数学Ⅰ・A標準問題精講［三訂版］

麻生雅久著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1 (1) $(a-b+c)(a-b-c)$
$=(a-b)^2-c^2$
$=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2-c^2}$

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$
$=\boldsymbol{x^8-y^8}$

(3) $(x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3$
$\quad -(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3$
$=\{(x+y)+2z\}^3-\{(x+y)-2z\}^3$
$\quad -\{2z-(x-y)\}^3-\{2z+(x-y)\}^3$
$=(x+y)^3+6(x+y)^2z+12(x+y)z^2+8z^3$
$\quad -(x+y)^3+6(x+y)^2z-12(x+y)z^2+8z^3$
$\quad -8z^3+12z^2(x-y)-6z(x-y)^2+(x-y)^3$
$\quad -8z^3-12z^2(x-y)-6z(x-y)^2-(x-y)^3$
$=12(x+y)^2z-12z(x-y)^2$
$=\boldsymbol{48xyz}$

2 (1)
$10x^2-xy-2y^2+17x+5y+3$
$=10x^2-(y-17)x-(2y+1)(y-3)$
$=\{5x+(2y+1)\}\{2x-(y-3)\}$
$=\boldsymbol{(5x+2y+1)(2x-y+3)}$

(2) $x^3+2x^2-9x-18$
$=x^2(x+2)-9(x+2)$
$=(x^2-9)(x+2)$
$=\boldsymbol{(x+3)(x-3)(x+2)}$

(3) $(x^2+3x+5)(x+1)(x+2)+2$
$=(x^2+3x+5)(x^2+3x+2)+2$
$=(x^2+3x)^2+7(x^2+3x)+12$
$=\boldsymbol{(x^2+3x+3)(x^2+3x+4)}$

(4) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$
$=4x^4+8x^2y^2+4y^4-25x^2y^2$
$=(2x^2+2y^2)^2-(5xy)^2$
$=(2x^2+5xy+2y^2)(2x^2-5xy+2y^2)$
$=\boldsymbol{(2x+y)(x+2y)(2x-y)(x-2y)}$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4$
$=4x^4-8x^2y^2+4y^4-9x^2y^2$
$=(2x^2-2y^2)^2-(3xy)^2$
$=(2x^2+3xy-2y^2)(2x^2-3xy-2y^2)$
$=(2x-y)(x+2y)(2x+y)(x-2y)$

別解 $4x^4-17x^2y^2+4y^4$
$=(x^2-4y^2)(4x^2-y^2)$
$=(x+2y)(x-2y)(2x+y)(2x-y)$

3-1
$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$=(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{2})$
$\quad +(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\boldsymbol{0}$

3-2 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$
$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{10})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})}$
$=\dfrac{24}{-8}$
$=\boldsymbol{-3}$

4-1 $\sqrt{14+\sqrt{96}}=\sqrt{14+2\sqrt{24}}$
$=\sqrt{(\sqrt{12}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{12}+\sqrt{2}$
$=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$
$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
よって，
$\sqrt{14+\sqrt{96}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$
$=2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$
$=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

4-2 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$
$=\sqrt{3}+1$
であるから
$\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)}$
$=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}$
$=\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}=\sqrt{12}+1$
$=\boldsymbol{2\sqrt{3}+1}$

4-3 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であるから

$$2<2\sqrt{2}<3$$

よって，$3<6-2\sqrt{2}<4$

したがって，$6-2\sqrt{2}$ をこえない最大の整数は 3 である．

よって，$a=3$，$b=3-2\sqrt{2}$

このとき，

$$\frac{1}{b^3}=\left(\frac{1}{b}\right)^3=\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^3$$
$$=(3+2\sqrt{2})^3$$

よって，

$$b^3+\frac{1}{b^3}$$
$$=(3-2\sqrt{2})^3+(3+2\sqrt{2})^3$$
$$=27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}$$
$$+27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}$$
$$=198$$

したがって，

$$b^3+\frac{1}{b^3}-7a^3=198-7\cdot3^3=\mathbf{9}$$

5 (1) $(\sqrt{2}-1)p+(\sqrt{2}-1)^2q$

$=19-11\sqrt{2}$ より，

$$-p+3q-19+(p-2q+11)\sqrt{2}=0$$

$-p+3q-19$，$p-2q+11$ は有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases}-p+3q-19=0\\ p-2q+11=0\end{cases}$$

よって，$p=\mathbf{5}$，$q=\mathbf{8}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

(2) k^2-l^2，m^2-1 は有理数であるから，(1)より

$$\begin{cases}k^2-l^2=5 & \cdots\cdots① \\ m^2-1=8 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①より，　$(k-l)(k+l)=5$

$k-l$ は整数，$k+l$ は自然数であり，$k-l<k+l$ であるから，

$$\begin{cases}k-l=1\\ k+l=5\end{cases}$$

よって，$k=\mathbf{3}$，$l=\mathbf{2}$ （ともに自然数であり条件を満たす）

②より，$m^2=9$ であり，m は自然数であるから，$m=\mathbf{3}$

6-1 $x+4y=y-3x$ より

$$4x+3y=0$$

よって，$y=-\frac{4}{3}x$

したがって，

$$\frac{2x^2-xy-y^2}{2x^2+xy+y^2}$$
$$=\frac{\left(2+\frac{4}{3}-\frac{16}{9}\right)x^2}{\left(2-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\right)x^2}=\mathbf{\frac{7}{11}}$$

6-2 $\frac{x+y}{z}=\frac{y+2z}{x}=\frac{z-x}{y}=k$

とおくと

$$x+y=kz \quad \cdots\cdots①$$
$$y+2z=kx \quad \cdots\cdots②$$
$$z-x=ky \quad \cdots\cdots③$$

①＋③より

$$y+z=k(y+z)$$

よって，$(y+z)(k-1)=0$

したがって，$y+z=0$ または $k=1$

$y+z=0$ のとき

$z=-y$ であり，①，②に代入して

$$x=-(k+1)y,\quad -y=kx$$

よって，$x=(k+1)kx$

$x\neq0$ より　$(k+1)k=1$

よって，$k^2+k-1=0$

したがって，$k=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

また，$k=1$ のとき，①，②より

$$x+y=z,\quad y+2z=x$$

これらを満たす 0 でない x，y，z が存在する．（たとえば，$x=3$，$y=-1$，$z=2$）

以上より，$k=\mathbf{1}$，$\mathbf{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

7 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

であり，これに

$$x+y=1,\quad x^2+y^2=2$$

を代入して　$1^2=2+2xy$

よって，$xy=-\dfrac{1}{2}$

したがって，

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=1^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{5}{2}$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

また，

$$(x^3+y^3)(x^4+y^4)$$
$$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$$

であるから

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}=x^7+y^7+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1$$

よって，

$$x^7+y^7=\frac{35}{4}+\frac{1}{8}=\mathbf{\frac{71}{8}}$$

8-1　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=3^2-4=5$$

よって，

$$x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$$

また，

$$x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\pm\sqrt{5}\cdot 3\cdot(3^2-2)$$
$$=\boldsymbol{\pm 21\sqrt{5}}\ \text{（複号同順）}$$

8-2　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$=\boldsymbol{a^2+2}$$

また，

$$x^3-\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=a(a^2+2+1)$$
$$=\boldsymbol{a^3+3a}$$

9-1　$x^2+y^2+z^2$

$$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=4^2-2\cdot 5=\mathbf{6}$$

また，

$$x^3+y^3+z^3$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=4(6-5)+3=\mathbf{7}$$

9-2　$(x+y+z)^2$

$$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

であるから

$$xy+yz+zx$$
$$=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$$
$$=\frac{0^2-1}{2}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$$

また，

$$(xy+yz+zx)^2$$
$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$$

であるから

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$
$$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2xyz\cdot 0=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

10　$6x+4<2x+5$ を解くと

$4x<1$ より

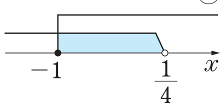
$$x<\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

$2x+5\leqq 3x+6$ を解くと

$-x\leqq 1$ より

$$x\geqq -1\quad\cdots\cdots②$$

①，②をともに満たす x の値の範囲は，



$$\boldsymbol{-1\leqq x<\frac{1}{4}}$$

11　$|x|+2|x-1|=x+3\quad\cdots\cdots①$

（i）$x<0$ のとき

$$|x|=-x,\ |x-1|=-x+1$$

であるから①は，

$$-x+2(-x+1)=x+3$$

整理して，$4x=-1$

よって，$x=-\dfrac{1}{4}$

これは $x<0$ を満たす．

(ii) $0\leqq x<1$ のとき

$$|x|=x,\ |x-1|=-x+1$$

であるから①は，

$$x+2(-x+1)=x+3$$

整理して，$2x=-1$

よって，$x=-\dfrac{1}{2}$

これは $0\leqq x<1$ を満たさないので不適．

(iii) $1\leqq x$ のとき

$$|x|=x,\ |x-1|=x-1$$

であるから①は，

$$x+2(x-1)=x+3$$

整理して，$2x=5$

よって，$x=\dfrac{5}{2}$

これは $x\geqq 1$ を満たす．

(i)，(ii)，(iii)より，$x=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}}$

12 $y=x^2+4x+12$ は

$$y=(x+2)^2+8$$

と変形できるので頂点の座標は $(-2,\ 8)$ である．

$y=x^2-2x+4$ は

$$y=(x-1)^2+3$$

と変形できるので頂点の座標は $(1,\ 3)$ である．

したがって，放物線 $y=x^2+4x+12$ は，放物線 $y=x^2-2x+4$ を，

x 軸方向に -3，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである．

13-1 $y=x^2+px+q$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通ることから

$$1=1+p+q$$

よって，$p+q=0$ ……①

また，x 軸に接することから

$x^2+px+q=0$ は重解をもち，

$$(D=)\ p^2-4q=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より q を消去して

$$p^2+4p=0$$

$p\neq 0$ であるから $p=-4$

①に代入して

$$\boldsymbol{(p,\ q)=(-4,\ 4)}$$

別解 $y=x^2+px+q$ が x 軸に接することから $y=(x-\alpha)^2$ とおくことができる．

これが点 $(1,\ 1)$ を通るので

$$1=(1-\alpha)^2$$

よって，$1-\alpha=\pm 1$

したがって，$\alpha=0,\ 2$

$\alpha=0$ のとき $y=x^2$

このとき，$p=0$，$q=0$ となり不適．

$\alpha=2$ のとき

$$y=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

よって，$(p,\ q)=(-4,\ 4)$

13-2 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点

$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$，$(2,\ 3)$

を通ることから

$$a-b+c=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$c=-1 \quad \cdots\cdots②$$
$$4a+2b+c=3 \quad \cdots\cdots③$$

②を①，③に代入して

$$a-b=1,\ 4a+2b=4$$

よって，$a=1$，$b=0$

したがって，求める 2 次関数の式は

$$\boldsymbol{y=x^2-1}$$

14 $f(x)=x^2-mx+m^2-m$

$$=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m^2-m$$

よって，$f(x)$ の最小値 $g(m)$ は

$$g(m)=\frac{3}{4}m^2-m$$
$$=\frac{3}{4}\left(m-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$

したがって，$g(m)$ の最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

15 $f(x)=x^2+ax+a$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a$$

(i) $-\dfrac{a}{2}<-2$ つまり $a>4$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$

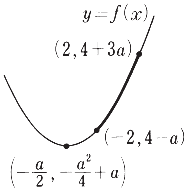
の範囲において，

$x=-2$ のときに

最小値をとる．

最小値は

$f(-2)=4-a$



(ii) $-2\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 2$ つまり

$-4\leqq a\leqq 4$ のとき

$x=-\dfrac{a}{2}$ において最小値 $-\dfrac{a^2}{4}+a$

をとる．

(iii) $2<-\dfrac{a}{2}$ つまり，$a<-4$ のとき

$-2\leqq x\leqq 2$

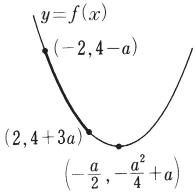
の範囲において，

$x=2$ のときに

最小値をとる．

最小値は，

$f(2)=4+3a$



(i)〜(iii)より，$f(x)$ の最小値は

$a<-4$ のとき，$4+3a$

$-4\leqq a\leqq 4$ のとき，$-\dfrac{a^2}{4}+a$

$4<a$ のとき，$4-a$

16 $y=ax^2-2ax+a^2-2a-4$ より

$y=a(x-1)^2+a^2-3a-4$

(i) $a>0$

のとき

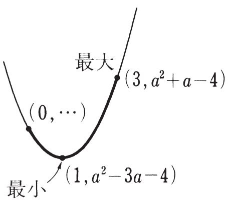
$0\leqq x\leqq 3$

において，

$x=3$ のとき

に最大値をと

る．



最大値が 8 である条件は

$a^2+a-4=8$

よって，$a^2+a-12=0$

したがって，$(a+4)(a-3)=0$

$a>0$ であるから，$a=3$

このとき，$x=1$ において最小となり，最小値は

$a^2-3a-4=-4$

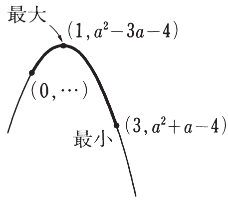
(ii) $a<0$

のとき

$x=1$ のと

きに最大値を

とる．



最大値が 8

である条件は

$a^2-3a-4=8$

よって，$a^2-3a-12=0$

$a<0$ であるから，$a=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$

このとき，$x=3$ において最小となり，最小値は

$$a^2+a-4=(a^2-3a-12)+4a+8$$
$$=4a+8=14-2\sqrt{57}$$

(i)，(ii)より

$a=3$，最小値 -4；

$a=\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$，最小値 $14-2\sqrt{57}$

17 (1) $|x-4|=\begin{cases} x-4 & (x\geqq 4) \\ -x+4 & (x<4) \end{cases}$

であるから

$$(|x-4|-1)^2=\begin{cases} (x-5)^2 & (x\geqq 4) \\ (x-3)^2 & (x<4) \end{cases}$$

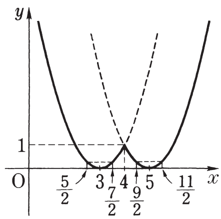
したがって，

$y=(|x-4|-1)^2$

のグラフは，

右のように

なる．



(2)

$t\leqq x\leqq t+1$

において(1)の関数が

最大となる x は

$t\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき，$x=t$

$\dfrac{5}{2}<t<3$ のとき，$x=t+1$

$3 \leqq t \leqq 4$ のとき，$x=4$

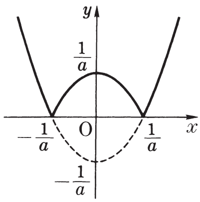
$4<t\leqq \dfrac{9}{2}$ のとき，$x=t$

$\dfrac{9}{2}<t$ のとき，$x=t+1$

したがって，$t\leqq x\leqq t+1$ における最大値 $f(t)$ は

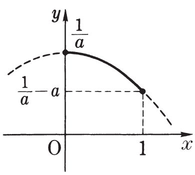
$$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases}(t-3)^2 & \left(t\leqq \dfrac{5}{2}\right)\\ (t-2)^2 & \left(\dfrac{5}{2}<t<3\right)\\ 1 & (3\leqq t\leqq 4)\\ (t-5)^2 & \left(4<t\leqq \dfrac{9}{2}\right)\\ (t-4)^2 & \left(\dfrac{9}{2}<t\right)\end{cases}}$$

18　(1)　$f(x)=\left|ax^2-\dfrac{1}{a}\right|$ のグラフは右のようになる．

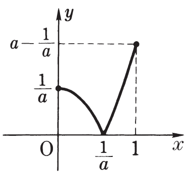


したがって，$0\leqq x\leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフは，下のようになる．

$0<a<1$ のとき



$1\leqq a$ のとき



(2)　(Ⅰ)　$0<a<1$ のときは $x=0$ において最大となる．

よって，$g(a)=f(0)=\dfrac{1}{a}$

(Ⅱ)　$1\leqq a$ のときについて，

$\dfrac{1}{a}$ と $a-\dfrac{1}{a}$ の大小を比較する．

$$\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}-a=\frac{2-a^2}{a}$$

(i)　$1\leqq a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$\dfrac{2-a^2}{a}\geqq 0$ より，$\dfrac{1}{a}\geqq a-\dfrac{1}{a}$

よって，$g(a)=\dfrac{1}{a}$

(ii)　$\sqrt{2}<a$ のとき

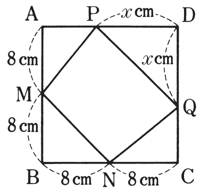
$\dfrac{2-a^2}{a}<0$ より，$\dfrac{1}{a}<a-\dfrac{1}{a}$

よって，$g(a)=a-\dfrac{1}{a}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)(i)，(Ⅱ)(ii)より，

$$\boldsymbol{g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & (0<a\leqq\sqrt{2})\\ a-\dfrac{1}{a} & (\sqrt{2}<a)\end{cases}}$$

19　(1)　DP の長さを x cm とすると，



$0<x\leqq 16$ であり，

$\triangle$APM

$=\dfrac{1}{2}$AP・AM

$=\dfrac{1}{2}(16-x)\cdot 8$

$=4(16-x)$

また，

$\triangle$CQN$=\triangle$APM$=4(16-x)$

$\triangle$BNM$=\dfrac{1}{2}$BM・BN$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$

$\triangle$DPQ$=\dfrac{1}{2}$DP・DQ$=\dfrac{1}{2}x^2$

したがって，四角形 PMNQ の面積 S は

$S=$(正方形 ABCD)$-\triangle$APM

$-\triangle$BNM$-\triangle$CQN$-\triangle$DPQ

$=16^2-4(16-x)-32$

$-4(16-x)-\dfrac{x^2}{2}$

$=-\dfrac{x^2}{2}+8x+96$

$=-\dfrac{1}{2}(x-8)^2+128$

よって，$0<x\leqq 16$ において，$x=8$ のときに S は最大となる．

つまり，DP が **8 cm** のとき最大．

(2)　S が最小になるのは，$x=16$ つまり，DP が 16 cm のときで，最小値は **96 cm^2** である．

20　$\boldsymbol{A \neq 0}$ **のとき，**

(i)　$0^2-4AB \geqq 0$　つまり

$\boldsymbol{AB \leqq 0}$ **ならば，**$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{-\dfrac{B}{A}}}$

(ii)　$\boldsymbol{AB>0}$ **ならば，実数解なし．**

$\boldsymbol{A=0}$ **のとき，**

(i)　$\boldsymbol{B=0}$ **ならば，解はすべての実数．**

(ii)　$\boldsymbol{B \neq 0}$ **ならば，実数解なし．**

21　$ax^2-(2a^2+2a)x$
$+a^3+2a^2+a+1=0$　……①

(i)　$a \neq 0$ のとき，①が実数解をもつ条件は，

$$(2a^2+2a)^2-4a(a^3+2a^2+a+1) \geqq 0$$

左辺を整理して，$-4a \geqq 0$

よって，$a \leqq 0$

$a \neq 0$ より，$a<0$

(ii)　$a=0$ のとき，①は

$$1=0$$

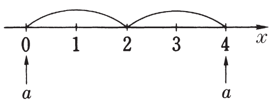
となり，解をもたない．

よって，$a=0$ は不適．

以上(i)，(ii)より，x の方程式①が実数解をもつ条件は，$\boldsymbol{a<0}$

22　$x^2-(a+2)x+2a<0$ より

$(x-a)(x-2)<0$　……$(*)$



$(*)$ を満たす x の整数値がただ 1 つ存在するような整数 a の値は **0, 4** である．

23　$x^2+(a-1)x+a-1=0$　……①

が実数解をもたない条件は，

$$(a-1)^2-4(a-1)<0$$

左辺を整理して，

$$(a-1)(a-5)<0$$

よって，$1<a<5$　……③

また，$x^2+2(a-1)x-a+7=0$　……②

が実数解をもたない条件は，

$$\{2(a-1)\}^2-4(-a+7)<0$$

4 で割って，

$$(a-1)^2-(-a+7)<0$$

左辺を整理して，

$$(a+2)(a-3)<0$$

よって，$-2<a<3$　……④

③，④をともに満たす a の値の範囲は，

$\boldsymbol{1<a<3}$

24　$ax^2+(a-1)x+a-1<0$
……$(*)$

$a=0$ のとき

$(*)$ は，　$-x-1<0$

となり，これが成立しない実数 x の値が存在するので不適．

$a \neq 0$ のとき

$(*)$ がすべての実数 x に対して成立する条件は

$a<0$　……①

$(D=)$ $(a-1)^2-4a(a-1)<0$　……②

②より，

$$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$$

よって，$(a-1)(3a+1)>0$

したがって，$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

これと①より，

$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{3}}$$

25　(1)　$x^2+3x-40<0$ を解くと

$(x+8)(x-5)<0$ より

$-8<x<5$　……①

$x^2-5x-6>0$ を解くと

$(x-6)(x+1)>0$ より

$x<-1$，$6<x$　……②

①，②をともに満たす x の範囲は

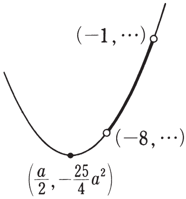
$\boldsymbol{-8<x<-1}$

(2)　$f(x)=x^2-ax-6a^2$

とおくと

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{25}{4}a^2$$

$-8<x<-1$ のとき $f(x)>0$
が成立する条件は
次のようになる.



(i) $\dfrac{a}{2}<-8$

つまり $a<-16$
のとき

$$f(-8)\geqq 0$$

よって, $64+8a-6a^2\geqq 0$
つまり, $3a^2-4a-32\leqq 0$
左辺を因数分解して

$$(3a+8)(a-4)\leqq 0$$

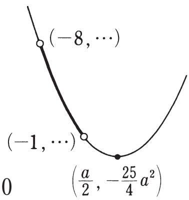
よって, $-\dfrac{8}{3}\leqq a\leqq 4$
これは $a<-16$ に反する.

(ii) $-8\leqq\dfrac{a}{2}\leqq -1$ つまり
$-16\leqq a\leqq -2$ のとき
$f\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$ より

$$-\frac{25}{4}a^2>0$$

これを満たす a は存在しない.

(iii) $-1<\dfrac{a}{2}$



つまり

$$-2<a$$

のとき

$$f(-1)\geqq 0$$

よって, $1+a-6a^2\geqq 0$
つまり, $6a^2-a-1\leqq 0$
左辺を因数分解して

$$(3a+1)(2a-1)\leqq 0$$

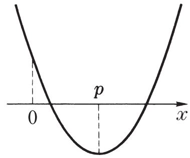
よって, $-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$
$-2<a$ を考えて,

$$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

(i)〜(iii)より, $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}}$

26-1 $f(x)=x^2-2px+2-p$
とおくと
$f(x)=(x-p)^2-p^2-p+2$

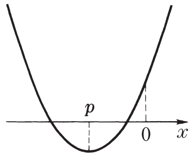
方程式 $f(x)=0$
の2つの解がともに
正となる条件は



(軸) $p>0$
$(f(0)=)$ $2-p>0$
$\left(\dfrac{D}{4}=\right)$ $p^2-(2-p)\geqq 0$ ⬅重解を2つの解と扱う
よって,
$p>0$, $p<2$, $(p+2)(p-1)\geqq 0$
これらすべてを満たす p の値の範囲は

$$\boldsymbol{1\leqq p<2}$$

方程式
$f(x)=0$ の2つ
の解がともに負
となる条件は



$p<0$,
$2-p>0$,
$p^2-(2-p)\geqq 0$
よって, $p<0$, $p<2$, $(p+2)(p-1)\geqq 0$
これらすべてを満たす p の値の範囲は

$$\boldsymbol{p\leqq -2}$$

方程式 $f(x)=0$ の2つの解の符号が
異なる条件は

$$f(0)<0$$

よって, $2-p<0$
したがって, $\boldsymbol{p>2}$

26-2 (1)

$$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$$

とおくと

$$f(x)=(x-a)^2+a^2-5$$

方程式 $f(x)=0$ が1より大きい解と1より小さい解を1つずつもつ条件は

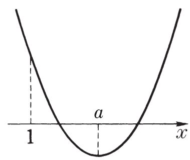
$$f(1)<0$$

よって, $2a^2-2a-4<0$
左辺を因数分解して

$$2(a-2)(a+1)<0$$

したがって,

$$\boldsymbol{-1<a<2}$$



(2) 方程式
$f(x)=0$ が1よ
り大きい解を2

つもつ条件は

$$\begin{cases}(f(1)=)\ 2a^2-2a-4>0\\(\text{軸})\ a>1\\\left(\dfrac{D}{4}=\right)\ a^2-(2a^2-5)\geqq 0\end{cases}$$

よって，$\begin{cases}2(a-2)(a+1)>0\\a>1\\a^2\leqq 5\end{cases}$

したがって，

$$\boldsymbol{2<a\leqq\sqrt{5}}$$

27

$f(x)=2ax^2-2x+4a-1\quad(a>0)$

とおく．

$y=f(x)$ のグラフが，区間

$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 2$ において x 軸と少なくとも

1つの共有点をもつ条件を求めればよい．

(i) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)f(2)\leqq 0$ の場合

$$\left(\frac{38}{9}a-\frac{1}{3}\right)(12a-5)\leqq 0$$

よって，

$$\frac{3}{38}\leqq a\leqq\frac{5}{12}$$

(ii) $\begin{cases}\left(f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\right)\ \dfrac{38}{9}a-\dfrac{1}{3}\geqq 0 & \cdots\cdots①\\(f(2)=)\ 12a-5\geqq 0 & \cdots\cdots②\\\text{軸}:-\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2a}\leqq 2 & \cdots\cdots③\\\text{判別式}:1-2a(4a-1)\geqq 0 & \cdots\cdots④\end{cases}$

の場合

①より，$a\geqq\dfrac{3}{38}$ ……①′

②より，$a\geqq\dfrac{5}{12}$ ……②′

$a>0$ に注意すると③は，$\dfrac{1}{2a}\leqq 2$

よって，$a\geqq\dfrac{1}{4}$ ……③′

④より，　$8a^2-2a-1\leqq 0$

よって，$(4a+1)(2a-1)\leqq 0$

したがって，

$$-\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots④'$$

①′～④′，$a>0$ より，

$$\frac{5}{12}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

(i)，(ii)より，$\boldsymbol{\dfrac{3}{38}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}}$

参考 軸の位置での場合分けによる解答

$f(x)=2ax^2-2x+4a-1\ (a>0)$

とおく．

2次関数 $y=f(x)$ のグラフの対称軸

$\left(x=\dfrac{1}{2a}\right)$ の位置で場合分けする．

(i) $0<\dfrac{1}{2a}\leqq 2$ つまり $\dfrac{1}{4}\leqq a$ のとき

$$f\left(\frac{1}{2a}\right)\leqq 0\qquad\cdots\cdots①$$

かつ

「$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)\geqq 0$ または $f(2)\geqq 0$」…②

①より，

$$-\frac{1}{2a}+4a-1\leqq 0$$

両辺に $2a\ (>0)$ をかけて左辺を因数分解して

$$(4a+1)(2a-1)\leqq 0$$

よって，$-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

$a>0$ より，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ ……①′

②より，

$$\frac{38}{9}a-\frac{1}{3}\geqq 0 \text{ または } 12a-5\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{3}{38}$ ……②′

①′かつ②′と $\dfrac{1}{4}\leqq a$ より

$$\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$$

(ii) $\dfrac{1}{2a}>2$ つまり $0<a<\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{38}{9}a-\dfrac{1}{3}\geqq 0\\f(2)=12a-5\leqq 0\end{cases}$$

より，

$$\frac{3}{38} \leqq a \leqq \frac{5}{12}$$

これと，$0 < a < \frac{1}{4}$ より

$$\frac{3}{38} \leqq a < \frac{1}{4}$$

(i)，(ii)より，$\frac{3}{38} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

28-1 $x^2+ax+b=0$ ……①

$x^2+bx+a=0$ ……②

(1) ①，②の共通解を α とおくと，

$\alpha^2+a\alpha+b=0$ ……③

$\alpha^2+b\alpha+a=0$ ……④

③－④ より

$$(a-b)(\alpha-1)=0$$

よって，

$$a=b \text{ または } \alpha=1$$

$a=b$ のとき，①と②が一致し，①と②は 2 つの共通解をもつので条件に反する．

←重解を 2 つの解と扱う

よって，$\alpha=1$

(2) ③に $\alpha=1$ を代入して

$1+a+b=0$ ……⑤

$a=b$ であると，①と②は 2 つの共通解をもつので，a，b が満たすべき条件は，

$$\boldsymbol{1+a+b=0 \text{ かつ } a \neq b}$$

$$\left(1+a+b=0 \text{ かつ } a \neq -\frac{1}{2} \text{ でもよい}\right)$$

(3) ⑤より，$a=-b-1$

①に代入して，

$$x^2-(b+1)x+b=0$$

左辺を因数分解して，

$$(x-1)(x-b)=0$$

よって，①の $x=1$ 以外の解は

$$x=b$$

である．

同様に，⑤より，$b=-a-1$

②に代入して，

$$x^2-(a+1)x+a=0$$

よって，$(x-1)(x-a)=0$

したがって，②の $x=1$ 以外の解は

$$x=a$$

である．

28-2

$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ は

$x^2+ax+1=0$ ……①

または

$3x^2+ax-3=0$ ……②

と同値である．

$$(\text{②の判別式})=a^2+36>0$$

であるから，②を満たす異なる実数 x は 2 つある．

①を満たす異なる実数 x の個数は，

$(D=)$ $a^2-4>0$ つまり

$a<-2$，$2<a$ のとき 2 個

$(D=)$ $a^2-4=0$ つまり

$a=\pm 2$ のとき 1 個

$(D=)$ $a^2-4<0$ つまり

$-2<a<2$ のとき 0 個

である．

①と②が共通解をもつときについて調べる．

共通解を α とおくと，

$\alpha^2+a\alpha+1=0$ ……③

$3\alpha^2+a\alpha-3=0$ ……④

④－③ より

$$2\alpha^2-4=0$$

よって，$\alpha=\pm\sqrt{2}$

$\alpha=\sqrt{2}$ のとき，③より $a=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\alpha=-\sqrt{2}$ のとき，③より $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

以上より，「①」，「②」，「①かつ②」を満たす異なる実数 x の個数は次のようになる．

a	…	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	…	-2	…	2	…	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	…
①	2	2	2	1	0	1	2	2	2
②	2	2	2	2	2	2	2	2	2
①かつ②	0	1	0	0	0	0	0	1	0

したがって，「①または②」を満たす異な

る実数 x の個数は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{3}{\sqrt{2}}<a<-2,} \\ \boldsymbol{2<a<\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}<a} \text{ のとき 4 個} \\ \boldsymbol{a=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm 2} \text{ のとき 3 個} \\ \boldsymbol{-2<a<2} \text{ のとき 2 個} \end{cases}$$

29 $2x^2+4xy+3y^2$
$+4x+5y-4=0$

を x について整理して,

$$2x^2+4(y+1)x+3y^2+5y-4=0$$

これを満たす実数 x が存在する条件より

$$4(y+1)^2-2(3y^2+5y-4)\geqq 0$$

整理して,

$$y^2+y-6\leqq 0$$

よって,

$$(y+3)(y-2)\leqq 0$$

したがって,

$$\boldsymbol{-3\leqq y\leqq 2}$$

30 $1111_{(2)}=2^3+2^2+2^1+2^0$
$=8+4+2+1$
$=\mathbf{15}$

15 を 3 で割ると商は 5 余りは 0
5 を 3 で割ると商は 1 余りは 2
1 を 3 で割ると商は 0 余りは 1

したがって, 15 を 3 進法表示すると

120

31 (1) $\frac{14}{3}<x<5$ のとき

$2<\frac{3}{7}x<\frac{15}{7}$ であるから

$$\left[\frac{3}{7}x\right]=2$$

また, $[x]=4$ であるから,

$$\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\left[\frac{3}{7}\cdot 4\right]=\left[\frac{12}{7}\right]=1$$

したがって,

$$\left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]=\mathbf{1}$$

(2) $\left[\frac{1}{2}x\right]=N$ (N は整数) とおくと,

$$\frac{1}{2}x-1<\left[\frac{1}{2}x\right]\leqq\frac{1}{2}x$$

より, $\frac{1}{2}x-1<N\leqq\frac{1}{2}x$

x について解いて,

$$2N\leqq x<2N+2$$

このとき,

$$[x]=2N,\ 2N+1$$

であり,

$$\frac{1}{2}[x]=N,\ N+\frac{1}{2}$$

したがって

$$\left[\frac{1}{2}[x]\right]=N$$

以上より,

$$\left[\frac{1}{2}x\right]-\left[\frac{1}{2}[x]\right]=N-N=0$$

(3) $\left[\frac{1}{n}x\right]=N$ (N は整数) とおくと,

$$\frac{1}{n}x-1<\left[\frac{1}{n}x\right]\leqq\frac{1}{n}x$$

より, $\frac{1}{n}x-1<N\leqq\frac{1}{n}x$

よって,

$$nN\leqq x<nN+n$$

このとき,

$$[x]=nN,\ nN+1,\ nN+2,\ \cdots,\ nN+(n-1)$$

であり,

$$\frac{1}{n}[x]=N,\ N+\frac{1}{n},\ N+\frac{2}{n},\ \cdots,\ N+\frac{n-1}{n}$$

したがって,

$$\left[\frac{1}{n}[x]\right]=N$$

以上より,

$$\left[\frac{1}{n}x\right]-\left[\frac{1}{n}[x]\right]=\mathbf{0}$$

32 $P=(m-5)(m^2+m+1)$

であり, m は正の整数であるから,

$m-5 \geqq -4,\ m^2+m+1 \geqq 3$
したがって，P が素数であることから
$m-5=1$
よって，$m=6$
したがって，$P=\mathbf{43}$

33 (1) $a=\left[\dfrac{50}{2}\right]+\left[\dfrac{50}{2^2}\right]+\left[\dfrac{50}{2^3}\right]+\left[\dfrac{50}{2^4}\right]+\left[\dfrac{50}{2^5}\right]+\left[\dfrac{50}{2^6}\right]+\cdots$

$=\left[\dfrac{50}{2}\right]+\left[\dfrac{50}{4}\right]+\left[\dfrac{50}{8}\right]+\left[\dfrac{50}{16}\right]+\left[\dfrac{50}{32}\right]$

$=25+12+6+3+1$

$=\mathbf{47}$

(2) ${}_{100}C_{50}=\dfrac{100!}{50!50!}$

これは整数であることに注意する．

100! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，

$\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{3^2}\right]+\left[\dfrac{100}{3^3}\right]+\left[\dfrac{100}{3^4}\right]+\left[\dfrac{100}{3^5}\right]+\cdots$

$=\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{9}\right]+\left[\dfrac{100}{27}\right]+\left[\dfrac{100}{81}\right]$

$=33+11+3+1$

$=48$

同様に，50! を素因数分解したとき，現れる素数 3 の個数は，

$\left[\dfrac{50}{3}\right]+\left[\dfrac{50}{3^2}\right]+\left[\dfrac{50}{3^3}\right]+\left[\dfrac{50}{3^4}\right]+\cdots$

$=\left[\dfrac{50}{3}\right]+\left[\dfrac{50}{9}\right]+\left[\dfrac{50}{27}\right]$

$=16+5+1$

$=22$

したがって，${}_{100}C_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の b は，

$b=48-22-22$
$=\mathbf{4}$

34-1 (1) a を 3 で割った余りが 0，1，2 のとき，a^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 0，1，1 となる．

(2) a^2，b^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

a^2，b^2 を 3 で割った余りがともに 1 のときも，一方が 0，他方が 1 のときも a^2+b^2 は 3 で割り切れない．

したがって，a^2+b^2 が 3 の倍数ならば a^2，b^2 はともに 3 の倍数である．このとき，a，b はともに 3 の倍数である．

(3) a，b ともに 3 の倍数でないならば，(1)より，a^2，b^2 を 3 で割った余りは 1 であり，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である．しかし，これに等しい c^2 を 3 で割った余りが 2 となることはない．

したがって，a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

34-2 連続 3 整数の中に必ず 3 の倍数が含まれるので，当然連続 4 整数の中にも 3 の倍数が含まれる．

また，連続 4 整数の中に必ず 4 の倍数があり，また，それ以外の 3 つの整数の中に 2 の倍数がある．(4 の倍数の 2 つ隣)

したがって，連続 4 整数の積は $3\times4\times2$ つまり 24 の倍数であり，24 で割り切れる．

35 $m+n$ と $m+4n$ の最大公約数が 3 であるから，

$m+n=3a$ ……①
$m+4n=3b$ ……②
(a と b は互いに素な自然数)

と表すことができる．

このとき，$m+n$ と $m+4n$ の最小公倍数は $3ab$ であるから，

$4m+16n=3ab$

両辺に 3 をかけて

$12m+48n=3a\cdot3b$

これに①，②を代入して

$12m+48n=(m+n)(m+4n)$

左辺は，$12(m+4n)$ と変形できるから

$12(m+4n)=(m+n)(m+4n)$

$m+4n \neq 0$ であるから

$m+n=12$

よって，自然数 m，n $(m \geqq n)$ は

$(m,\ n)=(6,\ 6),\ (7,\ 5),\ (8,\ 4),\ (9,\ 3),\ (10,\ 2),\ (11,\ 1)$

それぞれに対して，$m+4n$ の値は

$m+4n=30,\ 27,\ 24,\ 21,\ 18,\ 15$

となる．このうち，$m+n$ $(=12)$ との最大公約数が 3 であるものは

$m+4n=27,\ 21,\ 15$

であり，このとき

$(m,\ n)=\mathbf{(7,\ 5),\ (9,\ 3),\ (11,\ 1)}$

36 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{120}{360}$，$\dfrac{3}{8}=\dfrac{135}{360}$

であるから，

$$\frac{1}{3}<\frac{m}{360}<\frac{3}{8}$$

を満たす分数 $\dfrac{m}{360}$ （m は整数）は，次の 14 個ある．

$$\frac{121}{360},\ \frac{122}{360},\ \frac{123}{360},\ \frac{124}{360},\ \frac{125}{360},$$
$$\frac{126}{360},\ \frac{127}{360},\ \frac{128}{360},\ \frac{129}{360},\ \frac{130}{360},$$
$$\frac{131}{360},\ \frac{132}{360},\ \frac{133}{360},\ \frac{134}{360}$$

このうち，既約分数は

$$\frac{121}{360},\ \frac{127}{360},\ \frac{131}{360},\ \frac{133}{360}$$

の **4 個**ある．

そのうち，最大の m は

$\mathbf{m=133}$

である．

37 $7l=4m+3$ ……①

$l=1$ のとき $m=1$ であるから，

$7\cdot1=4\cdot1+3$ ……①′

①−①′ より

$7(l-1)=4(m-1)$ ……①″

右辺は 4 の倍数であり，7 と 4 は互いに素であるから，

$l-1=4k$ （k は整数）

と表すことができ，このとき，①″より

$m-1=7k$

よって

$\mathbf{l=4k+1,\ m=7k+1}$

これらを②に代入して

$(4k+1)(7k+1)$
$=139-28n^2+(4k+1)+(7k+1)$

整理して

$28(k^2+n^2)=140$

よって，$k^2+n^2=5$

これを満たす整数 k，n の組 $(k,\ n)$ は

$(k,\ n)=(-2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (-1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (1,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ -1),\ (2,\ 1)$

の 8 通りある．

したがって，①，②を満たす整数の組 $(l,\ m,\ n)$ は全部で **8 通り**ある．

38 $xy+3x+2y=12$ より

$(x+2)(y+3)=18$

$x+2$，$y+3$ は整数であるから

$x+2$	-18	-9	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	9	18
$y+3$	-1	-2	-3	-6	-9	-18	18	9	6	3	2	1

したがって，x，y は次の通りである．

x	-20	-11	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4	7	16
y	-4	-5	-6	-9	-12	-21	15	6	3	0	-1	-2

よって，

$x+y$ **の最小値は** $\mathbf{-24}$

xy **の最大値は 80**

39 (1) $1 \leqq c \leqq b \leqq a$ より

$$1 \geqq \frac{1}{c} \geqq \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{a} > 0$$

よって，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{3}{c}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$ ……(＊)より

$$\frac{1}{3}\leqq\frac{3}{c}$$

よって，$c\leqq9$

$c=9$ のとき $a=b=9$ とすれば(＊)が成り立つ．

また，$\frac{1}{a}>0$，$\frac{1}{b}>0$，(＊)より

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{3}$$

よって，$c>3$

$c=4$ のとき，$a=b=24$ とすれば(＊)が成り立つ．

したがって，c の**最大値は 9**，**最小値は 4** である．

(2) $c=6$ のとき(＊)より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$$

よって，$6b+6a=ab$

したがって，$(a-6)(b-6)=36$

$a-6$，$b-6$ は整数であり

$a\geqq b\geqq6$ より，$a-6\geqq b-6\geqq0$

したがって，

$a-6$	36	18	12	9	6
$b-6$	1	2	3	4	6

よって，

$(a,\ b)=$**$(42,\ 7)$，$(24,\ 8)$，$(18,\ 9)$，$(15,\ 10)$，$(12,\ 12)$**

40

(1) $x^2+2px+3p^2-8=0$ ……①

x の 2 次方程式①が実数解をもつ条件より，

$$p^2-(3p^2-8)\geqq0$$

よって，$p^2\leqq4$

したがって，

$$\boldsymbol{-2\leqq p\leqq2}$$

(2) p が整数のとき，(1)より，

$p=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

・$p=-2$ のとき

①は，$x^2-4x+4=0$

これは，整数解 $x=2$（重解）をもつ．

・$p=-1$ のとき

①は，$x^2-2x-5=0$

これは整数解をもたない．

・$p=0$ のとき

①は，$x^2-8=0$

これは整数解をもたない．

・$p=1$ のとき

①は，$x^2+2x-5=0$

これは整数解をもたない．

・$p=2$ のとき

①は，$x^2+4x+4=0$

これは，整数解 $x=-2$（重解）をもつ．

以上より，①を満たす整数 x，p の組 $(x,\ p)$ は，

$$(x,\ p)=(2,\ -2),\ (-2,\ 2)$$

の **2 通り**ある．

41

(1)

$n^2+mn-2m^2-7n-2m+25=0$

n について整理して

$n^2+(m-7)n-2m^2-2m+25=0$

よって

$$n=\frac{1}{2}\{-(m-7)\pm\sqrt{(m-7)^2-4(-2m^2-2m+25)}\}$$

したがって

$$\boldsymbol{n=\frac{7-m\pm\sqrt{9m^2-6m-51}}{2}}$$

(2) m，n は自然数であるから

$\sqrt{9m^2-6m-51}=N$

(Nは 0 以上の整数)

と表せることが必要である．

このとき

$9m^2-6m-51=N^2$

よって

$(3m-1)^2-52=N^2$

変形して

$(3m-1)^2-N^2=52$

左辺を因数分解して

$$(3m-1+N)(3m-1-N)=52$$

$3m-1+N$，$3m-1-N$ はともに整数であり，

$$3m-1+N \geqq 3m-1-N$$

である．

また，m は自然数，N は 0 以上の整数であるから，

$$3m-1+N \geqq 2$$

である．

よって，$3m-1+N$，$3m-1-N$ は次の 3 通り．

$3m-1+N$	52	26	13
$3m-1-N$	1	2	4

(i) $\begin{cases} 3m-1+N=52 \\ 3m-1-N=1 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて

$2N=51$

これは N が整数であることに反する．

(ii) $\begin{cases} 3m-1+N=26 \\ 3m-1-N=2 \end{cases}$ のとき

これら 2 式より，

$m=5$，$N=12$

(iii) $\begin{cases} 3m-1+N=13 \\ 3m-1-N=4 \end{cases}$ のとき

これら 2 式を辺々ひいて

$2N=9$

これは N が整数であることに反する．

以上より，$m=\mathbf{5}$

このとき(1)より，$n=7$，-5

n は自然数であるから，$n=\mathbf{7}$

42 $x^2-kx+4k=0$

の 2 つの解を α，β $(\alpha \geqq \beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=k & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=4k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②より k を消去して

$$\alpha\beta=4(\alpha+\beta)$$

変形して

$$(\alpha-4)(\beta-4)=16$$

$\alpha-4$，$\beta-4$ はともに整数であり，

$$\alpha-4 \geqq \beta-4$$

であるから

$\alpha-4$	16	8	4	-1	-2	-4
$\beta-4$	1	2	4	-16	-8	-4

よって，α，β は次の通りである．

α	20	12	8	3	2	0
β	5	6	8	-12	-4	0

$$k=\alpha+\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

であるから

$$k=25,\ 18,\ 16,\ -9,\ -2,\ 0$$

したがって，k の最小値 m は

$$m=-9$$

よって，$|m|=\mathbf{9}$

43 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$
$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$0°<\theta<90°$ より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

44 (1)

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

に $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を代入して

$$\frac{1}{4}=1-2\sin\theta\cos\theta$$

よって，$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2)

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0°<\theta<90°$ より $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

45 $\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ)$
$= \sin 15^\circ$

したがって

$$\cos^2 15^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 75^\circ$$
$$= \cos^2 15^\circ + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sin^2 15^\circ$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

46 $P = 2\cos^2\theta + \sin\theta$

$$= 2(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta$$
$$= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから

$$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

したがって，P は

$\sin\theta = \frac{1}{4}$ のとき，**最大値** $\boldsymbol{\frac{17}{8}}$

$\sin\theta = 1$ のとき，**最小値 1**

をとる．

47 余弦定理より，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

この式の右辺に，$a^2 = b^2 + c^2 + bc$ を代入して

$$\cos A = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$$

よって，$A = \boldsymbol{120^\circ}$

48 正弦定理より

$\sin A = \frac{a}{2R}$，$\sin B = \frac{b}{2R}$，$\sin C = \frac{c}{2R}$

（R は三角形 ABC の外接円の半径）

であるから

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

より

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

よって，$a^2 = b^2 + c^2$

したがって，

$$A = \boldsymbol{90^\circ}$$

49 (1) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$

$$= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

よって，

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{8^2}$$

$\sin A > 0$ であるから，$\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

よって，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

(2) $\triangle ABC = \frac{r}{2}(AB + BC + AC)$

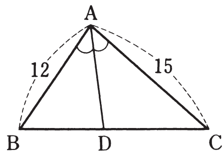
であるから

$$\frac{r}{2}(4 + 6 + 5) = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

よって，$r = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

50 $\angle BAD = \angle DAC$ であるから

$BD : DC$
$= AB : AC$
$= 12 : 15$
$= 4 : 5$



したがって，

$$BD = \frac{4}{9}BC = 8$$

また，余弦定理より

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$$
$$= \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 18} = \frac{9}{16}$$

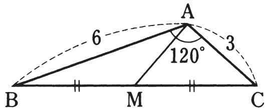
さらに，三角形 ABD に余弦定理を用いて

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B$$
$$= 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{9}{16}$$
$$= 100$$

よって，$AD = \boldsymbol{10}$

51 余弦定理より

$BC^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\cos120^\circ$
$=63$



よって，

$BC=3\sqrt{7}$

また，

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$
$$=\frac{6^2+63-3^2}{2\cdot6\cdot3\sqrt{7}}$$
$$=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

ここで，三角形 ABM に余弦定理を用いて

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B$

$$=6^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot6\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}}$$
$$=\frac{27}{4}$$

よって，$AM=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解　上のように，$BC=3\sqrt{7}$ を求めたあと

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(中線定理) より

$$6^2+3^2=2\left\{AM^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2\right\}$$

よって，$AM^2=\frac{27}{4}$

したがって，$AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

52 (1)　$b\sin^2A+a\cos^2B=a$

より，　$b\sin^2A=a(1-\cos^2B)$

よって，$b\sin^2A=a\sin^2B$

正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

(Rは外接円の半径)

であるから

$$b\left(\frac{a}{2R}\right)^2=a\left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

分母を払って，$a^2b=ab^2$

よって，$a=b$

したがって，**BC＝CA の二等辺三角形**である．

(2)　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

を　$a\cos A=b\cos B$ に代入して

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に $2abc$ をかけて

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

整理して，

$a^2c^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$

よって，$(a^2-b^2)c^2-(a^4-b^4)=0$

左辺を因数分解して

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

よって，$a^2=b^2$ または $c^2=a^2+b^2$

したがって，

BC＝CA の二等辺三角形 または，**∠C＝90° の直角三角形**である．

53 (1)　$\sqrt{x^2-2x}$ の辺が他の 2 辺より長さが短くないことより，

$0<4-x\leqq\sqrt{x^2-2x}$　……①

$(0<)\ 2\leqq\sqrt{x^2-2x}$　……②

①より

$x<4$ かつ $(4-x)^2\leqq x^2-2x$

よって

$x<4$ かつ $6x\geqq16$

したがって

$\frac{8}{3}\leqq x<4$　……①′

②より，$x^2-2x\geqq4$

よって

$x\leqq1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5}\leqq x$　……②′

(最大辺の長さ)<(他の 2 辺の長さの和)　より，

$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2$

よって，$\sqrt{x^2-2x}<6-x$　……③

①′より $6-x>0$ であるから，③の両辺を 2 乗して

$$x^2-2x<(6-x)^2$$

よって，$x<\dfrac{18}{5}$ ……③′

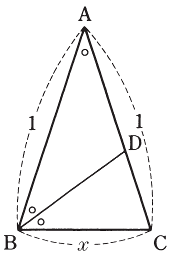
①′，②′，③′より

$$\boldsymbol{1+\sqrt{5}\leqq x<\frac{18}{5}}$$

(2)　最小の辺は，$4-x$，2 のどちらかであるが，(1)の結果より，最小の辺は $4-x$ である．この対角が θ であるから，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{x^2-2x})^2+2^2-(4-x)^2}{2\cdot\sqrt{x^2-2x}\cdot 2}$$
$$=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

54　∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とすると



$\angle\mathrm{CBD}$
$=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}$
$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{180^\circ-\angle\mathrm{A}}{2}$
$=36^\circ=\angle\mathrm{A}$

よって，△ABC∽△BDC

$\left(\begin{array}{l}\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{CBD},\\ \angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{BCD}\ \text{より},\end{array}\right)$

したがって，AB：BD＝AC：BC であり，BC＝x とおくと，

$$1:\mathrm{BD}=1:x$$

よって，　BD＝x

また，AB：BD＝BC：DC

よって，　$1:x=x:\mathrm{DC}$

したがって，　DC＝x^2

さらに ∠DAB＝∠DBA より

AD＝BD　(＝x)

したがって，AD＋DC＝AC より

$$x+x^2=1$$

よって，$x^2+x-1=0$

$x>0$ であるから，$x=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

$$\cos A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{1+1-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{1}{2}(2-x^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\quad(x^2=1-x\ \text{より})$$
$$=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

55　(1)　(ア)　三角形 ABC に余弦定理を用いて

$\boldsymbol{x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta}$ ……①

(イ)　三角形 DAC に余弦定理を用いて

$x^2=c^2+d^2-2cd\cos\angle\mathrm{CDA}$

$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-\theta$ であるから

$\cos\angle\mathrm{CDA}=\cos(180^\circ-\theta)$
$=-\cos\theta$

よって，

$\boldsymbol{x^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta}$ ……②

(2)　①×cd＋②×ab より

$(cd+ab)x^2$
$=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

右辺＝$(a^2cd+abc^2)+(b^2cd+abd^2)$
$=ac(ad+bc)+bd(bc+ad)$
$=(ad+bc)(ac+bd)$

よって，

$(ab+cd)x^2=(ad+bc)(ac+bd)$……③

上と同じようにして，BD＝y とおくと

$(ad+bc)y^2=(ab+cd)(ac+bd)$……④

③×④ より

$x^2y^2=(ac+bd)^2$

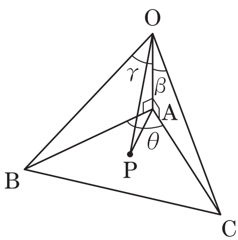
よって，$xy=ac+bd$

つまり，AC・BD＝$ac+bd$

56　(1)

$\mathrm{OB}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\cos\gamma}$
$=\sqrt{3}$，

$\mathrm{OC}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\cos\beta}$
$=\sqrt{3}$



三角形 OBC に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}BC^2&=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos\alpha\\&=3+3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

よって,$BC=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{2}}}$

(2) $AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{2}$,

$AC=\sqrt{OC^2-OA^2}=\sqrt{2}$

三角形 ABC に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}\\&=\frac{2+2-\frac{9}{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{8}}\end{aligned}$$

(3) 三角形 ABC の外接円の半径 R は,

$$\begin{aligned}R&=\frac{BC}{2\sin\theta}\\&=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}OP&=\sqrt{OA^2+R^2}\\&=\sqrt{1+\frac{8}{7}}\\&=\sqrt{\boldsymbol{\frac{15}{7}}}\end{aligned}$$

57 3 の倍数となるのは各位の数字の和が 3 の倍数のときであるから, 0, 1, 2, 3 から和が 3 の倍数になる異なる 3 つの数字を選ぶと

(0, 1, 2), (1, 2, 3)

0, 1, 2 を並べて 3 桁の整数をつくると 102, 120, 201, 210
の 4 通りできる.

1, 2, 3 を並べて 3 桁の整数をつくると 123, 132, 213, 231, 312, 321
の 6 通りできる.
したがって, 全部で

4+6=**10** (**通り**)

できる.

58 大のさいころの目が 1, 3, 5 のとき, 小のさいころの目は 4 .

大のさいころの目が 2 または 6 のとき, 小のさいころの目は, 2, 4, 6 のいずれか.

大のさいころの目が 4 のとき, 小のさいころの目は 1 ~ 6 のいずれでもよい.
したがって,

$3\times1+2\times3+1\times6=$**15** (**通り**)

59 n 人のひとりひとりについて, A, B のいずれに配分するかは 2 通りあるので

$\boldsymbol{2^n}$ (通り) ……(ア)

このうち, A, B どちらか一方に n 人すべてを配分する方法は

2 (通り) ……(イ)

したがって, A, B のどちらにも少なくとも 1 人の学生を配分する方法は

$\boldsymbol{2^n-2}$ (通り) ……(ウ)

60 $400=2^4\times5^2$

であるから 400 の正の約数の個数は

$(4+1)\cdot(2+1)=$**15** (個)

61 (1) 5 桁目が 1 である整数

1□□□□

は $9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$

通りある. 5 桁目が 2, 3, 4 である整数もそれぞれ 3024 通りあるので, 5 桁目が 1, 2, 3, 4 のいずれかである整数は

$3024\times4=$**12096** (**通り**)

ある.

(2) 50□□□, 51□□□, 52□□□, 53□□□, 54□□□

という整数は, 全部で

$5\times8\cdot7\cdot6=1680$ (個)

ある．

560□□，561□□，562□□，

563□□，564□□

という整数は，全部で

$5\times7\cdot6=210$（個）ある．

5670□，5671□，5672□，

5673□，5674□，

という整数は，全部で

$5\times6=30$（個）ある．

5678□

という整数で，56789 以下のものは

56780，56781，56782，

56783，56784，56789

の 6 個ある．

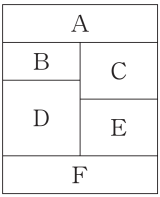
5 桁目が 4 以下である整数は(1)より 12096 個あるので，56789 以下の整数は，全部で

$12096+1680+210+30+6$

$=$**14022（個）**

ある．

62　(1)　図のように各区画をA～Fとする．3 色で塗り分けるとき



AとD，BとE，

CとF

は同じ色を塗ることになる．

赤，青，黄の 3 色で塗り分けるとき

AとDを何色にするかが 3 通り，

BとEを何色にするかは，残った 2 色のいずれにするかで 2 通り，

CとFは残った色を塗る

ことになる．

したがって，塗り分け方は

$3\times2\times1=$**6（通り）**

ある．

(2)　Aに何色を塗るかは 4 通りあり，Bに何色を塗るかはA以外の 3 通り，Cに何色を塗るかは A，B 以外の 2 通りある．

Dに何色を塗るかは，B，C 以外の 2 通りある．Eに何色を塗るかは，C，D 以外の 2 通りある．

Fに何色を塗るかは，D，E 以外の 2 通りある．

したがって，4 色（使わない色があってもよい）で塗り分ける方法は

$4\times3\times2\times2\times2\times2=192$（通り）

ある．

このうち，3 色しか使っていない塗り分け方は除く．3 色の選び方が 4 通りあり，それぞれについて(1)より 6 通りの塗り分け方があるから，3 色で塗り分ける方法は

$4\times6=24$（通り）

ある．

したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は

$192-24=$**168（通り）**

ある．

別解　4 色で塗り分けるとき，

AとD，BとEは同色を使う．

AとD，BとFは同色を使う．

AとD，CとFは同色を使う．

AとE，BとFは同色を使う．

AとE，CとFは同色を使う．

AとF，BとEは同色を使う．

BとE，CとFは同色を使う．

場合があり，それぞれについて $4!$ 通りの塗り分け方がある．

したがって，4 色すべてを使って塗り分ける方法は

$4!\times7=168$（通り）

ある．

63　(1)　奇数は全部で 7 個あるから

${}_7C_3=$**35（組）**

(2)　3 の倍数は全部で 4 個，3 の倍数でないものは 10 個ある．

全体から 3 個を取る方法から，3 の倍数以外から 3 個を取る方法をひいて

${}_{14}C_3-{}_{10}C_3=364-120$

$=$**244（組）**

64 1 以上 1000 以下の整数のうち，2 の倍数は **500** 個ある．

また，3 の倍数は **333** 個，6 の倍数は，**166** 個ある．

2 の倍数のうち，3 の倍数とならないものは，2 の倍数の個数から 6 の倍数の個数をひいた

$500-166=\mathbf{334}$ (個)

ある．

65 (1) 両端の 1 の間に

0 と書いたカード 2 枚，

2 と書いたカード 3 枚

を並べる方法は

$\dfrac{5!}{2!3!}=\mathbf{10}$ **(通り)**

ある．

(2) これら 7 枚のカードを並べる方法は $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$ (通り)

ある．

このうち，左端が 0 と書いたカードであるものは

$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ (通り)

ある．

よって，7 桁の整数は全部で

$210-60=\mathbf{150}$ **(通り)**

できる．

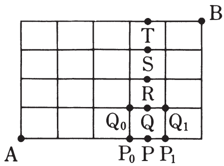
66 (1)

AからBまでの最短経路は

$\dfrac{9!}{5!4!}$

$=\mathbf{126}$ **(通り)**

ある．



(2) $A \to P_0 \to P_1 \to B$ について

$1\times1\times\dfrac{5!}{1!4!}=\mathbf{5}$ **(通り)**

(3) $A \to Q_0 \to Q_1 \to B$ について

$\dfrac{4!}{3!1!}\times1\times\dfrac{4!}{1!3!}=\mathbf{16}$ **(通り)**

(4) (1)のうち，図の R，S，T のいずれかを通る最短経路の数を求めればよい．

これは，(1)の場合の数から(2)と(3)の場合の数をひけば求まるので

$126-5-16=\mathbf{105}$ **(通り)**

67-1 大人 3 人，子供 6 人の計 9 人をAに 4 人，Bに 3 人，Cに 2 人を割り当てる方法は

${}_9C_4\times{}_5C_3=126\times10$

$=\mathbf{1260}$ (通り)

また，大人 3 人を A，B，C に割り当てる方法は，3! 通りあり，子供 6 人を A，B，C に 2 人ずつ割り当てる方法は，${}_6C_2\cdot{}_4C_2$ 通りある．

よって，

$3!\times{}_6C_2\cdot{}_4C_2=6\times15\cdot6=\mathbf{540}$ (通り)

67-2 人も車も区別しないで，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

(1 人，9 人)，(2 人，8 人)，

(3 人，7 人)，(4 人，6 人)，

(5 人，5 人)

の **5** 通りある．

人は区別しないが車は区別して，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

(1 人，9 人)，(2 人，8 人)，

(3 人，7 人)，(4 人，6 人)，

(5 人，5 人)，(6 人，4 人)，

(7 人，3 人)，(8 人，2 人)，

(9 人，1 人)

の **9** 通りある．

人も車も区別する場合について，

バスを A，B として区別して考える．

A に乗るのは 1 人，2 人，3 人，…，9 人の場合があり，それぞれだれが乗るかが

${}_{10}C_1$ 通り，${}_{10}C_2$ 通り，${}_{10}C_3$ 通り，…，${}_{10}C_9$ 通り

ある．

したがって，人も車も区別する場合，10 人が 2 台のバスに分乗する方法は，

$$ {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 $$
$$ = 10+45+120+210+252+210+120+45+10 $$
$$ = \mathbf{1022}\ (通り) $$

別解　人も車も区別する場合，それぞれの乗客はＡかＢのバスに乗るので，10人がＡかＢのバスに乗る方法は，2^{10} 通りある．

そのうち，10人全員がＡに乗る場合と，10人全員がＢに乗る場合は題意に適さないので，求める方法は

$$ 2^{10}-2=1022\ (通り) $$

68　12人を4人ずつ3組に分ける方法は　$\dfrac{{}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4}{3!} = \mathbf{5775}$ (通り)

また，特定の3人Ａ，Ｂ，Ｃが互いに異なる組に入るように4人ずつ3組に分ける方法は，残りの9人について，

Ａの属するグループに入れる3人の決め方が ${}_9C_3$ 通り，

Ｂの属するグループに入れる3人の決め方が ${}_6C_3$ 通り

あるので

$$ {}_9C_3 \times {}_6C_3 = \mathbf{1680}\ (通り) $$

69　12個の頂点から3頂点を選ぶ選び方を考えて

$$ {}_{12}C_3 = \mathbf{220}\ (個) $$

このうち，外接円の直径の両端ともう1つの頂点を選ぶときに直角三角形ができる．

直径の両端の選び方が6通りあり，それぞれに対してもう1つの頂点の選び方が10通りあるから，直角三角形は

$$ 6\times 10 = \mathbf{60}\ (個) $$

である．また，正三角形は **4** 個ある．

70　(1)　1辺の長さが1，2，…，8の正方形がそれぞれ

$$ 8^2,\ 7^2,\ \cdots,\ 2^2,\ 1^2 $$

個あるから

$$ 8^2+7^2+\cdots+2^2+1^2 $$
$$ =64+49+36+25+16+9+4+1 $$
$$ = \mathbf{204}\ (個) $$

(2)　縦横それぞれ9本の平行線から2本ずつ選べば長方形が1つ決まるので

$$ {}_9C_2 \times {}_9C_2 = \mathbf{1296}\ (個) $$

ある．

71　女子2人が両端にくる場合：

左端の女子の決め方が4通り，

右端の女子の決め方が3通り

ある．残りの2人の女子と3人の男子の並べ方が5!通りあるので

$$ 4\times 3\times 5! = \mathbf{1440}\ (通り) $$

女子4人が隣り合う場合：

4人の女子を1人と考えて，3人の男子と並べる方法は4!通りある．そして4人の女子の並べ方は4!通りあるので

$$ 4!\times 4! = \mathbf{576}\ (通り) $$

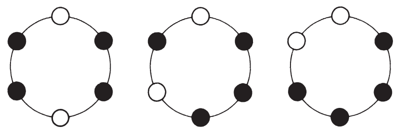
72-1　$(6-1)!=5!$

$$ = \mathbf{120}\ (通り) $$

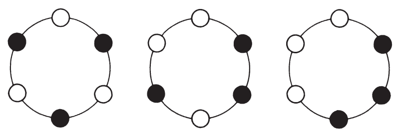
72-2　黒6個のもの　……1種類

黒5個，白1個のもの　……1種類

黒4個，白2個のもの　……3種類



黒3個，白3個のもの　……3種類



黒2個，白4個のもの　……3種類

(黒4個，白2個のものと同様)

黒1個，白5個のもの　……1種類

白6個のもの　……1種類

したがって，

$$ 1+1+3+3+3+1+1 = \mathbf{13}\ (種類) $$

73 (1) 全部で

$$9\cdot 8 = \mathbf{72}\ (\textbf{個})$$

ある．

これら 72 個の一の位の数字は 1 ～ 9 のいずれも同じ回数 (8 回) ずつ現れるから，この 72 個の一の位の和は

$$8(1+2+3+\cdots+8+9)=360$$

十の位についても同様だから，72 個の整数の総和は

$$360\times 10+360=\mathbf{3960}$$

(2) 全部で

$$9\cdot 8\cdot 7=\mathbf{504}\ (\textbf{個})$$

できる．

これら 504 個の一の位の数字は 1 ～ 9 のいずれも 56 回ずつ現れるから，これら 504 個の一の位の和は

$$56(1+2+3+\cdots+8+9)=2520$$

十の位，百の位についても同様だから，504 個の整数の総和は

$$2520\times 100+2520\times 10+2520$$
$$=\mathbf{279720}$$

74 (1) 3 種類のものから重複を許して 10 個選ぶ方法であり

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=\mathbf{66}\ (\textbf{通り})$$

(2) 球と立方体を 1 個ずつ入れ，残りの 8 個を 3 種類のものから重複を許して選べばよいので

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8=\mathbf{45}\ (\textbf{通り})$$

75 2 つのさいころの目の出方は全部で，$6\times 6=36$ (通り) ある．

このうち，目の和が 3 の倍数になるのは

(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4),
(3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5),
(5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)

の 12 通りあるので，求める確率は

$$\frac{12}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

76-1 (1) 10 枚の札を円形に並べる方法は

$$(10-1)!=9!\ (\text{通り})$$

ある．

このうち，時計回りに見て，1，2 の順で札が並ぶものは，これら 2 枚を 1 枚の札と考えて，全部で 9 枚の札を並べる方法の

$$(9-1)!=8!\ (\text{通り})$$

ある．

したがって，求める確率は

$$\frac{8!}{9!}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) 0，1 の札，2，3 の札をそれぞれ 1 枚の札と考えて並べる方法は

$$(8-1)!=7!\ (\text{通り})$$

ある．

したがって，求める確率は

$$\frac{7!}{9!}=\boldsymbol{\frac{1}{72}}$$

76-2 a，b の組 $(a,\ b)$ は全部で $50\cdot 49$ 通りある．

1 から 50 までの整数を 7 で割った余りで分類すると

7 で割った余りが 1 のものは 8 個，
7 で割った余りが 0，2，3，4，5，6 のものはそれぞれ 7 個ずつ

ある．

$ab(a+b)$ が 7 で割り切れないのは，a，b，$a+b$ がいずれも 7 で割り切れないときである．

このような a，b の組を数える．

a を 7 で割った余りが 1 のとき，
a は 8 通りあり，
b は，残り 49 個の整数のうち，7 で割った余りが 0，6 でない 35 通りあるので

$$8\cdot 35=280\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 2 のとき，
a は 7 通りあり，
b は，7 で割った余りが 0，5 でない 35 通りあるので

$$7\cdot35=245\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 3, 4, 5 のときも，それぞれ

$$7\cdot35=245\ (\text{通り})$$

a を 7 で割った余りが 6 のとき，
a は 7 通りあり，
b は，7 で割った余りが 0, 1 でない 34 通りあるので

$$7\cdot34=238\ (\text{通り})$$

したがって，$ab(a+b)$ が 7 で割り切れない確率は

$$\frac{280+4\times245+238}{50\cdot49}=\mathbf{\frac{107}{175}}$$

77 (1)　3 つのさいころの目の出方は全部で 6^3 通りある．

3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の組は

(4, 4, 4), (4, 4, 3)

の 2 組ある．

(4, 4, 4) となる目の出方は 1 通り，
(4, 4, 3) となる目の出方は 3 通り

あるから，3 つの目の数がどれも 4 以下で，これらの積が 40 より大きくなる目の出方は

$$1+3=4\ (\text{通り})$$

ある．

3 つの目の数がどれも 4 以下であるような目の出方は

$$4^3=64\ (\text{通り})$$

あるので，3 つの目の数がどれも 4 以下であり，しかもこれらの積が 40 以下であるような目の出方は

$$64-4=60\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，求める確率は

$$\frac{60}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

(2)　3 つの目の数のうち，少なくとも 1 つが 5 以上で，これらの積が 40 以下となる組は

(6, 6, 1), (6, 5, 1), (6, 4, 1)
(6, 3, 2), (6, 3, 1), (6, 2, 2)
(6, 2, 1), (6, 1, 1), (5, 5, 1)
(5, 4, 2), (5, 4, 1), (5, 3, 2)
(5, 3, 1), (5, 2, 2), (5, 2, 1)
(5, 1, 1)

の 16 組ある．

〰〰 の 6 組について，それぞれ目の出方は 3 通り，

$\underline{\qquad}$ の 10 組について，それぞれ目の出方は 6 通りあるから，少なくとも 1 つ 5 以上の目が出て，3 つの目の数の積が 40 以下となる目の出方は

$$3\times6+6\times10=78\ (\text{通り})$$

ある．

3 つの目の数すべてが 4 以下で，これらの積が 40 以下となる目の出方は(1)より 60 通りあるので，積が 40 以下となる目の出方は

$$78+60=138\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，求める確率は

$$\frac{138}{6^3}=\mathbf{\frac{23}{36}}$$

78　3 人の生まれた日の曜日は

$$7\cdot7\cdot7\ (\text{通り})$$

ある．

このうち，3 人の生まれた日の曜日がすべて異なるものは

$$7\cdot6\cdot5\ (\text{通り})$$

ある．
したがって，少なくとも 2 人が同じ曜日生まれである確率は

$$1-\frac{7\cdot6\cdot5}{7\cdot7\cdot7}=\mathbf{\frac{19}{49}}$$

79 (1)　すべて奇数の目である確率から，3 か 5 の目以外は出ていない確率をひいて

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n=\mathbf{\frac{3^n-2^n}{6^n}}$$

(2)　1 の目が出ていない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

であるから，事象 B の起こる確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$P(A\cup B)$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\left(\frac{3}{6}\right)^n+1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{3^n-2^n}{6^n}$$

$$=\boldsymbol{\frac{6^n+2^n-5^n}{6^n}}$$

80　1 つのさいころを投げるとき，偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，3 回とも偶数の目が出る確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

81　(1)　A → C_1 と進む確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ であり，C_1 → B と進む確率は 1 であるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

(2)　A → C_2 について

(i)　上，右，右，右と進む

(ii)　右，上，右，右と進む

(iii)　右，右，上，右と進む

(iv)　右，右，右，上と進む

(v)　右上，右，右と進む

(vi)　右，右上，右と進む

(vii)　右，右，右上と進む

(i)～(iii)の確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{128}$$

(iv)の確率は　$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

(v)～(vii)の確率はそれぞれ

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{64}$$

したがって，A → C_2 と進む確率は

$$3\cdot\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+3\cdot\frac{1}{64}=\frac{11}{128}$$

C_2 → B と進む確率は 1 であるから，

求める確率は，$\boldsymbol{\frac{11}{128}}$ である．

82　(1)　3 回目にAに戻るのは

A → B → C → A

A → B → D → A

A → C → B → A

A → C → D → A

A → D → B → A

A → D → C → A

の 6 通りあり，これらの確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2)　何回目にBにいるかに注目して

(i)　A → B → X → Y → A

(ii)　A → X → B → Y → A

(iii)　A → X → Y → B → A

の 3 つの型がある．

(i)には，A → B → A → C → A

A → B → A → D → A

A → B → C → D → A

A → B → D → C → A

(ii)には，A → C → B → C → A

A → C → B → D → A

A → D → B → C → A

A → D → B → D → A

(iii)には，A → C → A → B → A

A → C → D → B → A

A → D → A → B → A

A → D → C → B → A

があるから，求める確率は

$$12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

83　(1)　だれが勝つかが 4 通り，どの手で勝つかが 3 通りあるから

$$\frac{4\cdot 3}{3^4}=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

(2)　2 人が勝つ確率，3 人が勝つ確率はそれぞれ

$$\frac{{}_4C_2\cdot3}{3^4},\quad \frac{{}_4C_3\cdot3}{3^4}$$

である．

あいこになる確率は，1から，1人が勝つ確率，2人が勝つ確率，3人が勝つ確率をひけば求まる．

$$1-\frac{4}{27}-\frac{{}_4C_2\cdot3}{3^4}-\frac{{}_4C_3\cdot3}{3^4}$$

$$=\frac{27-4-6-4}{27}=\mathbf{\frac{13}{27}}$$

(別解) あいこになるのは，4人全員が同じ手を出すときか，2人が同じ手を出し，他の2人はこの手以外の互いに異なる手を出すときであるから，

$$\frac{3}{3^4}+\frac{{}_4C_2\cdot3\cdot2\cdot1}{3^4}=\frac{13}{27}$$

84 (1) 1が1回，2が1回，3が1回のときと，2が3回のときがある．

1が1回，2が1回，3が1回出るのは

123，132，213，231，312，321

の6通りあるから，和が6となる確率は

$$6\times\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\left(\frac{2}{6}\right)^3$$

$$=\frac{36+8}{6^3}=\mathbf{\frac{11}{54}}$$

(2) 和が7となるのは

1が1回，3が2回

2が2回，3が1回

のときがある．

1が1回，3が2回出るのは

133，313，331

の3通りあり，2が2回，3が1回のときも3通りある．

したがって，和が7となる確率は

$$3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{7}{24}}$$

85 (1) 2秒後に(1，1)にいるのは，上と右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{2}{25}}$$

また，2秒後に(1，−1)にいるのは，下と右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

(2) 2秒後に(0，0)にいるのは，上下に1回ずつ，あるいは左右に1回ずつ進むときであるから

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+{}_2C_1\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{7}{25}}$$

(3) 4秒後に(1，1)にいるのは

上に2回，下に1回，右に1回

進むときと

上に1回，左に1回，右に2回

進むときである．

したがって，4秒後に(1，1)にいる確率は

$$\frac{4!}{2!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}$$

$$+\frac{4!}{1!1!2!}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2$$

$$=\mathbf{\frac{42}{625}}$$

86 白球がn回取り出される確率をp_nとすると

$$p_n={}_{40}C_n\left(\frac{10}{70}\right)^n\left(\frac{60}{70}\right)^{40-n}$$

$$=\frac{40!}{n!(40-n)!}\cdot\frac{6^{40-n}}{7^{40}}$$

であるから，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\dfrac{40!}{(n+1)!(39-n)!}\cdot\dfrac{6^{39-n}}{7^{40}}}{\dfrac{40!}{n!(40-n)!}\cdot\dfrac{6^{40-n}}{7^{40}}}$$

$$=\frac{40-n}{n+1}\cdot\frac{1}{6}$$

よって，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\gtrless1 \iff \dfrac{40-n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{6}\gtrless1$

$$\iff 40-n\gtrless6(n+1)$$

$$\iff 7n\lessgtr34$$

したがって，$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5>p_6>\cdots$

よって，**白球が5回取り出される確率が**もっとも大きい．

87 (1) a_2は1回目に白球，2回目

に赤球を取り出す確率であるから,

$$a_2=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\mathbf{\frac{7}{30}}$$

a_3 は，1，2 回目に白球，3 回目に赤球を取り出す確率であるから

$$a_3=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{7}{40}}$$

(2) (1)と同様に,

$$a_1=\frac{3}{10}$$

$$a_4=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$$

$$a_5=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$$

したがって，a_1 から a_5 の中で最大のものは a_1 である．よって，$k=\mathbf{1}$

88 Aから取り出した 3 個の球の色に注目して，次の(i)〜(iv)の場合に分けて調べる．

(i) Aから白 3 個を取り出した場合

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{96}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

(ii) Aから白 2 個，黒 1 個を取り出した場合

$$\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_1}{{}_7C_3}\times\frac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{450}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

(iii) Aから白 1 個，黒 2 個を取り出した場合

$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}\times\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{288}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

(iv) Aから黒 3 個を取り出した場合

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{21}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

したがって，求める確率は

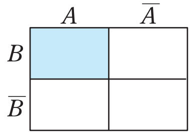
$$\frac{96+450+288+21}{{}_7C_3\cdot{}_{10}C_2}$$

$$=\frac{855}{35\cdot45}=\mathbf{\frac{19}{35}}$$

89 (1) $P(A)+P(B)-\{P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\}$

$$=2P(A\cap B)$$

であるから,



$$P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{11}{24}$$

したがって,

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{11}{16}}$$

(2) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{2}{3}-\frac{11}{24}=\frac{5}{24}$$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

したがって,

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{5}{12}}$$

90 (1) さいころを投げて，1，2 が出たとき，3，4 が出たとき，5，6 が出たときに分けて考えて

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{1+3+6}{3\cdot{}_6C_2}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 白球が 1 個である確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{8+9+8}{3\cdot{}_6C_2}=\frac{5}{9}$$

したがって，白球の個数の期待値は

$$1\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9}=\mathbf{1}$$

91 (1) $xyz=0 \underset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} xy=0$

であるから,

$xyz=0$ は $xy=0$ であるための必要条件であるが十分条件でない．……(ア)

(2) $x+y+z=0 \underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} x+y=0$

であるから，

$x+y+z=0$ は $x+y=0$ であるための必要条件でも十分条件でもない．

……(エ)

(3) $x(y^2+1)=0 \rightleftarrows x=0$ であるから，

$x(y^2+1)=0$ は $x=0$ であるための必要十分条件である．……(ウ)

注 $x(y^2+1)=0 \Longrightarrow x=0$ の証明：

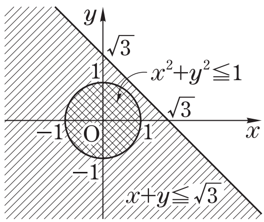
$x(y^2+1)=0$ のとき $x=0$ または $y^2+1=0$

ところが，y は実数であるから $y^2+1=0$ は成り立たない．

したがって，

$$x(y^2+1)=0 \Longrightarrow x=0$$

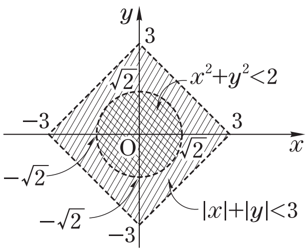
92 (1)



$$「x^2+y^2 \leqq 1」 \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} 「x+y \leqq \sqrt{3}」$$

したがって，$x^2+y^2 \leqq 1$ は $x+y \leqq \sqrt{3}$ であるための十分条件であるが必要条件でない．……(イ)

(2)



$$「x^2+y^2<2」 \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} 「|x|+|y|<3」$$

したがって，$x^2+y^2<2$ は $|x|+|y|<3$ であるための十分条件であるが必要条件でない．……(イ)

93 (1) 実数 x についての命題

「$x^2-x-2<0$ ならば $0<x<1$ である」……①

について，

逆は，

「$0<x<1$ ならば $x^2-x-2<0$ である」

裏は，

「$x^2-x-2 \geqq 0$ ならば $x \leqq 0$ または $1 \leqq x$ である」

対偶は，

「$x \leqq 0$ または $1 \leqq x$ ならば $x^2-x-2 \geqq 0$ である」

(2) $x^2-x-2<0$ を満たす x の範囲は $-1<x<2$ である．

よって，

①：「$-1<x<2 \Longrightarrow 0<x<1$」 は**偽**

①の逆：「$0<x<1 \Longrightarrow -1<x<2$」 は**真**

①の裏：「$x \leqq -1$ または $2 \leqq x \Longrightarrow x \leqq 0$ または $1 \leqq x$」は**真**

①の対偶：「$x \leqq 0$ または $1 \leqq x \Longrightarrow x \leqq -1$ または $2 \leqq x$」は**偽**

94-1 (1) 対偶である

「n が奇数ならば n^2 も奇数となる」

を示す．

n が奇数ならば，$n=2k+1$（k は整数）と表すことができ，

$$n^2=(2k+1)^2$$
$$=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから n^2 は奇数である．

したがって，n が整数であるとき，

n^2 が偶数ならば n も偶数となる．

(2) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．

このとき，$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$（p，q は互いに素な整数）と表すことができる．

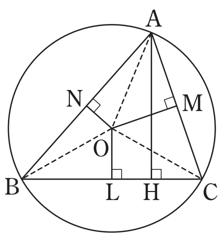
両辺を平方して，$2=\dfrac{q^2}{p^2}$

よって，$q^2=2p^2$ ……①

右辺は偶数であるから，q^2 も偶数であり，(1)より q は偶数である．
したがって，$q=2q'$ (q' は整数)
と表すことができる．
①に代入して，$4q'^2=2p^2$
よって，$p^2=2q'^2$
したがって，p^2 も偶数であり，(1)より p は偶数である．
すると，p，q は 2 を公約数にもつことになり，p，q が互いに素な整数であることに矛盾する．
以上より，$\sqrt{2}$ は無理数である．

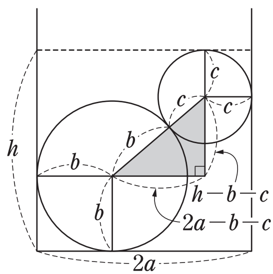
94-2 $a+bx=c+dx$ かつ $b\neq d$ と仮定する．
このとき，$a+bx=c+dx$ より，
$$(b-d)x=c-a$$
$b-d\neq 0$ であるから，
$$x=\frac{c-a}{b-d}$$
が得られる．
ところが，左辺は無理数，右辺は有理数であり矛盾が生じる．
よって，$b=d$
このとき，$a+bx=c+dx$ より $a=c$ が得られる．
したがって，a，b，c，d が有理数，x が無理数のとき，
「$a+bx=c+dx$ ならば，
$a=c$ かつ $b=d$」
が成り立つ．

95 3 辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とし，3 辺の垂直二等分線の交点（つまり三角形 ABC の外心）を O とする．



三角形 ABC の内部にあって，
PA≦PB，PA≦PC
を満たす点 P の全体がつくる領域 G は，四角形 ANOM の周および内部である．
ところで，
△OAN≡△OBN，
△OAM≡△OCM
であるから，
△OBN＋△OCM
＝△OAN＋△OAM
＝(四角形 ANOM)
したがって，
△ABC＝2×(四角形 ANOM)＋△OBC
条件より，
△ABC＝3×(四角形 ANOM)
であるから
△OBC＝(四角形 ANOM)，
△ABC＝3×△OBC
したがって，A から BC に引いた垂線と BC の交点を H とすると，
AH＝3OL ……①
$A=60°$ であるから，∠BOC＝120° であり，三角形 ABC の外接円の半径を r とすると，OL$=\dfrac{r}{2}$
①より，AH$=\dfrac{3}{2}r$
また，OA$=r$ であるから，A は半直線 LO 上にあり，三角形 ABC は**正三角形**である．

96 2 球の中心を通り，底面に垂直な平面による切り口は次のようになる．



図の網の直角三角形に注目して，
$$(b+c)^2=(2a-b-c)^2+(h-b-c)^2 \quad \cdots\cdots①$$

(1) ①に，$a=8$，$b=c=5$ を代入して，

$$10^2=6^2+(h-10)^2$$

よって， $(h-10)^2=64$

したがって，$h-10=\pm 8$

これより，$h=18$，2

h は球の直径 (=10) 以上であるから，

$$h=\mathbf{18}$$

(2) ①に，$a=9$，$b=7$，$c=6$

を代入して，

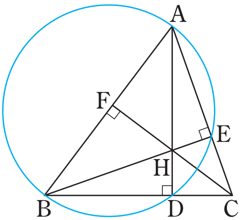
$$13^2=5^2+(h-13)^2$$

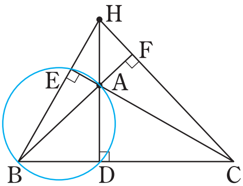
これより，$h=25$，1

h は球の直径 (=14，12) 以上であるから，

$$h=\mathbf{25}$$

97





$\angle ADB=\angle AEB$ (=90°)

であるから，4 点 A，B，D，E は，同一円周上にある．

したがって，方べきの定理より

$$AH \cdot HD=BH \cdot HE$$

同様に，4 点 B，C，E，F は同一円周上にあり，

$$BH \cdot HE=CH \cdot HF$$

以上より，

$$AH \cdot HD=BH \cdot HE=CH \cdot HF$$

98 チェバの定理より，

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1 \quad \cdots\cdots①$$

Dは線分 BC の中点であるから

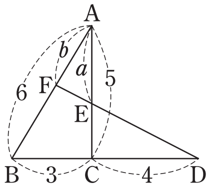
$$\frac{BD}{DC}=1$$

①に代入して，$\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$

したがって，AF : FB = AE : EC

よって，FE // BC

99



(1) メネラウスの定理より，

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

したがって，

$$\frac{b}{6-b}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{5-a}{a}=1$$

よって，

$$7b(5-a)=4a(6-b)$$

整理して，

$$\mathbf{3ab+24a-35b=0} \quad \cdots\cdots①$$

(2) 4 点 B，C，E，F が同一円周上にあるとき，方べきの定理より，

$$AF \cdot AB=AE \cdot AC$$

したがって，$6b=5a$

よって， $b=\dfrac{5}{6}a$

①に代入して，

$$\frac{5}{2}a^2+24a-\frac{175}{6}a=0$$

整理して，$15a^2-31a=0$

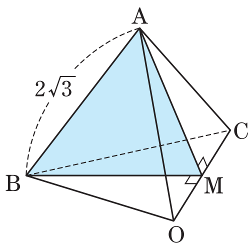
$0<a<5$ であるから，$a=\mathbf{\dfrac{31}{15}}$

100 辺 OC の中点をMとする．

AM⊥OC，

BM⊥OC

であるから



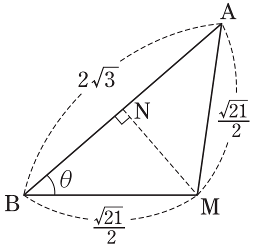
平面 ABM$\perp$OC

三角形 AOC は 1 辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形であるから

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{7}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

また

$$BM=AM=\frac{\sqrt{21}}{2}$$



$\angle MBA=\theta$，辺 AB の中点を N とおくと，

$$\cos\theta=\frac{NB}{MB}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

よって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

したがって

$$\triangle ABM=\frac{1}{2}AB\cdot BM\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

三角錐 OABC の体積は

(三角錐 CABM)$+$(三角錐 OABM)

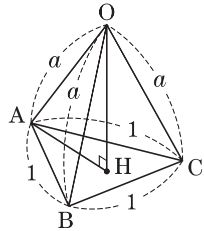
$$=\frac{1}{3}CM\cdot\triangle ABM+\frac{1}{3}OM\cdot\triangle ABM$$
$$=\frac{1}{3}(CM+OM)\triangle ABM$$
$$=\frac{1}{3}OC\cdot\triangle ABM$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{2}}$$

101 (1) $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}$
$=\sqrt{a^2-OH^2}$

$BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{a^2-OH^2}$

$CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=\sqrt{a^2-OH^2}$

より，AH$=$BH$=$CH であるから，H は三角形 ABC の外心である．



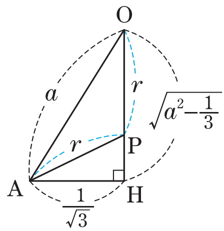
よって，AH は 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC の外接円の半径であり，正弦定理より，

$$AH=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2) $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}$

$$=\boldsymbol{\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}$$

(3) 四面体 OABC の外接球 S の中心を P とする．



P から底面 ABC に引いた垂線と底面の交点は三角形ABC の外心であるから，P は線分 OH 上にある．

$PH^2+AH^2=PA^2$ より

$$\left(\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}-r\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=r^2$$

よって，$a^2-2r\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}=0$

したがって，

$$r=\boldsymbol{\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}}}$$

102-1 $\dfrac{2+8+1+9+4+a}{6}=7$ より

$\dfrac{a+24}{6}=7$

よって，

$a=\mathbf{18}$

102-2 $x \leqq 13$ だと中央値は $\dfrac{13+15}{2}=14$ となり不適である．

$x \geqq 20$ だと中央値は $\dfrac{15+20}{2}=17.5$ となり不適である．

したがって，$13<x<20$ であり，このとき中央値は，$\dfrac{15+x}{2}$ である．

これが 17 である条件は，

$\dfrac{15+x}{2}=17$　より　$x=19$

これは $13<x<20$ をみたすので，求める x の値は **19** である．

103 英語の点数について，

中央値は 68 (点)，第 1 四分位数は 54 (点)，第 3 四分位数は 84 (点)，
最小値は 25 (点)，最大値は 94 (点)

したがって，箱ひげ図は②である．……ア

数学の点数について，

点数を小さい順に並べると，

45，55，65，65，66，69，73，77，78，78，80，87，88，90，94

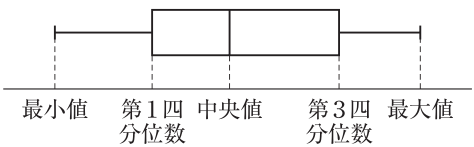
よって，

中央値は 77 (点)，第 1 四分位数は 65 (点)，第 3 四分位数は 87 (点)，
最小値は 45 (点)，最大値は 94 (点)

したがって，箱ひげ図は①である．……イ

(箱ひげ図について)

箱ひげ図は次のような値を表している．



104 変量 y についての n 個のデータ

$y_k=k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

と変量 z についての n 個のデータ

$z_k=ck$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

の間には，

$z_k=cy_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

の関係があるので,

$(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ の分散$)=c^2(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散$)$

が成り立つ.

したがって, $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散が $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ の分散より大きくなる条件は,

$c^2<1$

よって,

$\boldsymbol{-1<c<1}$

105-1 $f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\ \left(=\dfrac{1}{n}\{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2\}\right)$

$$=\frac{1}{n}\{na^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)a+x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\}$$

$$=\left(a-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2+\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}{n}$$

↑ a に関して平方完成

したがって, $f(a)$ を最小にする a は

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

つまり, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均値であり, そのときの最小値は

$$\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

すなわち, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である.

参考 $a=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ (=\overline{x})$ のとき, $f(a)=f(\overline{x})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$ で, これは分散の定義式そのものである. これより, $f(a)$ の最小値は, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散である, と述べてもよい.

105-2 (1) 3つの正の数 $a,\ b,\ c$ の平均値が 14 であるから,

$$\frac{1}{3}(a+b+c)=14$$

よって,

$a+b+c=42$ ……①

また, 標準偏差が 8 であるから, 分散は 8^2 であり

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-14^2=8^2$$

よって,

$a^2+b^2+c^2=\boldsymbol{780}$ ……ア ……②

等式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

に①, ②を代入して

$42^2=780+2(ab+bc+ca)$

よって,

$ab+bc+ca=\boldsymbol{492}$ ……イ

(2) 集団全体の平均値は,

$$\frac{16\times20+12\times60}{80}=\mathbf{13} \qquad \cdots\cdots ウ$$

Aグループの 20 個のデータの 2 乗の合計を K_A

Bグループの 60 個のデータの 2 乗の合計を K_B

とする.

Aグループの 20 個のデータの平均値が 16, 分散が 24 であることから

$$\frac{K_A}{20}-16^2=24$$

よって,

$$K_A=5600$$

Bグループの 60 個のデータの平均値が 12, 分散が 28 であることから

$$\frac{K_B}{60}-12^2=28$$

よって,

$$K_B=10320$$

したがって, 集団全体の分散は,

$$\frac{K_A+K_B}{80}-13^2=\frac{5600+10320}{80}-169$$

$$=\mathbf{30} \qquad \cdots\cdots エ$$

106

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\{100+99\times(n-1)\}$$

$$=\frac{99n+1}{n}$$

$$v=\frac{1}{n}\{100^2+99^2(n-1)\}-\left(\frac{99n+1}{n}\right)^2$$ ⬅(分散)=(2 乗の平均値)−(平均値)^2

$$=\frac{99^2n+199}{n}-\frac{(99n+1)^2}{n^2}$$

$$=\frac{n-1}{n^2}$$

よって,

$$(\overline{x},\ v)=\left(\boldsymbol{\frac{99n+1}{n}},\ \boldsymbol{\frac{n-1}{n^2}}\right) \qquad \cdots\cdots ア$$

また,

$$t_1=50+\frac{10\left(100-\dfrac{99n+1}{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2}}}$$

$$=50+\frac{10(n-1)}{\sqrt{n-1}}$$

$$=50+10\sqrt{n-1}$$

よって，$t_1 \geqq 100$ となる条件は

$$50+10\sqrt{n-1} \geqq 100$$

したがって，

$$\sqrt{n-1} \geqq 5$$

これをみたす最小の n は，**26** である．　　　……イ

107 (1) $\overline{x}=\dfrac{1}{4}\{0+1+a+(a+1)\}=\boldsymbol{\dfrac{a+1}{2}}$

$$\overline{y}=\frac{1}{4}(0+0+1+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $s_x{}^2=\dfrac{1}{4}\{0^2+1^2+a^2+(a+1)^2\}-\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$

$$=\frac{2a^2+2a+2}{4}-\frac{a^2+2a+1}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{a^2+1}{4}}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{4}(0^2+0^2+1^2+1^2)-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) $s_{xy}=\dfrac{1}{4}\left\{\left(0-\dfrac{a+1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{a+1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)\right.$

$$\left.+\left(a-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(a+1-\frac{a+1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a-1}{4}+\frac{a+1}{4}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{4}}$$

(4) $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$$=\frac{\dfrac{a}{4}}{\sqrt{\dfrac{a^2+1}{4}}\sqrt{\dfrac{1}{4}}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$$

108 (1) $w_i=ax_i+b$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるから

$$\overline{w}=\boldsymbol{a\overline{x}+b}$$

であり，w_1，w_2，$\cdots$，w_n の分散 $s_w{}^2$ は，

$$s_w{}^2=a^2s_x{}^2$$ 　　　⬅標問 **104** 参照

よって

$$s_w=\sqrt{a^2s_x{}^2}$$

$$=|a|s_x$$

$=\boldsymbol{as_x}$ $(a>0$ より$)$

(2) x と y の共分散を s_{xy}, w と y の共分散を s_{wy} とすると

$$s_{wy}=\frac{1}{n}\{(w_1-\overline{w})(y_1-\overline{y})+(w_2-\overline{w})(y_2-\overline{y})+\cdots+(w_n-\overline{w})(y_n-\overline{y})\}$$

であり,

$$w_i-\overline{w}=(ax_i+b)-(a\overline{x}+b)$$
$$=a(x_i-\overline{x})$$

であるから

$$s_{wy}=\frac{1}{n}\{a(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+a(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+a(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$
$$=a\times\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$
$$=as_{xy}$$

したがって, w と y の相関係数を r_{wy}, x と y の相関係数を r_{xy} とすると

$$r_{wy}=\frac{s_{wy}}{s_ws_y}=\frac{as_{xy}}{as_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=r_{xy}$$

109 (1) $\overline{x}=\frac{1}{10}(x_1+x_2+\cdots+x_{10})=\frac{55}{10}=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(y_1+y_2+\cdots+y_{10})=\frac{75}{10}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

$z_i=2x_i+3$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$ であるから

$\overline{z}=2\overline{x}+3=\boldsymbol{14}$ ⬅標問 **104** 参照

$w_i=y_i-4$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$ であるから

$$\overline{w}=\overline{y}-4=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(2) $s_x{}^2=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2\}$

$$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$$
$$=\frac{1}{10}\{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2-2\cdot10\overline{x}\cdot\overline{x}+10(\overline{x})^2\}$$
$$=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2$$

したがって,

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2=10\{s_x{}^2+(\overline{x})^2\}$$

また,

$$s_{xy}=\frac{1}{10}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_{10}-\overline{x})(y_{10}-\overline{y})\}$$
$$=\frac{1}{10}\{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-(x_1+x_2+\cdots+x_{10})\overline{y}$$
$$-(y_1+y_2+\cdots+y_{10})\overline{x}+10\overline{x}\overline{y}\}$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}-10\overline{x}\cdot\overline{y}-10\overline{y}\cdot\overline{x}+10\overline{x}\,\overline{y})$$

$$=\frac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\,\overline{y}$$

したがって,

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10}=10(s_{xy}+\overline{x}\,\overline{y})$$

(3) $s_{xy}=\dfrac{1}{10}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{10}y_{10})-\overline{x}\,\overline{y}$

$$=\frac{445}{10}-\frac{11}{2}\times\frac{15}{2}$$

$$=\mathbf{\frac{13}{4}}$$

また,

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-(\overline{x})^2$$

$$=\frac{385}{10}-\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$=\frac{33}{4}$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{10}(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)-(\overline{y})^2$$

$$=\frac{645}{10}-\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$=\frac{33}{4}$$

したがって,

$$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

$$=\frac{\frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{33}{4}}\sqrt{\frac{33}{4}}}$$

$$=\mathbf{\frac{13}{33}}$$

$z_i=2x_i+3$, $w_i=y_i-4$ ($i=1$, 2, …, 10) であるから

$s_{zw}=2\cdot 1s_{xy}$ ⬅標問 **108** 参照

$$=2\times\frac{13}{4}=\mathbf{\frac{13}{2}}$$

z, w の分散, 標準偏差をそれぞれ $s_z{}^2$, $s_w{}^2$, s_z, s_w とおくと $s_z{}^2=2^2s_x{}^2$, $s_w{}^2=1^2s_y{}^2$ より

$$s_z=2s_x,\quad s_w=s_y$$

したがって,

$$r_{zw}=\frac{s_{zw}}{s_zs_w}=\frac{2s_{xy}}{2s_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=r_{xy}=\mathbf{\frac{13}{33}}$$

110 (1) $a_n \equiv 10^n \pmod{13}$ であるから，

$10a_n \equiv 10^{n+1} \pmod{13}$

また，$a_{n+1} \equiv 10^{n+1} \pmod{13}$，$0 \leqq a_{n+1} \leqq 12$ であるから，

$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$，$0 \leqq a_{n+1} \leqq 12$

よって，a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい．

(2) 13 を法として，$a_1 \equiv 10$ より，$a_1 = \mathbf{10}$

$10 \equiv -3$ より，$10^2 \equiv (-3)^2 = 9$　　よって，$a_2 = \mathbf{9}$

$10^3 \equiv 9 \cdot 10 \equiv 12$　　よって，$a_3 = \mathbf{12}$

← $10^3 \equiv (-3)^3 = -27 \equiv 12 (= a_3)$ のように考えてもよい

$10^4 \equiv 12 \cdot 10 \equiv 3$　　よって，$a_4 = \mathbf{3}$

$10^5 \equiv 3 \cdot 10 \equiv 4$　　よって，$a_5 = \mathbf{4}$

$10^6 \equiv 4 \cdot 10 \equiv 1$　　よって，$a_6 = \mathbf{1}$

(3) 条件(A)，(B)より，N の 10^5 の位を x ($x=1$，2，3，……，9)，1 の位を y ($y=0$，1，2，……，9) とすると，

$N = x \cdot 10^5 + 20160 + y$

と表すことができる．

13 を法として，

$$
\begin{aligned}
N &\equiv x \cdot 4 + 2 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 6 \cdot a_1 + y \\
&= 4x + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + y \\
&= 4x + y + 75 \\
&\equiv 4x + y - 3
\end{aligned}
$$

よって，条件(C)より，

$4x + y - 3 \equiv 0$

したがって，$y \equiv 3 - 4x$

$x=1$ のとき，$y \equiv -1 \equiv 12$　　← y は 0，1，2，……，9 のいずれかであるから不適

$x=2$ のとき，$y \equiv -5 \equiv 8$

$x=3$ のとき，$y \equiv -9 \equiv 4$

$x=4$ のとき，$y \equiv -13 \equiv 0$

$x=5$ のとき，$y \equiv -17 \equiv 9$

$x=6$ のとき，$y \equiv -21 \equiv 5$

$x=7$ のとき，$y \equiv -25 \equiv 1$

$x=8$ のとき，$y \equiv -29 \equiv 10$　　← y は 0，1，2，……，9 のいずれかであるから不適

$x=9$ のとき，$y \equiv -33 \equiv 6$

以上より，N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

112 (1) $(1+2\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = 7$ より，

$$
\begin{aligned}
x_1 + y_1\sqrt{2} &= \frac{7}{1+2\sqrt{2}} \\
&= \frac{7(1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} \\
&= -1 + 2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

x_1, y_1 は整数 (したがって有理数), $\sqrt{2}$ は無理数であるから,

$x_1=\mathbf{-1}$, $y_1=\mathbf{2}$

また, $(1+2\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2})=7\sqrt{2}$ より

$$
\begin{aligned}
x_2+y_2\sqrt{2}&=\frac{7\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}\\
&=\sqrt{2}(-1+2\sqrt{2}) \quad \Leftarrow (*) \text{ の } \sqrt{2} \text{ 倍}\\
&=4-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

x_2, y_2 は整数, $\sqrt{2}$ は無理数であるから,

$x_2=\mathbf{4}$, $y_2=\mathbf{-1}$

(2) z が L の要素であるとき, z は整数 x, y を用いて,

$$z=(1+2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots①$$

と表すことができる.

(1)より,

$$7=(1+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots②$$

$$7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots③$$

であるから, ①+②, ①+③ より,

$$z+7=(1+2\sqrt{2})\{(x-1)+(y+2)\sqrt{2}\}$$

$$z+7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})\{(x+4)+(y-1)\sqrt{2}\}$$

$x-1$, $y+2$, $x+4$, $y-1$ はすべて整数であるから, $z+7$, $z+7\sqrt{2}$ はともに L の要素である.

次に, z が L の要素でないとき, $z+7$ は L の要素でないことを示す.

この対偶である, $z+7$ が L の要素であるとき, z が L の要素であることを示せばよい.

$z+7$ が L の要素であるとき, $z+7$ は整数 x', y' を用いて

$$z+7=(1+2\sqrt{2})(x'+y'\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots④$$

と表すことができる.

このとき, ④−② より

$$z=(1+2\sqrt{2})\{(x'+1)+(y'-2)\sqrt{2}\}$$

$x'+1$, $y'-2$ は整数であるから, z は L の要素である.

したがって, z が L の要素でないとき, $z+7$ は L の要素でない.

また, $z+7\sqrt{2}$ が L の要素であるとき, $z+7\sqrt{2}$ は整数 x'', y'' を用いて

$$z+7\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(x''+y''\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots⑤$$

と表すことができ, ⑤−③ より

$$z=(1+2\sqrt{2})\{(x''-4)+(y''+1)\sqrt{2}\}$$

$x''-4$, $y''+1$ は整数であるから, z は L の要素である.

したがって, z が L の要素でないとき, $z+7\sqrt{2}$ は L の要素でない.