_n=a_{n+1}-3a_n$

$$b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$$

これらを③に代入して

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_n+(a_{n+1}-3a_n)$$

$\therefore$ $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$

$$=4(4a_n-a_{n-1})-a_n$$
$$(\because \quad a_{n+1}=4a_n-a_{n-1})$$
$$=15a_n-5a_{n-1}+a_{n-1}$$
$$=5(3a_n-a_{n-1})+a_{n-1}$$

これより a_{n+2} と a_{n-1} は 5 で割った余りが等しい．n は任意なので a_{n+3} と a_n は 5 で割った余りも等しい．

ここで，$a_1=b_1=1$ より

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=15$$

であるから，a_n を 5 で割った余りは

$$\begin{cases} \boldsymbol{n=3m} \text{ のとき } \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{n=3m-1} \text{ のとき } \boldsymbol{4} \quad (\boldsymbol{m=1,\ 2,\ \cdots}) \\ \boldsymbol{n=3m-2} \text{ のとき } \boldsymbol{1} \end{cases}$$

(3) すべての n に対し

$$a_{n+1}+tb_{n+1}=s(a_n+tb_n)$$

となる s が存在するような t を求めればよい．

②，③から，

$$a_{n+1}+tb_{n+1}$$
$$=(3a_n+b_n)+t(2a_n+b_n)$$
$$=(3+2t)a_n+(1+t)b_n$$

となる．これがすべての n で $s(a_n+tb_n)$ に等しくなるためには

$$\begin{cases} 3+2t=s \\ 1+t=st \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} 3+2t=s \\ 1+t=(3+2t)t \end{cases}$$

となればよい．

これより，

$$2t^2+2t-1=0$$

よって，$t=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(4) (3)の結果から

$$s=3+2t=2\pm\sqrt{3}$$

また，

$$a_n+tb_n=(a_1+tb_1)s^{n-1}$$
$$=(1+t)s^{n-1}$$

ここで，$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ とおくと，

$$a_n+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}b_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\alpha^{n-1} \quad \cdots\cdots④$$

$$a_n+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}b_n=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\beta^{n-1} \quad \cdots\cdots⑤$$

④，⑤から，

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n-\beta^n)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}}$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\alpha^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\beta^{n-1}\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n-1}-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{n-1}\}}$$

146-1 (I) $n=1$ のとき，

$$(\text{与式の左辺})=\frac{1}{1^3}=1$$

$$(\text{与式の右辺})=2-\frac{1}{1^2}=1$$

となり成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r^3}\leqq 2-\frac{1}{k^2} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つとする．

$(*)$の両辺に

$\dfrac{1}{(k+1)^3}$ を加えると，

$$\sum_{r=1}^{k+1}\frac{1}{r^3}\leqq 2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}$$

であり，かつ

$$2-\frac{1}{(k+1)^2}-\left\{2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}\right\}$$
$$=\frac{-k^2(k+1)+(k+1)^3-k^2}{k^2(k+1)^3}$$

$$=\frac{k^2+3k+1}{k^2(k+1)^3}>0$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)よりすべての自然数 n に対して与式が成り立つ．

146-2 (1)　$a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$

より，

$$a_2=\frac{4}{1+1}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{9}{4}},$$

$$a_3=\frac{4}{2+1}+\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{16}{9}},$$

$$a_4=\frac{4}{3+1}+\frac{9}{16}=\boldsymbol{\frac{25}{16}}$$

これより，$a_n=\left(\boldsymbol{\dfrac{n+1}{n}}\right)^2$ と予想される．

(2)　(Ⅰ)　$n=1$ のときは $\left(\dfrac{1+1}{1}\right)^2=4$

となり，成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ で成り立つと仮定すると

$$a_k=\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$n=k+1$ のとき，

$$a_{k+1}=\frac{4}{k+1}+\frac{1}{a_k}$$

$$=\frac{4}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$=\frac{4(k+1)+k^2}{(k+1)^2}$$

$$=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2$$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての自然数 n に対して(1)の予想が正しいことが示された．

147-1 (1)　α，β は $x^2-kx+2=0$ の2解であるから，

$$\alpha^2=k\alpha-2$$

$$\beta^2=k\beta-2$$

2式の両辺にそれぞれ α^n，β^n をかけて加えると，

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$$

$$=k(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-2(\alpha^n+\beta^n)$$

$$\therefore\quad a_{n+2}=ka_{n+1}-2a_n$$

よって，$a_{n+2}=ra_{n+1}+sa_n$ をみたす定数 r，s の組の1つは

$$(r,\ s)=(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{-2})$$

(2) • a_n ($n=1,\ 2,\ \cdots$) は整数であること：

(Ⅰ)　$n=1,\ 2$ のとき，$a_1=\alpha+\beta=k$

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=k(\alpha+\beta)-4=k^2-4$$

より成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k,\ k+1$ のとき，

a_k，a_{k+1} が整数であるとすると，

$$a_{k+2}=ka_{k+1}-2a_k$$

であるから a_{k+2} も整数．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して a_n は整数である．

• k が偶数ならば a_n は偶数であること：

(Ⅰ)　$n=1,\ 2$ のときは $a_1=k$，$a_2=k^2-4$ は偶数である．

(Ⅱ)　$n=k,\ k+1$ のとき，

a_k，a_{k+1} が偶数であるとすると，

$$a_{k+2}=ka_{k+1}-2a_k$$

の右辺は2で割り切れるから，

a_{k+2} も偶数．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して a_n は偶数．

• k が奇数ならば a_n は奇数であることも同様に示せる．

147-2 与えられた等式に $n=1$ を代入して

$3(a_1{}^2)=a_1a_2$，$a_1=2$ より，$a_2=6$

$n=2$ を代入して

$3(2^2+6^2)=2\cdot6a_3$ よって，$a_3=10$

$n=3$ を代入して

$3(2^2+6^2+10^2)=3\cdot10a_4$ よって，$a_4=14$

以上から，数列 $\{a_n\}$ は，初項2，公差4の等差数列，すなわち，

$$a_n=\boldsymbol{4n-2}\qquad\cdots\cdots(*)$$

であると推測される．

以下(*)がすべての自然数 n で成り立つことを示す．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，$a_1=2$ より(*)は成

り立つ．

(Ⅱ)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のとき，(∗)の成立を仮定する．

$1 \leqq m \leqq k$ のとき，

$$a_m=4m-2$$

であるから，

$$\sum_{m=1}^{k} a_m{}^2$$

$$=\sum_{m=1}^{k} 4(4m^2-4m+1)$$

$$=4\left\{\frac{2}{3}k(k+1)(2k+1)-2k(k+1)+k\right\}$$

$$=\frac{4}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

よって，与えられた等式に $n=k$ を代入すると

$$4k(2k-1)(2k+1)=k(4k-2)a_{k+1}$$

したがって，

$$a_{k+1}=4k+2=4(k+1)-2$$

よって，$n=k+1$ のときも(∗)は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)よりすべての自然数 n で(∗)が成り立つ．

第9章

148-1　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$=\boldsymbol{2(\vec{q}-\vec{p})}$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

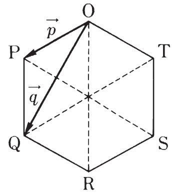
$=2(\vec{q}-\vec{p})-\vec{p}$

$=\boldsymbol{2\vec{q}-3\vec{p}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$=2(\vec{q}-\vec{p})-\vec{q}$

$=\boldsymbol{\vec{q}-2\vec{p}}$



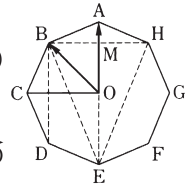
148-2　AO，BH の交点を M とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{MB}}$

$=\sqrt{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

$=\boldsymbol{-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\left(1+2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CD}}$



であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=(\sqrt{2}-1)(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\boldsymbol{(1-\sqrt{2})\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\sqrt{2})\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\left(1+2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

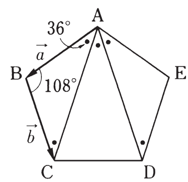
$$=(1+\sqrt{2})\{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}})\}$$

$$=\boldsymbol{(1+\sqrt{2})\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

148-3　(1)　△BAC は底角 36° の二等辺三角形であり，

$\mathrm{AC}=2\times\mathrm{AB}\cos 36^\circ$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$



(2)　DE // CA，DE＝1 であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}$

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=-(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a}-\vec{b}}$

149-1 $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$ とすると

$(10,\ 15)=\alpha(-1,\ 3)+\beta(4,\ 1)$

$=(-\alpha+4\beta,\ 3\alpha+\beta)$

$\therefore\ \begin{cases}-\alpha+4\beta=10\\3\alpha+\beta=15\end{cases}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{50}{13},\ \beta=\dfrac{45}{13}$

よって，$\vec{r}=\boldsymbol{\dfrac{50}{13}\vec{p}+\dfrac{45}{13}\vec{q}}$

149-2 $\vec{u}-\vec{v}=\vec{a}$ ……①

$\vec{u}+2\vec{v}=\vec{b}$ ……②

$\dfrac{①\times2+②}{3}$ より，

$\vec{u}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)}$

$\dfrac{①-②}{-3}$ より，$\vec{v}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{-3}=\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)}$

149-3 $\vec{p}=k\vec{a}+(3-k)\vec{b}$

$=(3,\ 3-2k)$

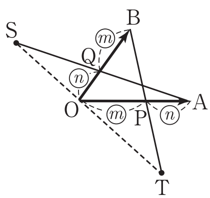
であるから

$|\vec{p}|^2=3^2+(3-2k)^2=4k^2-12k+18$

$=4\left(k-\dfrac{3}{2}\right)^2+9$

$1\leqq k\leqq3$ であるから，$|\vec{p}|$ は $k=3$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3\sqrt{2}}$ をとる．

150 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$



$=\dfrac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{1-x}\left(-x\vec{a}+\dfrac{n}{m+n}\vec{b}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{-x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1-x}$

$=\dfrac{1}{1-x}\left(-x\vec{b}+\dfrac{m}{m+n}\vec{a}\right)$

3 点 O，S，T が一直線上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ ……①

をみたす実数 k が存在する．

① $\Longleftrightarrow$ $-x\vec{a}+\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$

$=k\left(\dfrac{m}{m+n}\vec{a}-x\vec{b}\right)$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので（標問 **154** 参照）

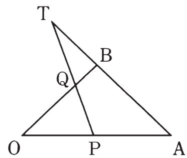
$\begin{cases}-x=k\dfrac{m}{m+n}\\\dfrac{n}{m+n}=-kx\end{cases}$

k を消去すると，

$-x=-\dfrac{n}{x(m+n)}\times\dfrac{m}{m+n}$

$\therefore\ x^2=\dfrac{mn}{(m+n)^2}$ $\therefore\ x=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{mn}}{m+n}}$

151-1 (1)



$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}$

$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$=a(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(答) ア **1** イ $\boldsymbol{t}$ ウ $\boldsymbol{t}$ エ **1** オ $\boldsymbol{a}$

(2) T が直線 AB 上にあるとき，

$a(1-t)+t(1-a)=1$ ……①

であるから，$(1-2a)t=1-a$

$1-2a=0$ とすると，$a=\dfrac{1}{2}$ であり，

$0\cdot t=\dfrac{1}{2}$ となる．

これは不合理である．$1-2a\neq0$ であり

$t=\dfrac{1-a}{1-2a}$

さらに，Q が PT の中点であるのは，$t=2$ のときであるから，①より

$-a+2(1-a)=1$ $\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

B が AT の中点であるのは，T が AB を 2：1 に外分するときであるから，

$t(1-a):a(1-t)=2:(-1)$

∴ $2a(1-t)=-t(1-a)$

∴ $2a+(1-3a)t=0$

$t=\dfrac{1-a}{1-2a}$ を代入して整理すると，

$a^2+2a-1=0$ ∴ $a=-1\pm\sqrt{2}$

(答) カ **1** キ **1** ク $\boldsymbol{a}$ ケコ $\boldsymbol{2a}$

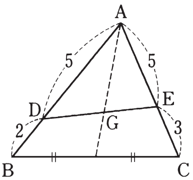
サ **1** シ **3** スセ **−1** ソ **2**

151-2 △ABC の重心をGとすると，

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

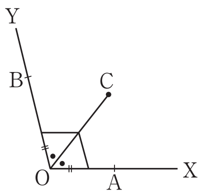
$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7}{5}\overrightarrow{AD}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{AE}\right)$

$=\dfrac{7\overrightarrow{AD}+8\overrightarrow{AE}}{15}$



Gは線分 DE を 8：7 に内分する点である．すなわち，線分 DE は重心Gを通っている．

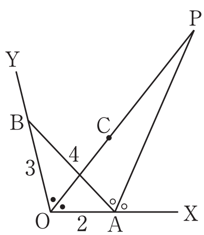
152 (1) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はともに単位ベクトルであるから，始点をそろえると，この 2 つのベクトルを 2 辺とする平行四辺形はひし形である．$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ はひし形の対角線であり，角を二等分している．



よって，点Cが ∠XOY の二等分線上にあるとき，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表せる．

(2) Pは ∠XOY の二等分線上の点なので，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ はある実数 t を用いて

$\vec{p}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{3}\right)$ ……①



と表せる．また，P は ∠XAB の二等分線上の点なので，ある実数 s を用いて

$\vec{p}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\vec{a}+s\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{4}\right)$

$=\vec{a}+s\left\{\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})\right\}$

$=\left(1+\dfrac{s}{4}\right)\vec{a}+\dfrac{s}{4}\vec{b}$ ……②

と表せる．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①，②から

(標問 **154** 参照)

$$\begin{cases}\dfrac{t}{2}=1+\dfrac{s}{4}\\[2mm]\dfrac{t}{3}=\dfrac{s}{4}\end{cases}\qquad ∴\quad t=6,\ s=8$$

よって，$\vec{p}=\boldsymbol{3\vec{a}+2\vec{b}}$

153-1 点 A，B，C，P の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると

$2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})+4(\vec{c}-\vec{p})=\vec{0}$

よって

$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}}{9}=\dfrac{2\vec{a}+7\times\dfrac{3\vec{b}+4\vec{c}}{7}}{9}$

したがって，Dは線分 BC を **4：3** に内分する点である．

(別解) 始点をAにそろえると，もっとスッキリする．

$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$

$=\vec{0}$ なので

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$

$=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$

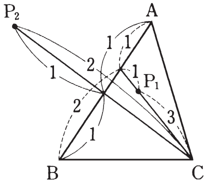
153-2 点 A，B，C，P の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とする．

(1) $2(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})$

$=\vec{0}$

よって $\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}=\dfrac{3\times\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+\vec{c}}{4}$

これより点Pは右図の $\mathrm{P_1}$ にある．



(2) $(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})-(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$

なので

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

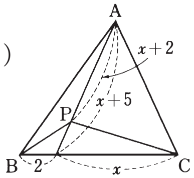
$\quad=2\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}$

よって，外分点の公式より点Pは上図の $\mathrm{P_2}$ にある．

153-3 $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+x\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$

なので

$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+x(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$



$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\quad=\dfrac{x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{x+5}$

$\quad=\dfrac{x+2}{x+5}\times\dfrac{x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{x+2}$

点Pは上図の位置にあるから，

$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PBC}=4:1$

$\therefore\quad(x+5):3=4:1$

$\therefore\quad x=\mathbf{7}$

154-1 背理法を使う．

$m\neq0$ とすると，$\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ ゆえ，$n\neq0$ であり，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ これは $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないことに矛盾．したがって，$m=0$．同様にして，$n=0$ でもある．

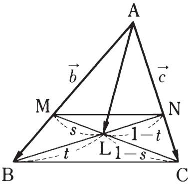
154-2 LはBN上の点であるから，ある実数 t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AN}}$

$\quad=(1-t)\vec{b}+\dfrac{2t}{3}\vec{c}$

と表せる．

また，LはCM上の点でもあるので，ある実数 s を用いて



$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AM}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

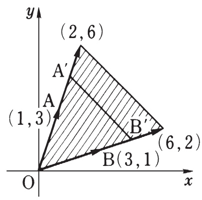
$=\dfrac{2(1-s)}{3}\vec{b}+s\vec{c}$

と表せる．$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから，

$$\begin{cases}1-t=\dfrac{2(1-s)}{3}\\[2mm]\dfrac{2t}{3}=s\end{cases}\qquad\therefore\quad t=\frac{3}{5},\ s=\frac{2}{5}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{c})}$

155-1 (1)



$\alpha+\beta=k$ とおくと，

$0\leqq k\leqq2$

$k=0$ のとき，

$\alpha=\beta=0$

$\therefore\quad\mathrm{P}\equiv\mathrm{O}$

$k\neq0$ のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$，$\dfrac{\alpha}{k}\geqq0$，$\dfrac{\beta}{k}\geqq0$ であるから，

Pは線分 $\mathrm{A'B'}$ 上（両端含む）を動く．次に k を動かすことにより，Pは図の斜線部分を動く（原点Oは除く）．

以上より，$k=0$ のときもあわせると，Pの存在範囲は図の斜線部分の三角形全体である．この面積は

$$\frac{1}{2}|2\times2-6\times6|=\mathbf{16}$$

(2) $\beta'=-\beta$ とおくと

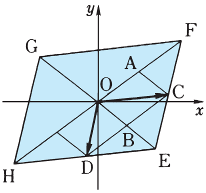
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta'\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，

$\alpha\geqq0$，$\beta'\geqq0$，$\alpha+\beta'\leqq1$

となり，(1)と同様に考えると，Pの存在範囲は△OABの周および内部である．この面積は

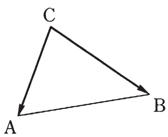
$$\frac{1}{2}|1\times1-3\times3|=\mathbf{4}$$

155-2 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x-y)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$+(x+y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$=x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$
である．
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$
となる点 C，D をとると，



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}}+y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，
$-1\leqq x\leqq 1$，
$-1\leqq y\leqq 1$
したがってPは
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，
$-\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，
$-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となる点 E，F，G，H をとると，**平行四辺形 EFGH の周と内部を動く．**

156 $l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ に
$n=1-l-m$
を代入して



$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}$
$+(1-l-m)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$
∴ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$
$=l(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}})+m(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}})$
$=l\overrightarrow{\mathrm{CA}}+m\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
(i) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と平行ではないから，
Pが辺 BC 上にある条件は，
$\boldsymbol{l=0,\ 0\leqq m\leqq 1}$
(ii) Pが直線 BC に関してAと同じ側にある条件は，$\boldsymbol{l>0}$

157-1 $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ……①
また，
$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=u_1\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u_2\overrightarrow{\mathrm{AF}}+u_3\overrightarrow{\mathrm{AH}}$
$=u_1(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})+u_2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$
$+u_3(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$
$=(u_1+u_2)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(u_2+u_3)\overrightarrow{\mathrm{AE}}$
$+(u_3+u_1)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ……②
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は１次独立であるから，
①，②より

$$\begin{cases} u_1+u_2=-1 \\ u_2+u_3=1 \\ u_3+u_1=1 \end{cases}$$

∴ $(u_1,\ u_2,\ u_3)$
$$=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

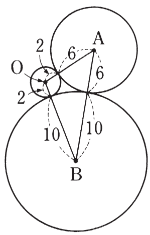
157-2 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}$
$=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$
である．L は直線 OH 上にあるので，ある実数 k を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}$
と表せる．L が平面 ABC 上にある条件は

$$k+k+2k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OL}}=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{4}}$$

158-1 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ ゆえ，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\boldsymbol{0}$
$\angle\mathrm{ADB}=30^\circ$ であるから，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$
$=2a\times\sqrt{3}\,a\times\cos 30^\circ=\boldsymbol{3a^2}$
正六角形の中心をＯとすると，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OF}}$
$=2a\times 2a\times\cos 120^\circ=\boldsymbol{-2a^2}$

158-2 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$
$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ から



$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$
$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$
∴ 16^2
$=12^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8^2$
∴ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{-24}$

159 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とする．

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x-y=0 \\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=x^2+y^2=1 \end{cases}$$

これを解いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ **（複号同順）**

(2) $\vec{b}=(x,\ y)$ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$，$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ より

$$4x+3y=5\times 10\times \cos 60^\circ \quad \cdots\cdots①$$
$$x^2+y^2=(2\times 5)^2 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より，$x^2+\left(\dfrac{25-4x}{3}\right)^2=100$

$\therefore\ \ x^2-8x-11=0$　これより，

$\vec{b}=(x,\ y)=(\mathbf{4\pm 3\sqrt{3},\ 3\mp 4\sqrt{3}})$

(複号同順)

(3) $\cos\theta=\dfrac{1+0+2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+0+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ ゆえ，$\theta=\mathbf{30^\circ}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(3-x,\ 3,\ 0)$，
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(3-x,\ -1,\ 2\sqrt{2})$ ゆえ，

$$\cos\theta=\frac{x^2-6x+6}{\sqrt{x^2-6x+18}\sqrt{x^2-6x+18}}$$
$$=\frac{x^2-6x+6}{x^2-6x+18}=1-\frac{12}{(x-3)^2+9}$$

x が実数全体を動くとき，$(x-3)^2+9$ は 9 以上の実数をすべて動く．

$\dfrac{12}{(x-3)^2+9}$ のとり得る値の範囲は

$$0<\frac{12}{(x-3)^2+9}\leqq\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

よって，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\leqq\boldsymbol{\cos\theta<1}$$

160　$|\vec{a}+c\vec{b}|\geqq|\vec{a}|$ は

$(\vec{a}+c\vec{b})\cdot(\vec{a}+c\vec{b})\geqq\vec{a}\cdot\vec{a}$

$\therefore\ \ |\vec{a}|^2+2c\vec{a}\cdot\vec{b}+c^2|\vec{b}|^2\geqq|\vec{a}|^2$

$\therefore\ \ |\vec{b}|^2c^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})c\geqq 0$

と同値である．これがすべての実数 c で成り立つ条件は，$|\vec{b}|^2>0$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ すなわち $\vec{a}\perp\vec{b}$

162-1　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$=-6\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=-6\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}\right)$

であるから $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=30$ は

$6|(x,\ y)-(3,\ 4)|=30$

すなわち $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-4)^2=5^2}$ である．

162-2　A，B，C，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とし，与式を $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ でまとめると，

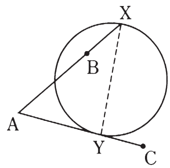
$-3\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})$
$\quad+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$

$\therefore\ \ (\overrightarrow{\mathrm{PA}}-3\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}})=0$

$\therefore\ \ (2\vec{p}+\vec{a}-3\vec{b})\cdot(-3\vec{p}+\vec{a}+2\vec{c})=0$

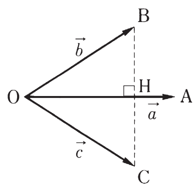
$\therefore\ \ \left(\vec{p}-\dfrac{3\vec{b}-\vec{a}}{2}\right)\cdot\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+2\vec{c}}{3}\right)=0$

よって，P は AB を 3 : 1 に外分する点X，AC を 2 : 1 に内分する点Y を直径の両端とする円をえがく．



163　BC と OA の交点を H とすると

$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$
$=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影ベクトルであり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\frac{|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}}{|\vec{a}|}\vec{a}$$
$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\therefore\ \ \vec{c}=2\frac{\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}}{\boldsymbol{|\vec{a}|^2}}\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$$