数学Ⅰ・A 基礎問題精講［四訂増補版］

上園信武著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1

与式$=(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot (x^2)^2y^2\cdot xy^2\cdot (xy)^3$
$=(-1)^5\cdot 2\cdot x^4y^2\cdot xy^2\cdot x^3y^3$
$=(-1)\cdot 2\cdot x^{4+1+3}y^{2+2+3}$
$=\boldsymbol{-2x^8y^7}$

2

$2A-B$
$=2(x^2-2x+3)-(2x^2+4x-2)$
$=(2x^2-2x^2)+(-4x-4x)+(6+2)$
$=\boldsymbol{-8x+8}$
$A-2B$
$=(x^2-2x+3)-2(2x^2+4x-2)$
$=(x^2-4x^2)+(-2x-8x)+(3+4)$
$=\boldsymbol{-3x^2-10x+7}$

3

(1) $s=x-y,\ t=z-w$ とおくと
$(x-y-z+w)(x-y+z-w)$
$=(s-t)(s+t)=s^2-t^2$
$=(x-y)^2-(z-w)^2$
$=(x^2-2xy+y^2)-(z^2-2zw+w^2)$
$=\boldsymbol{x^2-2xy+y^2-z^2+2zw-w^2}$

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)$
$=\{(x-1)(x-6)\}\{(x-2)(x-3)\}$
$=(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)$
$=\{(x^2+6)-7x\}\{(x^2+6)-5x\}$
$=(x^2+6)^2-12x(x^2+6)+35x^2$
$=\boldsymbol{x^4-12x^3+47x^2-72x+36}$

(3) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)=\boldsymbol{x^8-1}$

4

(1) $ab-bc-b^2+ca$
$=a(b+c)-b(b+c)$
$=\boldsymbol{(a-b)(b+c)}$

(2) $x^2-y^2+x+5y-6$
$=x^2+x-(y^2-5y+6)$
$=x^2+x-(y-2)(y-3)$
$=\{x+(y-2)\}\{x-(y-3)\}$
$=\boldsymbol{(x+y-2)(x-y+3)}$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b$
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a$
$\quad+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$
$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)$
$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$
$=\boldsymbol{x(x+5)(x^2+5x+10)}$

(5) x^4+2x^2+9
$=(x^4+6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+3-2x)(x^2+3+2x)$
$=\boldsymbol{(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)}$

5

(1) $x+y=3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}=\mathbf{6}$
$xy=(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=9-2=\mathbf{7}$
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=6^2-2\cdot 7=\mathbf{22}$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=6^3-3\cdot 7\cdot 6=\mathbf{90}$

(2) $t^3+\dfrac{1}{t^3}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^3-3\cdot t\cdot\dfrac{1}{t}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$
$=3^3-3\cdot 3=\mathbf{18}$
$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2=t^2-2+\dfrac{1}{t^2}$
$=\left(t^2+2+\dfrac{1}{t^2}\right)-4$
$=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-4=3^2-4=5$

$t>1$ より $t>\dfrac{1}{t} \Longleftrightarrow t-\dfrac{1}{t}>0$

よって　$t-\dfrac{1}{t}=\sqrt{5}$

$\therefore\quad t^2-\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=\mathbf{3\sqrt{5}}$

6

$$
\begin{array}{r l}
 & 0.7692307 \\
13\,) & \overline{10.0} \\
 & \underline{9\,1} \\
 & 90 \\
 & \underline{78} \\
 & 120 \\
 & \underline{117} \\
 & 30 \\
 & \underline{26} \\
 & 40 \\
 & \underline{39} \\
 & 100 \\
 & \underline{91} \\
 & 9
\end{array}
$$

上のわり算より $\dfrac{10}{13}=0.\dot{7}6923\dot{0}$

よって，小数点以下は

7，6，9，2，3，0 のくりかえし．

$200\div6=33$ 余り 2

より，小数点以下 200 位の数字は **6**

7

(1) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{9+6\sqrt{2}+2}{9-2}=\mathbf{\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}$

8

$a=\sqrt{2}-1$ より　$a+1=\sqrt{2}$

両辺を平方すると，$a^2+2a-1=0$

これより $a^2=1-2a$

a^3+6a^2-3a+1

$=a(1-2a)+6(1-2a)-3a+1$

$=-2a^2-14a+7$

$=-2(1-2a)-14a+7$

$=-10a+5$

$=-10(\sqrt{2}-1)+5=\mathbf{15-10\sqrt{2}}$

9

(1) $A^2=(2+\sqrt{14})^2=18+4\sqrt{14}$

$=18+2\sqrt{56}$

$B^2=(1+\sqrt{17})^2=18+2\sqrt{17}$

$\sqrt{17}<\sqrt{56}$ だから，$A^2>B^2$

$A>0$，$B>0$ だから，$A>B$

(2) $3.7^2=13.69$，$3.8^2=14.44$

だから $3.7^2<14<3.8^2$

$\therefore\quad 3.7<\sqrt{14}<3.8$

$4.1^2=16.81$，$4.2^2=17.64$

だから $4.1^2<17<4.2^2$

$\therefore\quad 4.1<\sqrt{17}<4.2$

よって，$A=2+\sqrt{14}>2+3.7=5.7$

また，$B=1+\sqrt{17}<1+4.2=5.2$

$\therefore\quad B<5.2<5.7<A$

よって，$B<A$

10

$1<\sqrt{3}<2$ より，$6<5+\sqrt{3}<7$

よって，$a=6$，$b=\sqrt{3}-1$

$\therefore\quad \dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{a-b-1}$

$=\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{a-(b+1)}$

$=\dfrac{2a}{a^2-(b+1)^2}=\dfrac{12}{36-3}=\mathbf{\dfrac{4}{11}}$

11

(1)　i）　$x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$, $|x-2|=-(x-2)$,
$|x-3|=-(x-3)$

$$\therefore\quad P=(-x+1)+(-x+2)+(-x+3)=-3x+6$$

ii）　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x-1|=x-1$, $|x-2|=-(x-2)$,
$|x-3|=-(x-3)$

$$\therefore\quad P=(x-1)+(-x+2)+(-x+3)=-x+4$$

iii）　$2<x<3$ のとき

$|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$,
$|x-3|=-(x-3)$

$$\therefore\quad P=(x-1)+(x-2)+(-x+3)=x$$

iv）　$3\leqq x$ のとき

$|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$,
$|x-3|=x-3$

$$\therefore\quad P=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$$

以上のことより

$$P=\begin{cases}\boldsymbol{-3x+6} & \boldsymbol{(x<1)}\\ \boldsymbol{-x+4} & \boldsymbol{(1\leqq x\leqq 2)}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{(2<x<3)}\\ \boldsymbol{3x-6} & \boldsymbol{(3\leqq x)}\end{cases}$$

(2)　i）　$x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$,
$|x-2|=-(x-2)$

$$\therefore\quad Q=|(-x+1)-(-x+2)|=|-1|=1$$

ii）　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x-1|=x-1$,
$|x-2|=-(x-2)$

$$\therefore\quad Q=|(x-1)-(-x+2)|=|2x-3|=\begin{cases}2x-3 & \left(\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2\right)\\ -2x+3 & \left(1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$$

iii）　$2<x$ のとき

$|x-1|=x-1$,
$|x-2|=x-2$

$$\therefore\quad Q=|(x-1)-(x-2)|=|1|=1$$

i）～iii）より

$$Q=\begin{cases}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{(x<1,\ 2<x)}\\ \boldsymbol{-2x+3} & \boldsymbol{\left(1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)}\\ \boldsymbol{2x-3} & \boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2\right)}\end{cases}$$

12

(1)　$A=\sqrt{x^2-8a}$ とおくと,

$$A=\sqrt{(2a+1)^2-8a}=\sqrt{(2a-1)^2}=|2a-1|$$

より

i）　$2a-1\geqq 0$ すなわち,

$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{1}{2}}$ **のとき,** $A=\boldsymbol{2a-1}$

ii）　$2a-1<0$ すなわち,

$\boldsymbol{a<\dfrac{1}{2}}$ **のとき,**

$A=-(2a-1)=\boldsymbol{-2a+1}$

(2)　$B=\sqrt{a^2+x}$ とおくと,

$$B=\sqrt{a^2+(2a+1)}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$$

より

i）　$a+1\geqq 0$ すなわち,

$\boldsymbol{a\geqq -1}$ **のとき,** $B=\boldsymbol{a+1}$

ii）　$a+1<0$ すなわち,

$\boldsymbol{a<-1}$ **のとき,**

$B=-(a+1)=\boldsymbol{-a-1}$

(3)　$C=\sqrt{x^2-8a}+\sqrt{a^2+x}$ とおくと,

(1), (2)より,

$$C=A+B=|2a-1|+|a+1|$$

i）　$\boldsymbol{a<-1}$ **のとき,**

$C=-(2a-1)-(a+1)=\boldsymbol{-3a}$

ii）　$\boldsymbol{-1\leqq a<\dfrac{1}{2}}$ **のとき,**

$C=-(2a-1)+(a+1)=\boldsymbol{-a+2}$

iii）　$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{1}{2}}$ **のとき,**

$$C=(2a-1)+(a+1)=\mathbf{3a}$$

13

(1) $\sqrt{28-\sqrt{768}}$
$=\sqrt{28-\sqrt{4\cdot192}}=\sqrt{28-2\sqrt{192}}$
$=\sqrt{(16+12)-2\sqrt{16\cdot12}}=\sqrt{16}-\sqrt{12}$
$=4-2\sqrt{3}$
よって，
$$\frac{\sqrt{28-\sqrt{768}}}{2-\sqrt{3}}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=\mathbf{2}$$

(2) $\sqrt{6-\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{12-2\sqrt{27}}{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ より
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6-\sqrt{27}}}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$$
$=2\cancel{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3-1}$
$=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$
また，
$\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$
$=\sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\cdot2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ より
$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{8+\sqrt{48}}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$=\dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$
よって，
(与式)$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$
$=\mathbf{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\cdot6\sqrt{2}}$
$=\sqrt{17-2\sqrt{6^2\cdot2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}$
$=\sqrt{(9+8)-2\sqrt{9\cdot8}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$
$=3-2\sqrt{2}$ より
(与式)$=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(2+1)-2\sqrt{2\cdot1}}$
$=\mathbf{\sqrt{2}-1}$

14

$a\neq\pm1$ のとき，
$$x=\frac{(a+1)^2}{a^2-1}=\frac{(a+1)^2}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+1}{a-1}$$
$a=1$ のとき，
$0\cdot x=2^2$ すなわち，$0\cdot x=4$ より解なし．
$a=-1$ のとき，
$0\cdot x=0$ よりすべての数．
よって，求める解は

$a\neq\pm1$ のとき，$x=\dfrac{a+1}{a-1}$
$a=1$ のとき，解なし
$a=-1$ のとき，すべての数

15

(1) $3(x-1)\leqq2(2x-1)+3$
$\Longleftrightarrow 3x-3\leqq4x-2+3$
$\Longleftrightarrow \boldsymbol{x\geqq-4}$

(2) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}$
$\Longleftrightarrow 4x+9>6x+2$
$\Longleftrightarrow 2x<7$ 　∴ $\boldsymbol{x<\dfrac{7}{2}}$

16

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}x<\dfrac{1}{3}x$ ……①
$x\leqq\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{2}$ ……②
$1-x<x-2$ ……③
①より，$3-x<2x$ 　∴ $x>1$
②より，$6x\leqq2x+9$ 　∴ $x\leqq\dfrac{9}{4}$
③より，$2x>3$ 　∴ $x>\dfrac{3}{2}$
∴ $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}<x\leqq\dfrac{9}{4}}$

17

$a(1-x)>1+x\Longleftrightarrow(a+1)x<a-1$
……①

(i)　$a+1>0$ すなわち，$a>-1$ のとき

$x<\dfrac{a-1}{a+1}$

(ii)　$a+1<0$ すなわち，$a<-1$ のとき

$x>\dfrac{a-1}{a+1}$

(iii)　$a+1=0$ すなわち，$a=-1$ のとき
①は $0\cdot x<-2$ となり，これをみたす x はない．

以上より，

$a>-1$ のとき，$x<\dfrac{a-1}{a+1}$

$a<-1$ のとき，$x>\dfrac{a-1}{a+1}$

$a=-1$ のとき，解なし

18

(1)　$|x-1|=|2x-3|-2$　……①

i)　$x<1$ のとき

$x-1<0$，$2x-3<0$ だから，

① $\Longleftrightarrow -(x-1)=-(2x-3)-2$

$\therefore\quad x=0$

これは $x<1$ をみたす．

ii)　$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$x-1\geqq 0$，$2x-3\leqq 0$ だから，

① $\Longleftrightarrow x-1=-(2x-3)-2$

$\therefore\quad x=\dfrac{2}{3}$

これは，$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ をみたさない．

iii)　$\dfrac{3}{2}<x$ のとき

$x-1>0$，$2x-3>0$ だから，

① $\Longleftrightarrow x-1=2x-3-2$

$\therefore\quad x=4$

これは，$\dfrac{3}{2}<x$ をみたす．

i)～iii)より，**$x=0,\ 4$**

(2)　$||x|-1|=3$ より，$|x|-1=\pm 3$

$\therefore\quad |x|=4,\ -2$

$|x|\geqq 0$ だから，$|x|=4$

$\therefore\quad$ **$x=\pm 4$**

19

(1)　i)　$x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$，

$|2x-3|=-(2x-3)$

$\therefore\quad -x+1<-2x+3-2 \Longleftrightarrow x<0$

$x<1$ より，$x<0$

ii)　$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|2x-3|=-(2x-3)$

$\therefore\quad x-1<-2x+3-2 \Longleftrightarrow x<\dfrac{2}{3}$

これは不適．

iii)　$\dfrac{3}{2}<x$ のとき

$|x-1|=x-1$，$|2x-3|=2x-3$

$\therefore\quad x-1<2x-3-2 \Longleftrightarrow x>4$

$\dfrac{3}{2}<x$ より，$4<x$

i)～iii)より，**$x<0$，$4<x$**

(2)　$||x|-1|<3$ より，

$-3<|x|-1<3$

$\therefore\quad -2<|x|<4$

$|x|\geqq 0$ より，$0\leqq|x|<4$

よって，**$-4<x<4$**

20

求める分数は $\dfrac{m}{m+20}$（m は自然数で，m と $m+20$ は互いに素）と表せる．

このとき，$0.25\leqq\dfrac{m}{m+20}<0.35$ が成りたつ．

$\therefore\quad \dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{m}{m+20}<\dfrac{7}{20} \Longleftrightarrow \dfrac{20}{7}<\dfrac{m+20}{m}\leqq 4$

$\Longleftrightarrow \dfrac{20}{7}<1+\dfrac{20}{m}\leqq 4 \Longleftrightarrow \dfrac{13}{7}<\dfrac{20}{m}\leqq 3$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{m}{20}<\dfrac{7}{13}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{20}{3}\leqq m<\dfrac{140}{13}$

この不等式をみたす m は7，8，9，10
このうち，m と $m+20$ が互いに素となるのは $m=7$，9
よって，求める分数は $\mathbf{\frac{7}{27}}$，$\mathbf{\frac{9}{29}}$

21

(1)　$A=\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7}\}$，
$B=\{\mathbf{3},\ \mathbf{6},\ \mathbf{9}\}$
(2)　$A\cap B=\{\mathbf{3}\}$，
$A\cup B=\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{9}\}$，
$\overline{A}=\{\mathbf{1},\ \mathbf{4},\ \mathbf{6},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9}\}$，
$\overline{B}=\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8}\}$，
$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{6},\ \mathbf{9}\}$，
$A\cup\overline{B}=\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8}\}$
注　ここで，$A\cup\overline{B}=\overline{\overline{A}\cap B}$ である．

22

(1)　$200\div5=40$ より　$n(A)=\mathbf{40}$
B の要素は4でわり切れる数から2をひいたものだから，
$200\div4=50$ より　$n(B)=\mathbf{50}$
(2)　$A\cap B$
$=\{10,\ 30,\ 50,\ 70,\ \cdots\cdots,\ 190\}$
より，$n(A\cap B)=\mathbf{10}$

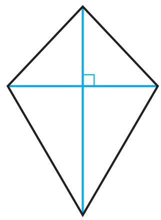
23

(1)　**逆**：$x^2<1$ ならば $0<x<1$
$x=-\frac{1}{2}$ のとき，不成立だから，**偽**
裏：$x\leqq0$，$1\leqq x$ ならば $x^2\geqq1$
$x=-\frac{1}{2}$ のとき，不成立だから，**偽**
対偶：$x^2\geqq1$ ならば $x\leqq0$，$1\leqq x$
もとの命題が真だから，対偶も**真**
(2)　対偶：$x=1$ かつ $y=2$ ならば
$xy=2$
これは真だから，もとの命題も真である．
(3)　$\sqrt{2}+1$ が有理数であると仮定すると，2つの自然数 m，n を用いて
$\sqrt{2}+1=\frac{n}{m}$ と表せる．(ただし，m，n は互いに素)
しかし，$\sqrt{2}=\frac{n}{m}-1=\frac{n-m}{m}$ となり
$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．
よって，$\sqrt{2}+1$ は有理数でない．
つまり，$\sqrt{2}+1$ は無理数である．

24

(1)　$x<-1$ または $1<x$ を数直線上に表すと下図の斜線部分になる．

したがって，$x>1$ であることは，
$x<-1$ または $1<x$ であるための**十分条件**
(2)　「対角線が直交する」ならば「ひし形」は偽
(反例は右図)
「ひし形」ならば「対角線は直交する」は真
よって，**必要条件**

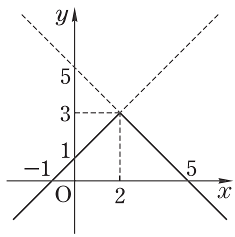


25

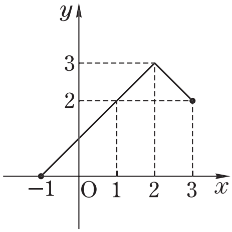
(1)　$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x\geqq2)\\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$　だから，

$y=\begin{cases}-(x-2)+3=-x+5 & (x\geqq2)\\ -(-x+2)+3=x+1 & (x<2)\end{cases}$

よって，グラフは下図のようになる．



(2)　グラフより，$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 3}$



(3)　$a<2<b$ より $x=2$ は定義域内なので，y の最大値は 3

よって，$b=3$

(i)　$1 \leqq a<2$ のとき

$a \leqq x \leqq b=3$ における y の最小値は 2 ($x=3$ のとき)

よって，$2-a=2$ から $a=0$．これは不適．

(ii)　$a<1$ のとき

$a \leqq x \leqq b=3$ における y の最小値は $a+1$ ($x=a$ のとき)

よって，

$$2-a=a+1 \iff a=\frac{1}{2}$$

以上より，

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\quad b=3}$$

26

点 A(2, 4) を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動した点は，$(2+p,\ 4+q)$

この点を x 軸に関して対称移動した点は，

$$(2+p,\ -4-q)$$

一方，点 A(2, 4) を y 軸に関して対称移動した点は，$(-2,\ 4)$．

この 2 点が一致するので

$$2+p=-2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{p=-4}$$

$$-4-q=4 \qquad \therefore\ \boldsymbol{q=-8}$$

27

(1)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+x-1=-\dfrac{1}{3}(x^2-3x)-1$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-1$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$

(2)　$y=(2x-1)(x+1)=2x^2+x-1$

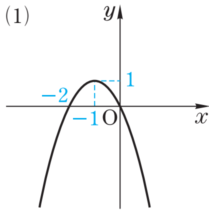
$$=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-1$$

$$=2\left\{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}-1$$

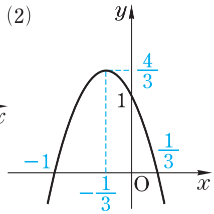
$$=\boldsymbol{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}}$$

28

(1)

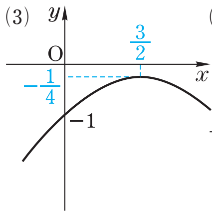


(2)

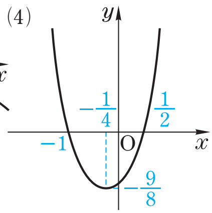


$$y=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

(3)



(4)



$$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \qquad y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

29

$y=-2x^2-14x-13$

$$=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{23}{2}$$

より，頂点 $\left(-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{23}{2}\right)$

$y=-2x^2+8x+7=-2(x-2)^2+15$

より，頂点 (2, 15)

よって，**x 軸方向に $\dfrac{11}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{7}{2}$ だけ平行移動**すると重なる．

30

$$y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

よって，頂点は $(-2,\ 1)$

この点の x 軸，y 軸，原点に関する対称点はそれぞれ

$$(-2,\ -1),\ (2,\ 1),\ (2,\ -1)$$

だから $y=x^2+4x+5$ を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動してできる放物線は，それぞれ

$$\boldsymbol{y=-(x+2)^2-1},$$
$$\boldsymbol{y=(x-2)^2+1},$$
$$\boldsymbol{y=-(x-2)^2-1}$$

31

$y=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると

$$y=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$$

これが，$y=x^2+cx+3$ と一致するので，

$$\boldsymbol{c=2}$$

次に，$y=(x+1)^2+2$ を y 軸に関して対称移動すると

$$y=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$$

これが，$y=x^2+ax+b$ と一致するので

$$\boldsymbol{a=-2,\ b=3}$$

32

(1)　軸が $x=-2$ より，求める 2 次関数は，$y=a(x+2)^2+b$ とおける．

$(-1,\ -2)$，$(2,\ -47)$ を通るので，

$$a+b=-2 \quad \cdots\cdots①$$
$$16a+b=-47 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より，$a=-3$，$b=1$

$$\therefore\ \boldsymbol{y=-3x^2-12x-11}$$

(2)　x 軸に接するので，求める 2 次関数は，$y=a(x-p)^2$ とおける．

$(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$ を通るので，

$$a(p-1)^2=1 \quad \cdots\cdots①$$
$$a(p-4)^2=4 \quad \cdots\cdots②$$

②÷①より　$\dfrac{(p-4)^2}{(p-1)^2}=4 \Longleftrightarrow 3p^2=12$

$$\therefore\ p=\pm2$$

$$\therefore\ \begin{cases} p=2 \text{ のとき，} a=1 \\ p=-2 \text{ のとき，} a=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{y=x^2-4x+4}$，

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}}$$

(3)　求める 2 次関数を，$y=ax^2+bx+c$ とおくと，$(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$を通るので，

$$a-b+c=-3 \quad \cdots\cdots①$$
$$a+b+c=5 \quad \cdots\cdots②$$
$$4a+2b+c=3 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③の連立方程式を解くと，

$$a=-2,\ b=4,\ c=3$$

よって，$\boldsymbol{y=-2x^2+4x+3}$

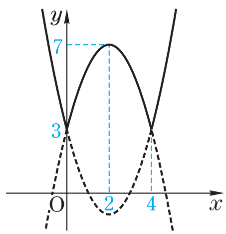
33

(1)　$x\leqq0$，$4\leqq x$ のとき

$$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

$0<x<4$ のとき

$$y=-x^2+4x+3=-(x-2)^2+7$$



(2)　$x\leqq-1$ のとき

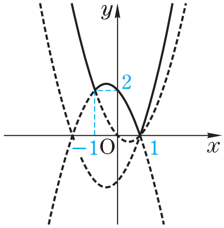
$$y=-(x-1)+(x^2-1)=x^2-x$$

$-1<x<1$ のとき

$$y=-(x-1)-(x^2-1)=-x^2-x+2$$

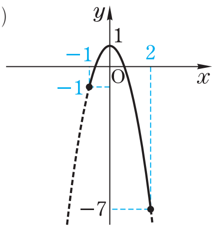
$1\leqq x$ のとき

$$y=(x-1)+(x^2-1)=x^2+x-2$$



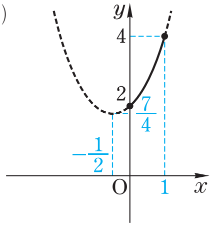
34

(1)



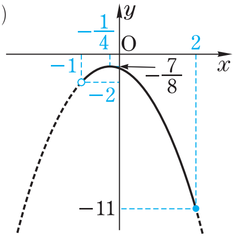
グラフより
$x=0$ のとき，
最大値 1
$x=2$ のとき，
最小値 −7

(2)



グラフより
$x=0$ のとき，
最小値 2
$x=1$ のとき，
最大値 4

(3)



グラフより
$x=-\dfrac{1}{4}$ のとき，
最大値 $-\dfrac{7}{8}$
$x=2$ のとき，
最小値 −11

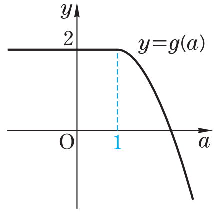
35

(1) (i) $f(x)=(x-a)^2-a^2+2a+1$
より

(ア) 軸<1，つまり $\boldsymbol{a<1}$ **のとき，**
$\boldsymbol{g(a)=f(1)=2}$

(イ) 軸≧1，つまり $\boldsymbol{a\geqq 1}$ **のとき，**
$\boldsymbol{g(a)=f(a)=-a^2+2a+1}$

(ii) 下図のグラフを用いると，
$g(a)$ の**最大値は 2** である．



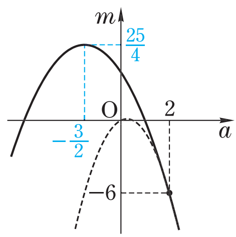
(2) (i) $y=x^2-2(a-1)x-a^2-a+1$
$=\{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2-a^2-a+1$
$=\{x-(a-1)\}^2-2a^2+a$
より，軸は $x=a-1$

(ア) $a-1\leqq 1$ すなわち $\boldsymbol{a\leqq 2}$ **のとき**
y は $x=1$ のとき最小だから，
$\boldsymbol{m=-a^2-3a+4}$

(イ) $a-1>1$ すなわち $\boldsymbol{a>2}$ **のとき**
y は $x=a-1$ のとき最小だから，
$\boldsymbol{m=-2a^2+a}$

(ii) (ア) $a\leqq 2$ のとき
$$m=-\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$
(イ) $a>2$ のとき
$$m=-2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$
よって，m のグラフは下図のようになるので

m **の最大値は $\dfrac{25}{4}$** $\left(a=-\dfrac{3}{2}\text{ のとき}\right)$



36

(1) $x+2y=1$ より，$x=1-2y$
よって，
$x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2$

$=5y^2-4y+1=5\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$

y はすべての値をとるので，**最小値 $\dfrac{1}{5}$**

(2)　$x^2+2y^2=1$ より，$x^2=1-2y^2\geqq 0$

$\therefore\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq y\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　……①

よって，

$x^2+4y=(1-2y^2)+4y=-2(y-1)^2+3$

①の範囲において，最大値，最小値を考えると，

$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，**最大値 $2\sqrt{2}$**，

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，**最小値 $-2\sqrt{2}$**

(3)　(i)　$x^2-4x+1=(x-2)^2-3$ より，

$0\leqq x\leqq 3$ において，

$\boldsymbol{-3\leqq x^2-4x+1\leqq 1}$

(ii)　$t=x^2-4x+1$ とおくと，(i)より，

$-3\leqq t\leqq 1$

$\therefore\quad f(x)$

$=-(x^2-4x+1)^2+2(x^2-4x+1)-3$

$=-t^2+2t-3=-(t-1)^2-2$

よって，$t=1$，すなわち，

$x=0$ のとき，**最大値 -2**，

$t=-3$，すなわち，

$x=2$ のとき，**最小値 -18**

37

$3x^2+2xy+y^2+4x-4y+3$

$=y^2+2(x-2)y+3x^2+4x+3$

$=(y+x-2)^2-(x-2)^2+3x^2+4x+3$

$=(y+x-2)^2+2x^2+8x-1$

$=(y+x-2)^2+2(x+2)^2-9$

$(y+x-2)^2\geqq 0$，$2(x+2)^2\geqq 0$ だから，最小となるのは

$y+x-2=x+2=0$

すなわち，$x=-2$，$y=4$ のとき，

最小値 -9

38

長方形の他の 1 辺の長さは $100-2x$ (m)

ここで，$x>0$，$100-2x>0$ より

$0<x<50$

このとき，$S=x(100-2x)=-2x^2+100x$

$=-2(x-25)^2+1250$

$0<x<50$ だから，$\boldsymbol{x=25}$ のとき

最大値 1250 (m^2)

39

(1)　(i)　$x^2+x-2=0$

$\iff (x+2)(x-1)=0$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ 1}$

(ii)　解の公式より，$\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{5}}$

(iii)　$x^2=t$ ($t\geqq 0$) とおくと，解の公式より，$t=3\pm 2\sqrt{2}$

よって，$\boldsymbol{x}=\pm\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}\boldsymbol{=\pm(\sqrt{2}\pm 1)}$

（複号任意）

(iv)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$

$\iff (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=0$

$\iff x(x+5)(x^2+5x+10)=0$

$x^2+5x+10=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$

だから，$\boldsymbol{x=0,\ -5}$

(2)　判別式を D' とおくと，$D'=1+k$

i）　$D'>0$，すなわち，

$\boldsymbol{k>-1}$ のとき，異なる 2 つの解をもつ

ii）　$D'=0$，すなわち，

$\boldsymbol{k=-1}$ のとき，重解をもつ

iii）　$D'<0$，すなわち，

$\boldsymbol{k<-1}$ のとき，解なし

40

$y=x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$

より，頂点の y 座標は

$-a^2+a=-a(a-1)$

i）　$-a^2+a>0$ すなわち，

$\boldsymbol{0<a<1}$ のとき，$\boldsymbol{x}$ 軸と共有点をもたない．

ii）　$-a^2+a=0$ すなわち，

$a=0$，1 のとき，x 軸と接する．

iii) $-a^2+a<0$ すなわち，

$a<0$，$1<a$ のとき，x 軸と異なる 2 点で交わる．

41

$x^2-3x+1=2x+b$ より，

$x^2-5x+1-b=0$

この 2 次方程式が異なる 2 つの解をもつので，判別式>0

$\therefore\quad 25-4(1-b)>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{b>-\dfrac{21}{4}}$

42

$x^2-mx+1=mx+m-1$ より

$x^2-2mx+2-m=0$

この 2 次方程式は重解をもつので，

判別式$=0$

$\therefore\quad m^2-(2-m)=0$

$\iff m^2+m-2=0$

$\iff (m+2)(m-1)=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{m=-2,\ 1}$

43

(1) $2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)\leqq 0$

より，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2}$

(2) $x^2-4x-2=0$ を解くと，

$x=2\pm\sqrt{6}$

$\therefore\quad \boldsymbol{x<2-\sqrt{6},\ 2+\sqrt{6}<x}$

(3) $x^2-4x+4=(x-2)^2>0$ より，

$\boldsymbol{x<2,\ 2<x}$

(4) $x^2-3x<x-5 \iff x^2-4x+5<0$

ここで，$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

より，**解なし**

(5) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)>0$

より，$x<-1,\ 3<x$

$x^2-4=(x-2)(x+2)\leqq 0$

より，$-2\leqq x\leqq 2$

よって，$\boldsymbol{-2\leqq x<-1}$

44

(1) 上に凸より，$\boldsymbol{a<0}$

(2) $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

より，軸 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$,

$a<0$ より，$\boldsymbol{b<0}$

(3) y 切片<0 より，$\boldsymbol{c<0}$

(4) 頂点の y 座標>0，$a<0$

より，$\boldsymbol{b^2-4ac>0}$

(5) $x=1$ のとき $y<0$ だから，

$\boldsymbol{a+b+c<0}$

(6) 放物線の軸は $x=-1$ であることより，$x=0$ のときと $x=-2$ のときの y の値は等しい．

よって，概形から，

$\boldsymbol{4a-2b+c<0}$

45

$f(x)=4x^2-2mx+n$ とおくと，

$f(x)=4\left(x-\dfrac{m}{4}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+n$

$f(x)=0$ の 2 解が，ともに $0<x<1$ に含まれる条件は，

$$\begin{cases} f(0)=n>0,\ f(1)=4-2m+n>0 & \cdots\cdots① \\ 0<\dfrac{m}{4}<1 \iff 0<m<4 & \cdots\cdots② \\ -\dfrac{m^2}{4}+n\leqq 0 \iff 4n\leqq m^2 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より，$m=1,\ 2,\ 3.$

③より，

$(m,\ n)=(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$

このうち，①をみたすのは，

$\boldsymbol{(m,\ n)=(2,\ 1)}$

46

$f(x)=x^2+(m-1)x+1$ とおくと，

$f(x)=\left(x+\dfrac{m-1}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{m}{2}+\dfrac{3}{4}$

すべての x に対して，$f(x)\geqq 0$ だから，

$$-\frac{m^2}{4}+\frac{m}{2}+\frac{3}{4}\geqq 0 \Longleftrightarrow m^2-2m-3\leqq 0$$

$$\Longleftrightarrow (m-3)(m+1)\leqq 0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{-1\leqq m\leqq 3}$

47

(1) $x^2+3x-40=(x+8)(x-5)<0$

より，$-8<x<5$

$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)>0$

より，$x<-1$，$6<x$

よって，$\boldsymbol{-8<x<-1}$

(2) $x^2-ax-6a^2$

$=(x-3a)(x+2a)>0$

(i) $a<0$ より，$x<3a$，$-2a<x$

これが(1)の範囲を含むためには，

$-2a>0$ より $-1\leqq 3a$

よって，$\boldsymbol{-\frac{1}{3}\leqq a<0}$

(ii) $a=0$ のとき，$x^2>0$ となり，

(1)の範囲で成立する．

(iii) $a>0$ より，$x<-2a$，$3a<x$

(i)と同様にして

$-1\leqq -2a$　よって，$\boldsymbol{0<a\leqq \frac{1}{2}}$

48

$|x^2+2x-8|=|(x+4)(x-2)|$

$$=\begin{cases} (x+4)(x-2) & (x\leqq -4,\ 2\leqq x) \\ -(x+4)(x-2) & (-4<x<2) \end{cases}$$

i) $x\leqq -4$，$2\leqq x$ のとき

$(x+4)(x-2)=2(x-2)$

$\Longleftrightarrow (x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$，2

$x\leqq -4$，$2\leqq x$ より，$x=2$

ii) $-4<x<2$ のとき

$-(x+4)(x-2)=2(x-2)$

$\Longleftrightarrow (x-2)(x+6)=0$

$\therefore$ $x=-6$，2

$-4<x<2$ より，ともに不適．

以上，i)，ii) より，$\boldsymbol{x=2}$

49

$|x^2-2x-8|=|(x-4)(x+2)|$

$$=\begin{cases} (x-4)(x+2) & (x\leqq -2,\ 4\leqq x) \\ -(x-4)(x+2) & (-2<x<4) \end{cases}$$

i) $x\leqq -2$，$4\leqq x$ のとき

$(x-4)(x+2)>2(x+2)$

$\Longleftrightarrow (x-6)(x+2)>0$

$\therefore$ $x<-2$，$6<x$

$x\leqq -2$，$4\leqq x$ より，$x<-2$，$6<x$

ii) $-2<x<4$ のとき

$-(x-4)(x+2)>2(x+2)$

$\Longleftrightarrow (x+2)(x-2)<0$

$\therefore$ $-2<x<2$

$-2<x<4$ より，$-2<x<2$

以上，i)，ii) より，

$\boldsymbol{x<-2,\ -2<x<2,\ 6<x}$

50

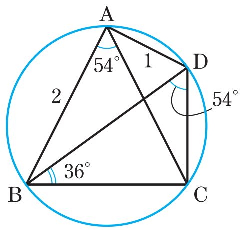
(1) $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}$ だから，四角形 ABCD は円に内接する．

よって，円周角の性質より

$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}=36^\circ$

よって，$\angle\mathrm{BAD}=54^\circ+36^\circ=90^\circ$

三平方の定理より，$\mathrm{BD}=\sqrt{2^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$



(2) $\angle\mathrm{ADC}=\theta$ とおくと

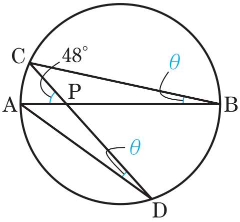
$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\angle\mathrm{BCD}=3\theta$

(円弧の長さと円周角は比例する)

$\triangle\mathrm{PBC}$ の内角の和を考えて

$\theta+3\theta+(180^\circ-48^\circ)=180^\circ$

$4\theta=48^\circ$，$\theta=\boldsymbol{12^\circ}$



51

(1)　(i)　△AOM と △ABN において，

∠OAM＝∠BAN（共通の角）

∠OMA＝∠BNA＝90°

よって，△AOM∽△ABN

（二角相等）

(ii)　O は AB, BC の垂直 2 等分線の交点なので△ABC の外心である．よって，OA は外接円の半径．△ABN において，三平方の定理より

$$\mathrm{AN}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BN}^2}$$
$$=\sqrt{12^2-5^2}=\sqrt{119}$$

よって，△AOM∽△ABN より

OA：BA＝AM：AN

$\Longleftrightarrow R:12=6:\sqrt{119}$

$\therefore\quad R=\boldsymbol{\dfrac{72\sqrt{119}}{119}}$

(2)　(i)　△AFI と △AEI において，接線と半径は直交するので，この 2 つの三角形は直角三角形である．

AI は共通，

I は △ABC の内心なので，

∠IAF＝∠IAE

よって，△AFI≡△AEI

（斜辺と一鋭角相等）

(ii)　(i)と同様にして

△BFI≡△BDI,

△CDI≡△CEI

がいえるので

AE＝AF＝x,

BF＝BD＝y,

CD＝CE＝z

とすると，△ABC の 3 辺の長さについて，

$x+y=7$ ……①

$y+z=6$ ……②

$z+x=5$ ……③

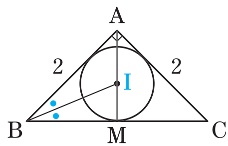
(①＋②＋③)÷2 より

$x+y+z=9$ ……④

④－②より　$x=3$

∴　AF＝**3**

52



直線 AI と BC との交点をMとする．

AI は ∠BAC の 2 等分線なので

BM：MC＝AB：AC＝1：1

よって，$\mathrm{BM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

△ABM において，BI は ∠ABM の 2 等分線なので

AI：IM＝BA：BM＝2：$\sqrt{2}$＝$\sqrt{2}$：1

よって，$\mathrm{AI}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\sqrt{2}$

$=\boldsymbol{2\sqrt{2}-2}$

53

△PBD において，

BD：PD＝$\sqrt{3}$：1　　∴　BD＝1

よって，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{AF}}\times\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}}\times\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{CE}}=1$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=\dfrac{3}{8}$

∴　AE：EC＝**3：8**

54

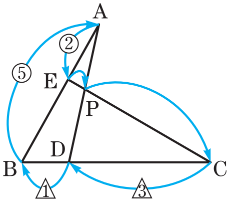
メネラウスの定理より

$$\frac{AE}{BA}\times\frac{PC}{EP}\times\frac{DB}{CD}=1$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{2}{5}\times\frac{PC}{EP}\times\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore\quad \frac{EP}{PC}=\frac{2}{15}$$

$\therefore$　EP：PC＝**2：15**



55

$\angle BAC=a$ とおくと

$\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{BD}=1:2$ より

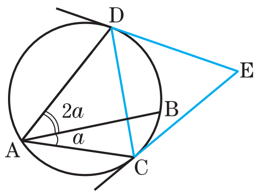
$\angle BAD=2a$

よって，接弦定理より

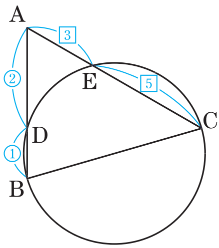
$\angle ECD=3a$

$\triangle CDE$ が正三角形より，

$3a=60^\circ$　　$\therefore$　$a=$**20°**



56



4点 B，C，E，D が同一円周上にあるので，方べきの定理より

$AB\cdot AD=AC\cdot AE$ ……①

ここで，$AD=\frac{2}{3}AB$，$AE=\frac{3}{8}AC$ より

$$① \Longleftrightarrow \frac{2}{3}AB^2=\frac{3}{8}AC^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{16}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$$

$\therefore$　AB：AC＝**3：4**

57

(1)　$AB=r_1+O_1E+r_2$ より

$O_1E=AB-(r_1+r_2)=AB-O_1O_2$

$=9-5=$**4**

これより，$\triangle O_1O_2E$ において三平方の定理より

$EO_2=\sqrt{O_1O_2{}^2-O_1E^2}$

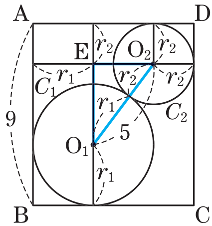
$=\sqrt{5^2-4^2}=3$

なので，

$AD=r_1+EO_2+r_2$

$=(r_1+r_2)+EO_2$

$=O_1O_2+EO_2=5+3=$**8**



(2)　$O_1O_2=r_1+r_2=5$ より　$r_2=5-r_1$

よって，$S=\pi r_1{}^2+\pi r_2{}^2$

$=\pi r_1{}^2+\pi(5-r_1)^2$

$=\boldsymbol{\pi(2r_1{}^2-10r_1+25)}$

(3)　円 C_1，C_2 は長方形の中の円なので

$2r_1\leqq AD=8 \Longleftrightarrow r_1\leqq 4$　……①

$2r_2\leqq AD=8 \Longleftrightarrow r_2\leqq 4$

$\Longleftrightarrow 5-r_1\leqq 4$

$\Longleftrightarrow 1\leqq r_1$　……②

①，②より，$\boldsymbol{1\leqq r_1\leqq 4}$

(4)　(2)より　$S=\pi\left\{2\left(r_1-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\right\}$

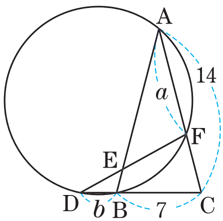
$1 \leqq r_1 \leqq 4$ より

$r_1=\dfrac{5}{2}$ のとき S の**最小値は** $\boldsymbol{\dfrac{25}{2}\pi}$

$r_1=1,\ 4$ のとき S の**最大値は** $\boldsymbol{17\pi}$

58

(1)　4 点 A, B, D, F が同一円周上なので方べきの定理より



$$\mathrm{CA}\times\mathrm{CF}=\mathrm{CD}\times\mathrm{CB}$$
$$\Longleftrightarrow 14\mathrm{CF}=7\mathrm{CD}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \mathrm{CF}:\mathrm{CD}=1:2$$

$\mathrm{AF}=a$, $\mathrm{BD}=b$ とすると $\triangle\mathrm{ABC}$ においてメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{AF}}\times\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}\times\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{BE}}=1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{14-a}{a}\times\frac{b}{b+7}\times\frac{12}{2}=1$$
$$\Longleftrightarrow ab+a-12b=0 \quad \cdots\cdots①$$

また,

$$\mathrm{CF}:\mathrm{CD}=(14-a):(b+7)=1:2$$
$$\Longleftrightarrow b+7=2(14-a)$$
$$\Longleftrightarrow b=21-2a \quad \cdots\cdots②$$

①, ②から b を消去して,

$$a^2-23a+126=0$$
$$\Longleftrightarrow (a-9)(a-14)=0$$

$a<14$ より　$a=9$

②より　$b=3$

よって, $\mathrm{AF}:\mathrm{DB}=3:1$

(2)　(1)より　$\mathrm{DB}=b=3$

59

(1)　直径に対する円周角だから

$$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$$
$$\therefore\ \angle\mathrm{EDF}=\angle\mathrm{ECF}=90^\circ$$

よって, 四角形 CEDF は EF を直径とする円に内接する.

(2)　円周角の性質より

$$\angle\mathrm{FAB}=\angle\mathrm{FDC},\ \angle\mathrm{FBA}=\angle\mathrm{DCF}$$

ここで,

$$\angle\mathrm{FDC}+\angle\mathrm{DCF}+\angle\mathrm{CFD}=180^\circ$$

だから

$$\angle\mathrm{FAB}+\angle\mathrm{FBA}=180^\circ-\angle\mathrm{CFD}$$

次に, 四角形 CEDF は円に内接するので

$$\angle\mathrm{CFD}+\angle\mathrm{DEC}=180^\circ,$$

すなわち

$$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{DEC}=180^\circ-\angle\mathrm{CFD}$$

よって,

$$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{FAB}+\angle\mathrm{FBA}$$

60

四角形 ABPC は円に内接する四角形なのでトレミーの定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}\times\mathrm{BC}&=\mathrm{AB}\times\mathrm{CP}+\mathrm{AC}\times\mathrm{BP}\\&=\mathrm{AB}\times(\mathrm{CP}+\mathrm{BP})\\&\qquad\qquad(\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\ \text{より})\\&=\mathrm{AB}\times\mathrm{AP}\\&\qquad\qquad(\mathrm{AP}=\mathrm{BP}+\mathrm{CP}\ \text{より})\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{BC}=\mathrm{AB}$

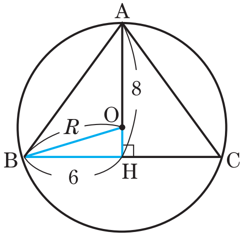
$\therefore$　$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である.

61

図より, $\mathrm{OB}=R$, $\mathrm{OH}=8-R$, $\mathrm{BH}=6$

三平方の定理より

$$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{BH}^2$$
$$\Longleftrightarrow R^2=(8-R)^2+6^2$$
$$\Longleftrightarrow 0=-16R+100$$
$$\therefore\ R=\boldsymbol{\frac{25}{4}}$$



(別解)　三平方の定理より，AB=10

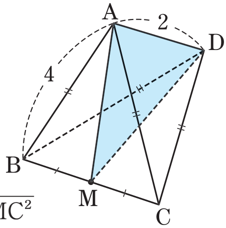
R は △ABC の外接円の半径だから

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{2R}$$

$$\therefore \quad R=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}{2\mathrm{AH}}=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}$$

62



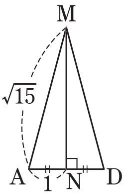
(1)　AB=AC より

∠AMC=90° なので，三平方の定理より

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{MC}^2}$$

$$=\sqrt{4^2-1^2}=\boldsymbol{\sqrt{15}}$$

(2)　△AMN において　AM=$\sqrt{15}$，AN=1 だから三平方の定理より



$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2}$$

$$=\sqrt{15-1}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

(3)　$\triangle\mathrm{AMD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\times\mathrm{MN}$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{14}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

(4)　BC⊥AM，BC⊥DM　より

BC⊥△AMD

よって，△AMD を四面体 BAMD，四面体 CAMD の底面とみると，BM，CM はそれぞれの高さとなるから，

四面体 ABCD

=四面体 BAMD+四面体 CAMD

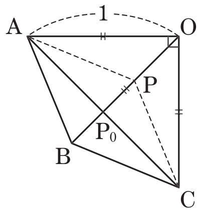
$$=\frac{1}{3}\times\mathrm{BM}\times\triangle\mathrm{AMD}$$

$$+\frac{1}{3}\times\mathrm{CM}\times\triangle\mathrm{AMD}$$

$$=\frac{1}{3}\times\mathrm{BC}\times\triangle\mathrm{AMD}$$

$$=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{14}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{14}}$$

63



(1)　△OAB と △OBC について展開図を考えると右図のようになる．

∠AOB

=∠BOC=45°

なので，

∠AOC=90° であり，OA=OC より △OAC は直角二等辺三角形となる．

点 P が OB 上を動くとき　AP+PC が最小となるのは，P が AC と OB の交点 P_0 となるとき．

よって，最小値は，AC=$\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(2)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PB}=\mathrm{OP_0}:\mathrm{P_0B}$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}:\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{AC}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})$$

$$=\boldsymbol{1:(\sqrt{2}-1)}$$

64

三平方の定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{(1+a^2)^2-(2a)^2}$$

$$=\sqrt{(1-a^2)^2}=1-a^2\ (0<a<1\ \text{より})$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\frac{2a}{1+a^2}},$$

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\frac{1-a^2}{1+a^2}},$$

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{\frac{2a}{1-a^2}}$$

65

(1) $\cos^2 45^\circ+\sin^2 45^\circ$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\mathbf{1}$

(2) $\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

(3) $\dfrac{1}{\cos^2 30^\circ}-\dfrac{1}{\tan^2 60^\circ}$

$=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}=\mathbf{1}$

66

(1), (2) $\mathrm{P}(0,\ 1)$ より

$\sin 90^\circ=\mathbf{1}$, $\cos 90^\circ=\mathbf{0}$

(3), (4) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より

$\cos 120^\circ=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$, $\tan 120^\circ=\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

(5), (6) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ より

$\sin 135^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, $\tan 135^\circ=\mathbf{-1}$

(7), (8) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ より

$\sin 150^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$, $\cos 150^\circ=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(9), (10), (11) $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ より

$\sin 180^\circ=\mathbf{0}$, $\cos 180^\circ=\mathbf{-1}$,

$\tan 180^\circ=\mathbf{0}$

67

$\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\cos(90^\circ+\theta)}-\dfrac{\cos(180^\circ-\theta)}{1+\cos(90^\circ-\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\cos\theta}}$

68

(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$

よって, $\cos\theta=\boldsymbol{\pm\dfrac{12}{13}}$

また,

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{5}{13}\times\left(\pm\dfrac{13}{12}\right)=\boldsymbol{\pm\dfrac{5}{12}}$ **(複号同順)**

(2) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

$=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{10}$

$\tan\theta<0$ より, $\cos\theta<0$

よって, $\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta$

$=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

69

(1) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sin\theta}}$

(2) $\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$\Longleftrightarrow \cos\theta+1-\sin^2\theta=1$

$\Longleftrightarrow \sin^2\theta=\cos\theta$

よって,

与式$=\cos\theta+\cos^3\theta+\cos^4\theta$

$=\cos\theta+\cos^2\theta(\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\cos\theta+\cos^2\theta=\mathbf{1}$

70

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

より，$\sin\theta\cos\theta=-\mathbf{\frac{3}{8}}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$
$=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$

ここで，$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，
$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(3) (2)より $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

また，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$

だから，これらを連立して

$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$，$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

となる．

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}=-\mathbf{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$

71

(1) $\cos^2\theta=\frac{3}{4}$ より，$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，
$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より$)$

(2) $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$ より，$\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

よって，
$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$，$\mathbf{150^\circ}$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より$)$

(3) $\sin3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$0^\circ\leqq3\theta\leqq180^\circ$

より，$3\theta=60^\circ$，120°

よって，
$\boldsymbol{\theta=20^\circ}$，$\mathbf{40^\circ}$

72

(1) $4\cos^2\theta-3$
$=(2\cos\theta+\sqrt{3})(2\cos\theta-\sqrt{3})\leqq0$

より，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\mathbf{30^\circ\leqq\boldsymbol{\theta}\leqq150^\circ}$

(2) $3\tan^2\theta-1$
$=(\sqrt{3}\tan\theta-1)(\sqrt{3}\tan\theta+1)>0$

より，$\tan\theta<-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta$

よって，$\mathbf{30^\circ<\boldsymbol{\theta}<90^\circ}$，$\mathbf{90^\circ<\boldsymbol{\theta}<150^\circ}$

(3) $\sin3\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$0^\circ\leqq3\theta<60^\circ$，$120^\circ<3\theta\leqq180^\circ$

よって，$\mathbf{0^\circ\leqq\boldsymbol{\theta}<20^\circ}$，$\mathbf{40^\circ<\boldsymbol{\theta}\leqq60^\circ}$

73

$2\sin^2x+\cos x=1$
$\Longleftrightarrow 2(1-\cos^2x)+\cos x=1$
$\Longleftrightarrow 2\cos^2x-\cos x-1=0$
$\Longleftrightarrow (2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore\ \cos x=-\frac{1}{2}$，$1$

よって，$\boldsymbol{x}=\mathbf{120^\circ}$，$\mathbf{0^\circ}$ $(0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ より$)$

74

$2\sin^2x-5\cos x+1\leqq0$
$\Longleftrightarrow 2(1-\cos^2x)-5\cos x+1\leqq0$
$\Longleftrightarrow 2\cos^2x+5\cos x-3\geqq0$
$\Longleftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x+3)\geqq0$

$\therefore\ \cos x\leqq-3$，$\frac{1}{2}\leqq\cos x$

しかし，$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ において，
$-1\leqq\cos x\leqq1$

よって，$\frac{1}{2}\leqq\cos x\leqq1$

$\therefore\ \mathbf{0^\circ\leqq\boldsymbol{x}\leqq60^\circ}$

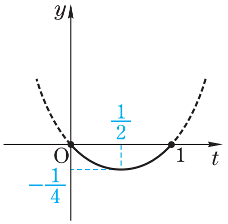
75

$y=-\cos^2x-\sin x+1$
$=-(1-\sin^2x)-\sin x+1$
$=\sin^2x-\sin x$

$t=\sin x$ とおくと，

$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

ここで，$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ において，$0\leqq t\leqq1$



グラフより，$t=\frac{1}{2}$，すなわち $x=\mathbf{30°}$，**150°** のとき**最小値** $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$，$t=0$，$1$，すなわち，$x=\mathbf{0°}$，**90°**，**180°** のとき**最大値 0**.

76

(1)　正弦定理より，

$\sin A:\sin B:\sin C=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}$

$=\mathbf{3:5:7}$

(2)　三角形において，

角が最大 $\Longleftrightarrow$ 対辺が最大

より，∠C が最大である.

$\mathrm{BC}=3k$，$\mathrm{CA}=5k$，$\mathrm{AB}=7k$ とおくと，余弦定理より

$$\cos C=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}$$

$$=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\times3k\times5k}=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad C=\mathbf{120°}$

77

中線定理

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

より

$$5^2+4^2=2(\mathrm{AM}^2+3^2)$$

$$2\mathrm{AM}^2=23$$

$$\therefore\quad \mathrm{AM}=\sqrt{\frac{23}{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{46}}}{\mathbf{2}}$$

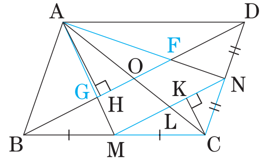
78

$$\mathrm{GF}=\frac{1}{3}\mathrm{OB}+\frac{1}{3}\mathrm{OD}=\frac{1}{3}\mathrm{BD}$$

また，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}$

(中点連結定理より)

$\therefore\quad \mathrm{GF}:\mathrm{MN}=2:3$



次に，$\mathrm{AH}:\mathrm{CK}=\mathrm{AO}:\mathrm{CL}=2:1$

$\therefore\quad \triangle\mathrm{AGF}:\triangle\mathrm{CMN}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{GF}\cdot\mathrm{AH}:\frac{1}{2}\cdot\mathrm{MN}\cdot\mathrm{CK}$$

$$=\mathbf{4:3}$$

79

$$b\tan A=a\tan B$$

$$\Longleftrightarrow b\frac{\sin A}{\cos A}=a\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos A}{\cos B}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\cos A}{\cos B}=1\ \left(\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}\ \text{より}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \cos A=\cos B$$

$0°<A<180°$，$0°<B<180°$ だから

$$A=B$$

ゆえに，**∠A＝∠B をみたす二等辺三角形.**

注　この問題のように角だけの関係式になおした方がよいこともあります.

80

(1)　3 辺の長さは正なので $t>0$ である.

$$5t<(t+2)+(2t+3)\Longleftrightarrow t<\frac{5}{2}$$

$$t+2<5t+(2t+3)\Longleftrightarrow -\frac{1}{6}<t$$

$$2t+3<5t+(t+2)\Longleftrightarrow \frac{1}{4}<t$$

より三角形が存在するような t の値の範囲は　$\mathbf{\frac{1}{4}<t<\frac{5}{2}}$

(2)　(1)の条件と $t>2$ より　$2<t<\frac{5}{2}$

である．

このとき，$5t-(t+2)=4t-2>0$

$5t-(2t+3)=3t-3>0$

なので最大辺の長さは $5t$ であるから

$(5t)^2>(t+2)^2+(2t+3)^2$　……①

を示せばよい．

$$f(t)=(5t)^2-(t+2)^2-(2t+3)^2$$
$$=20t^2-16t-13$$
$$=20\left(t-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{81}{5}$$ より

$y=f(t)$ は下に凸の放物線で，

軸が $t=\dfrac{2}{5}<2$

$f(2)=35>0$ なので，

$f(t)>0$ $\left(2<t<\dfrac{5}{2}\right)$

よって，①は成立し，三角形は鈍角三角形である．

81

$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=45^\circ$，

正弦定理より，$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}$

$$\therefore\quad CA=\sin 60^\circ\times\frac{12}{\sin 45^\circ}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12\sqrt{2}=6\sqrt{6}$$

第一余弦定理より，

$$AB=AC\cos A+BC\cos B$$
$$=6\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+12\cdot\frac{1}{2}=6(\sqrt{3}+1)$$

よって，△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6(\sqrt{3}+1)\cdot 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{18(3+\sqrt{3})}$$

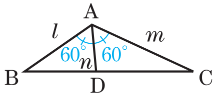
注　（**第一余弦定理**）

$a=b\cos C+c\cos B$，

$b=a\cos C+c\cos A$，

$c=a\cos B+b\cos A$

82



△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}lm$$

ここで，△ABC＝△ABD＋△ADC より，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$$
$$+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}ln+\frac{\sqrt{3}}{4}nm=\frac{\sqrt{3}}{4}n(l+m)$$

よって，$lm=n(l+m)$

両辺を lmn でわると，$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{n}$

83

余弦定理より，

$$BC^2=AB^2+CA^2-2AB\cdot CA\cos A$$
$$=9+4-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=7$$
$$\therefore\quad BC=\sqrt{7}$$

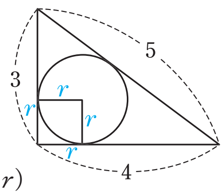
△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CA\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ここで，

$$r=\frac{2S}{AB+BC+CA}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\mathbf{\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}}$$

84



$3^2+4^2=5^2$

より，この三角形は直角三角形である．

よって，

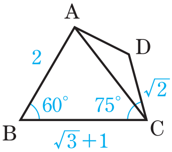
$5=(3-r)+(4-r)$

より

$r=\mathbf{1}$

85

(1)



余弦定理より，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$

$=4+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\dfrac{1}{2}$

$=6$

$\therefore\quad AC=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

(2) 正弦定理より，

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$$

$\therefore\quad \sin\angle ACB=\sin\angle ABC\cdot\dfrac{AB}{AC}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\angle ACB=\mathbf{45^\circ}$

(3) $\angle ACD=\angle BCD-\angle ACB=30^\circ$

よって，

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$

$+\dfrac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}}$

86

(1) $12=2^2\times 3,\ 36=2^2\times 3^2,\ 60=2^2\times 3\times 5$

よって，

最大公約数は $2^2\times 3=\mathbf{12}$

また，

最小公倍数は $2^2\times 3^2\times 5=\mathbf{180}$

(2) 最大公約数が 12 だから，

$a=12a',\ b=12b'$ ($a',\ b'$ は互いに素で $a'>b'$ をみたす正の整数)と表せる.

このとき，最小公倍数が 144 だから

$12a'b'=144$

$\Longleftrightarrow a'b'=12$

$a',\ b'$ は互いに素だから

$(a',\ b')=(12,\ 1),\ (4,\ 3)$

$\therefore\quad (a,\ b)=(\mathbf{144},\ \mathbf{12}),\ (\mathbf{48},\ \mathbf{36})$

(3) 最大公約数が 4 だから，

$m=4m',\ n=4n'$ ($m',\ n'$ は互いに素で，$m'>n'$ をみたす正の整数) と表せる.

このとき，$mn=16m'n'=160$

$\Longleftrightarrow m'n'=10$

$\therefore\quad (m',\ n')=(10,\ 1),\ (5,\ 2)$

$\therefore\quad (m,\ n)=(\mathbf{40},\ \mathbf{4}),\ (\mathbf{20},\ \mathbf{8})$

87

$n^3+3n^2-4n=n(n-1)(n+4)$

$=n(n-1)(n+1+3)$

$=(n-1)n(n+1)+3(n-1)n$

$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数.

$(n-1)n$ は 2 の倍数だから，

n^3+3n^2-4n は 6 の倍数.

88

(1) $a=2n+i$ ($i=0,\ 1$) とおくと，

$a^2=4n^2+4ni+i^2=4(n^2+ni)+i^2$

$i^2=0,\ 1$ だから，整数 a の平方は 4 でわると，わりきれるか，1 余るかのどちらかである.

(2) $a^2-4a-2m=0\Longleftrightarrow 2m=a(a-4)$

ここで，左辺は偶数だから，a も偶数.

ゆえに，a^2 は 4 でわりきれ，$4a$ も 4 でわりきれる.

よって，$2m=a^2-4a$ も 4 でわりきれる.

ゆえに，m は偶数.

89

$4387\div 3103=1\cdots 1284$

$3103\div 1284=2\cdots 535$

$1284 \div 535 = 2 \quad \cdots 214$
$535 \div 214 = 2 \quad \cdots 107$
$214 \div 107 = 2 \quad \cdots 0$

よって，最大公約数は **107**

90

$(x,\ y)=(3,\ 1)$ は①をみたす．

$$3x-4y=5 \quad \cdots\cdots ①$$
$$3\cdot 3-4\cdot 1=5 \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より　$3(x-3)=4(y-1)$

右辺は 4 の倍数だから，$3(x-3)$ も 4 の倍数．

3 と 4 は互いに素なので 4 は $x-3$ の因数．よって，$x-3$ は 4 の倍数．

同様にして，$y-1$ は 3 の倍数．

よって，

$$x-3=4n,\ y-1=3n \ (n：整数)$$

と表せるので

$$(x,\ y)=(4n+3,\ 3n+1) \ (n：整数)$$

これより

$$|x-y|=|(4n+3)-(3n+1)|$$
$$=|n+2|$$

なので，$|x-y|$ は，$n=-2$ のとき**最小値 0** をとる．

91

(1)　$1201_{(3)}=3^3\times 1+3^2\times 2+3^1\times 0+3^0\times 1$

$$=27+18+1=\mathbf{46}$$

$$1.23_{(4)}=4^0\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4^2}\times 3$$

$$=\frac{16+8+3}{16}=\frac{27}{16}=\mathbf{1.6875}$$

(2)

$$\begin{array}{r|l}
3 & 53 \\ \hline
3 & 17 \cdots 2 \\ \hline
3 & 5 \cdots 2 \\ \hline
 & 1 \cdots 2
\end{array}$$

上のわり算より　$\mathbf{1222}_{(3)}$

$$\begin{array}{r|l}
4 & 53 \\ \hline
4 & 13 \cdots 1 \\ \hline
 & 3 \cdots 1
\end{array}$$

上のわり算より　$\mathbf{311}_{(4)}$

92

(1)

$$\begin{array}{r}
11111_{(2)} \\
+\quad 1011_{(2)} \\ \hline
\mathbf{101010}_{(2)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
11111_{(2)} \\
-\quad 1011_{(2)} \\ \hline
\mathbf{10100}_{(2)}
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r}
111_{(2)} \\
\times\quad 111_{(2)} \\ \hline
111_{(2)} \\
111_{(2)} \\
111_{(2)} \\ \hline
\mathbf{110001}_{(2)}
\end{array}$$

93

(1)　与式$=4x^2+10x-(y+3)(y-2)$

$$=\mathbf{(2x-y+2)(2x+y+3)}$$

(2)　(1)より，

$$4x^2+10x-y^2-y$$
$$=(4x^2+10x-y^2-y+6)-6$$
$$=(2x-y+2)(2x+y+3)-6=0$$
$$\therefore \quad (2x-y+2)(2x+y+3)=6$$

$2x-y+2$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$2x+y+3$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

よって，

$2x-y$	-8	-5	-4	-3	-1	0	1	4
$2x+y$	-4	-5	-6	-9	3	0	-1	-2

このうち，$(x,\ y)$ が整数であるものは，

$$\begin{cases} 2x-y=-8 \\ 2x+y=-4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x+y=-9 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

よって，

$(x,\ y)=(\mathbf{-3,\ 2}),\ (\mathbf{-3,\ -3}),$
$(\mathbf{0,\ 0}),\ (\mathbf{0,\ -1})$

94

$x \leqq y \leqq z$ より $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{z}$ だから

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

$\therefore \quad 1 \leqq \dfrac{3}{x}$

よって，$x \leqq 3$ より $x=1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき，

(与式) $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これをみたす自然数 $y,\ z$ はない．

$x=2$ のとき，

(与式) $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ ……①

$\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{z}$ だから，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

$\therefore \quad y \leqq 4$

よって，$2=x \leqq y \leqq 4$ より $y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，①より $\dfrac{1}{z}=0$ これをみたす z はない．

$y=3$ のとき，①より $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$ $\quad \therefore \quad z=6$

$y=4$ のとき，①より $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$ $\quad \therefore \quad z=4$

$x=3$ のとき，

(与式) $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$ ……②

$\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{z}$ だから $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

$\therefore \quad y \leqq 3$

よって，$3=x \leqq y \leqq 3$ より $y=3$

このとき，

② $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ $\quad \therefore \quad z=3$

以上より，

$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\mathbf{2,\ 3,\ 6}),\ (\mathbf{2,\ 4,\ 4}),$
$(\mathbf{3,\ 3,\ 3})$

95

$x^2-2mx+2m+7=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$x=m \pm \sqrt{m^2-2m-7}$ より

$\alpha+\beta=2m,\ \alpha\beta=2m+7$

m を消去すると

$\alpha\beta=\alpha+\beta+7$

$\Longleftrightarrow \quad \alpha\beta-\alpha-\beta-7=0$

$\Longleftrightarrow \quad (\alpha-1)(\beta-1)=8$

$\alpha,\ \beta$ が整数のとき，$\alpha \leqq \beta$ とすると

$(\alpha-1,\ \beta-1)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$
$(-8,\ -1),\ (-4,\ -2)$

$\therefore \quad (\alpha,\ \beta)=(2,\ 9),\ (3,\ 5)$
$(-7,\ 0),\ (-3,\ -1)$

このうちmが整数になるものは

$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 5),\ (-3,\ -1)$ のときで，

$\boldsymbol{m}=\mathbf{4,\ -2}$

96

(1) $n \leqq 2x < n+1$ (n：整数) のとき，

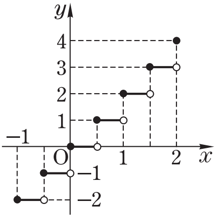
すなわち，$\dfrac{n}{2} \leqq x < \dfrac{n+1}{2}$ ……①

のとき，$y=[2x]=n$ ……②

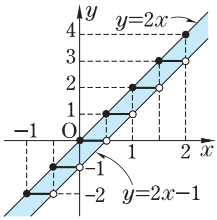
であるから，$-2 \leqq 2x \leqq 4$ の n を考えて，①，②に $n=-2,\ -1,\ \cdots,\ 2,\ 3$ を代入して ($x=2$ のときは別に考える)

$$y=[2x]=\begin{array}{l} -2\ \left(-1 \leqq x < -\dfrac{1}{2}\right) \\ -1\ \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x < 0\right) \\ 0\ \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 1\ \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right) \\ 2\ \left(1 \leqq x < \dfrac{3}{2}\right) \\ 3\ \left(\dfrac{3}{2} \leqq x < 2\right) \\ 4\ (x=2) \end{array}$$

よって，グラフは次の図のようになる．



(2)　$y=2x+k$ は傾き 2，y 切片 k の直線を表すので，この直線が(1)のグラフと共有点をもつのは，図より



$\boldsymbol{-1<k\leqq 0}$

97

(1)　$x^2\geqq 0$ だから，左辺$\geqq 18$
よって，$9[x]\geqq 18$
$\therefore\ [x]\geqq 2$

(2)　$n\leqq x<n+1$（n は 2 以上の自然数）のとき
$[x]=n$ だから，①は $x^2=9n-18$
ここで，$n^2\leqq x^2<(n+1)^2$ だから

$$n^2\leqq 9n-18<(n+1)^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} n^2-9n+18\leqq 0 & \cdots\cdots② \\ n^2-7n+19>0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より，$(n-3)(n-6)\leqq 0$ から，
$3\leqq n\leqq 6$

③は，$n^2-7n+19=\left(n-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$
より，すべての n で成りたつ．

$\therefore\ \boldsymbol{x=3\sqrt{n-2}\quad(3\leqq n\leqq 6)}$

(3)　(2)より，n に 3，4，5，6 を代入して
$\boldsymbol{x=3,\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{3},\ 6}$

98

100 円玉，50 円玉，10 円玉の枚数を
（100 円玉，50 円玉，10 円玉）
で表すと 540 円になるのは，使用する硬貨がそれぞれ 1 枚以上合計 25 枚以下であることに気をつけて
(4，2，4)，(4，1，9)，
(3，4，4)，(3，3，9)，(3，2，14)，
(3，1，19)，
(2，6，4)，(2，5，9)，(2，4，14)，
(2，3，19)，
(1，8，4)，(1，7，9)，(1，6，14)，
(1，5，19) の **14 通り**

99

(1)　$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$各 2 枚から 3 枚を選ぶ方法は，
(1，1，2)，(1，1，3)，(1，1，4)，
(1，2，2)，(1，2，3)，(1，2，4)，
(1，3，3)，(1，3，4)，(1，4，4)，
(2，2，3)，(2，2，4)，(2，3，3)，
(2，3，4)，(2，4，4)，(3，3，4)，
(3，4，4) だけあり，
すべて異なる数字のとき 6 個の整数が，2 つ同じ数字のとき 3 個の整数がつくれるので
$6\times 4+3\times 12=24+36=$**60**（**個**）

(2)　$\boxed{0}$を 1 個使うので，(1)と同様に考えると
(0，1，1)，(0，1，2)，(0，1，3)，
(0，1，4)，(0，2，2)，(0，2，3)，
(0，2，4)，(0，3，3)，(0，3，4)，
(0，4，4)
だけ数字の組合せがあり，
0 以外が異なる数字のとき，
$3!-2=4$（個）
の整数が，
0 以外が同じ数字のとき，
$3-1=2$（個）
の整数ができるので
$4\times 6+2\times 4=24+8=$**32**（**個**）

(3)　(1)，(2)より，$60+32=$**92**（**個**）

100

A の要素 1 ～ 9 のおのおのについて，そ

れが部分集合の要素であるか，そうでないかで，2通り考えられるので，求める個数は

$2\times2\times\cdots\times2=2^9=\mathbf{512}$ **(個)**

101 演習問題の解答（⑩～⑫）

72の正の約数の逆数の和は

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}$ と

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^0,\ \left(\frac{1}{3}\right)^1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$ からそれぞれ1つずつ選んでつくった積の和だから，

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{15}{8}\times\frac{13}{9}=\mathbf{\frac{65}{24}}$$

102

$$r{}_n\mathrm{C}_r=r\cdot\frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$$
$$=n\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!(r-1)!}$$
$$=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

103

(1) 両端の文字の入り方は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通りあり，他の4文字の並べ方は4! 通りあるので，

$6\times4!=\mathbf{144}$ **(個)**

(2) P，E，I をひとまとめと考えると，全体は4文字と考えられるので，並べ方は4! 通りあり，P，E，I の入れかえが3! 通りあるので，

$4!\times3!=\mathbf{144}$ **(個)**

(3) まず，P，E，I を並べ，その間と両端4か所から3か所を選んで，J，U，N を入れると考えれば，

$3!\times{}_4\mathrm{P}_3=\mathbf{144}$ **(個)**

注 $\boxed{\text{全体}-\text{となりあう}}$ と考えると

$6!-144=576$ (個) とまちがえてしまう．

(4) U，E，I が入る場所の選び方は，${}_6\mathrm{C}_3$ 通りあり，並べ方は1通りである．

また，残りの3文字の並べ方は，3! 通りあるので

${}_6\mathrm{C}_3\times3!=\mathbf{120}$ **(個)**

104

下2桁が25の倍数のとき25の倍数となる．

6個の数でつくられる25の倍数は25，50の2個．

(i) 下2桁が25のとき

千の位，百の位の2数の並べ方は，0，1，3，4から2数をとって並べたもので，0が入るものは3個，0が入らないものは ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$ (個)．

よって　$3+6=9$ (個)

(ii) 下2桁が50のとき

千の位，百の位の2数の並べ方は1，2，3，4から2数をとって並べたもので，

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$ (個)．

(i)，(ii)より　$9+12=\mathbf{21}$ **(個)**

105

s，i，n を○とした，

○，c，○，e，○，c，e

の並べ方は $\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$ (通り)．

この並びの1つ1つについて，○に s，i，n をこの順番で入れる方法は1通り．

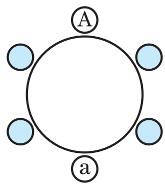
よって，**210通り**．

106

(1) 3人の男子が円卓にすわるすわり方は

$(3-1)!=2$ (通り)

男子の間3か所に女子がすわればよいので　$2\times3!=\mathbf{12}$ **(通り)**



(2)　A と a を固定して，他の 4 人のすわり方を考えると **8 通り**のすわり方がある．

107

(1)　男子 7 人の中から 2 人，女子 4 人の中から 1 人選ぶと考えると

$$ {}_7C_2\times{}_4C_1=\frac{7\cdot6}{2}\times4=\mathbf{84}\ (\textbf{通り}) $$

(2)　男子 7 人の中から 1 人，女子 4 人の中から 2 人選ぶ方法は

$$ {}_7C_1\times{}_4C_2=42 $$

(1)もあわせて　$84+42=\mathbf{126}$ (**通り**)

108

となりあった 3 点によりできる三角形 6 個と，正三角形となる 2 個であるから，

$$ 6+2=\mathbf{8}\ (\textbf{個}) $$

109

(1)　最大の目$\leqq4$

$\Longleftrightarrow$　それぞれのサイコロの目が 1 から 4 の目

よって，　$4^3=\mathbf{64}$ (**通り**)

(2)　最大の目$=4$

$\Longleftrightarrow$　「最大の目 $\leqq4$」−「最大の目 $\leqq3$」

よって，　$4^3-3^3=\mathbf{37}$ (**通り**)

110

(1)　使われる 2 つのスタンプの選び方は

$$ {}_4C_2=6\ (\text{通り}) $$

この 2 つが A と B のスタンプとすると，A のみ，B のみの押し方 2 通りに注意して

$$ 2^5-2=30\ (\text{通り}) $$

よって，$6\times30=\mathbf{180}$ (**通り**)

(2)　使われる 3 つのスタンプの選び方は

$$ {}_4C_3=4\ (\text{通り}) $$

この 3 つが A，B，C のスタンプとすると，どのカードにもスタンプの押し方が 3 通りずつあるが，この中には，1 つのスタンプのみ，2 つのスタンプのみ使われているものが含まれる．

(i)　1 つのスタンプのみ使われているものは，3 通り

(ii)　2 つのスタンプのみ使われているものは，

2 つのスタンプの選び方が

$$ {}_3C_2=3\ (\text{通り}) $$

2 つのスタンプの使われ方が

$$ 2^5-2=30\ (\text{通り}) $$

より，$3\times30=90$ (通り)

よって，A，B，C のスタンプが使われているのは，

$$ 3^5-3-90=150\ (\text{通り}) $$

これより，使わないスタンプが 1 つになる押し方は

$$ 150\times4=\mathbf{600}\ (\textbf{通り}) $$

111

8 人の生徒を 2 人，2 人，2 人，2 人に分けると考えると

(1)　組に区別があると考えればよいので

$$ {}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2 $$
$$ =\frac{8\cdot7}{2}\times\frac{6\cdot5}{2}\times\frac{4\cdot3}{2}\times1=\mathbf{2520}\ (\textbf{通り}) $$

(2)　組に区別がないと考えればよいので

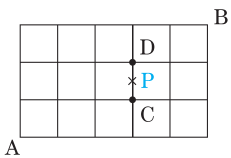
$$ \frac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=\mathbf{105}\ (\textbf{通り}) $$

112

(1)　「｜」を 3 本，「―」を 5 本並べると考えて，

$$ \frac{8!}{5!3!}=\mathbf{56}\ (\textbf{通り}) $$

(2)



P を通るものを考えると

A ⟶ C ⟶ D ⟶ B が考えられる．

ここで，A⟶C では $\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

D⟶B では $\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）

あるので求めるものは，

$56-4\times3=\mathbf{44}$ **（通り）**

113

赤，青，黄のカードの枚数をそれぞれ x，y，z とすると，$x+y+z=5$（$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$）をみたす（x，y，z）の組の個数を求めればよい．よって，$\dfrac{7!}{5!2!}=\mathbf{21}$ **（通り）**

114

1 枚のコインの面は 2 通りあるので，3 枚では $2^3=8$（通り）ある．
求めるものの組合せは，
（表，表，表），（裏，裏，裏）より

$$\frac{2}{8}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

115

2 つの数が互いに素となる組合せは
(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10),
(2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 9),
(3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8),
(3, 10), (4, 5), (4, 7), (4, 9),
(5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9),
(6, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10),
(8, 9), (9, 10)
の 31 通りである．

よって，$\dfrac{31}{{}_{10}C_2}=\mathbf{\dfrac{31}{45}}$

116

3 の倍数となるためには，4 つの数の和が 3 の倍数になればよい．その数の組合せは

（i）{0, 1, 2, 3}（ii）{0, 2, 3, 4}

である．(i)，(ii)の並べ方は，それぞれ

$3\times3\times2\times1=18$（通り）

4 桁の整数になる並べ方は，

$4\times4\times3\times2=96$（通り）

よって，求める確率は $\dfrac{2\times18}{96}=\dfrac{36}{96}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

117

i）2 個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{36}$$

ii）2 個とも白玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{{}_3C_1}{{}_9C_2}=\frac{3}{36}$$

iii）2 個とも青玉である確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{36}$$

i），ii），iii）は排反だから求める確率は

$$\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{6}{36}=\frac{10}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

118

積 abc が偶数であるためには，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数であればよいから，余事象であるすべて奇数となるときを考え

$$1-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{7}{8}}$$

119

(1) 1 回の試行で黒石のでる確率は $\dfrac{1}{3}$，

白石のでる確率は $\dfrac{2}{3}$．

よって，4 回目にはじめて黒石がでる確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{8}{81}}$$

(2) 白黒白黒とでる確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$$

黒白黒白とでる確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$$

2 つの事象は排反だから，求める確率は

$$\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\mathbf{\frac{8}{81}}$$

120

(1)　8 題中 6 題正解であり，どの 2 題が不正解かを考えて

$${}_8C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2^6}=\mathbf{\frac{7}{64}}$$

(2)　8 題中 (i) 6 題 (ii) 7 題 (iii) 8 題正解するときであるから

(i)　(1)より　$\dfrac{7}{64}$

(ii)　どの 1 題が不正解かを考えて

$${}_8C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

(iii)　すべて正解だから，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$$

(i), (ii), (iii)より，$\dfrac{7}{64}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{256}=\mathbf{\dfrac{37}{256}}$

121

(解 I)　根元事象は

${}_{10}P_3=10\cdot9\cdot8$（通り）

当たりを○，はずれを×で表すと C が当たるのは××○，×○○，○×○の 3 通りがあり，それぞれ ${}_8P_2\cdot{}_2P_1$，${}_8P_1\cdot{}_2P_2$，${}_8P_1\cdot{}_2P_2$ 通りあるので，

求める確率は　$\dfrac{8\cdot7\cdot2+8\cdot2+8\cdot2}{10\cdot9\cdot8}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

(解 II)　根元事象は　$\dfrac{10!}{8!2!}=5\cdot9$（通り）

C が当たるのは 10 本のくじを 1 列に並べたとき，左から 3 番目に当たりくじがあるときで，その並べ方は

$\dfrac{9!}{8!1!}=9$（通り）

$\therefore\ \dfrac{9}{5\cdot9}=\dfrac{1}{5}$

122

$Y\geqq3$ となるとき，でる目は 4 回とも 3 から 6 のどれかだから，

$$P(Y\geqq3)=\left(\frac{4}{6}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

同様に，

$$P(Y\geqq4)=\left(\frac{3}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

よって，

$$P(Y=3)=P(Y\geqq3)-P(Y\geqq4)$$
$$=\frac{16}{81}-\frac{1}{16}=\mathbf{\frac{175}{1296}}$$

123

(1)　裏は $(10-k)$ 回でるので，

　$(k,\ 10-k)$

(2)　(1)より $(6,\ 4)$ となるのは，$k=6$ のときだから

$${}_{10}C_6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{210}{2^{10}}=\mathbf{\frac{105}{512}}$$

(3)　表が 6 回以上でる確率を考えるので

$$\frac{105}{512}+{}_{10}C_7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$+{}_{10}C_8\times\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$+{}_{10}C_9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=(210+120+45+10+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=\frac{193}{2^9}=\mathbf{\frac{193}{512}}$$

124

(1)　とりだし方の総数は ${}_{10}C_2=45$（通り）

このうち，2 枚とも偶数になるのは，

${}_5C_2=10$（通り）

$\therefore\ \dfrac{10}{45}=\mathbf{\dfrac{2}{9}}$

(2)　素数は$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$の 4 数だから

$$\frac{{}_4C_2}{45}=\frac{6}{45}=\mathbf{\frac{2}{15}}$$

(3)　奇数は1，3，5，7，9の5枚だから

$$\frac{{}_5C_1 \cdot {}_5C_1}{45} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

125

(B)

	1	2	3	4	5	6
1		●			●	
2	●			●		
3			●			●
4		●			●	
5	●			●		
6			●			●

($A \cap B$)

	1	2	3	4	5	6
1		●				
2	●			●		
3						●
4		●			●	
5				●		
6			●			●

($A \cup B$)

	1	2	3	4	5	6
1		●		●	●	●
2	●	●	●	●	●	●
3		●	●	●		●
4	●	●	●	●	●	●
5	●	●		●		●
6	●	●	●	●	●	●

$\overline{A}$：両方とも奇数とすると

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{3}{6}\right) \times \left(\frac{3}{6}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

上図より，

$$P(B) = \frac{12}{36} = \mathbf{\frac{1}{3}},\quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \mathbf{\frac{1}{4}},$$

$$P(A \cup B) = \frac{30}{36} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

注　ここで，

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

です．

126

(1)　PからQまで行く最短経路は

${}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$（通り）である．

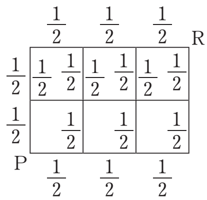
PからRまで行く最短経路は

${}_5C_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$（通り）あり

RからQまでの最短経路は2通りだから，

$$\frac{10 \times 2}{35} = \mathbf{\frac{4}{7}}$$

(2)　それぞれの交差点における確率を下図により表現する．



求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 10 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

127

(1)　p_n は，$n-5$ 個の無印の白玉と，5個の赤印の白玉の入った袋の中から5個とりだし，赤印が2個含まれている確率であるから

$$\therefore\quad p_n = \frac{{}_5C_2 \cdot {}_{n-5}C_3}{{}_nC_5}$$

$$= \mathbf{\frac{200(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}}$$

(2)

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\dfrac{200(n-4)(n-5)(n-6)}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}}{\dfrac{200(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}}$$

$$= \frac{(n-4)^2}{(n+1)(n-7)} = 1 + \frac{23-2n}{(n+1)(n-7)}$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \frac{23-2n}{(n+1)(n-7)}$$

よって，$n \leqq 11$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$，

$n \geqq 12$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$

$$\therefore\quad p_8 < p_9 < \cdots < p_{11} < p_{12} > p_{13} \cdots$$

よって，p_n を最大にする n は，**12**

128

3数の和が3の倍数になる組は

(1，2，3)，(2，3，4)

の2通りなので和が3の倍数になるとり出し方の総数は

$3!\times 2=12$ (通り).

このうち，1枚目のカードが$\boxed{1}$であるのは2通り.

よって求める確率は

$$\frac{2}{12}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

129

(1) 箱Cに赤玉が含まれない，つまり箱Cが白玉のみであるという余事象を考えて，求める確率は，

$$1-\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\mathbf{\frac{27}{35}}$$

(2) 箱Cの中の玉の組合せは，

(i) 赤・赤　　(ii) 赤・白

のみであり(i)のとき，箱Cから赤玉をとりだす確率は1だから

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}\times 1=\frac{9}{35}$$

(ii)のとき，箱Cから赤玉をとりだす確率は $\frac{1}{2}$ だから

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{35}$$

(i)，(ii)より，求める確率は，

$$\frac{9}{35}+\frac{9}{35}=\mathbf{\frac{18}{35}}$$

(3) $P(R)$：箱Cから赤玉をとりだす確率，$P(A)$：箱Aの赤玉をえらぶ確率とすると，

$$P(R\cap A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore\quad P_R(A)=\frac{P(R\cap A)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{18}{35}}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

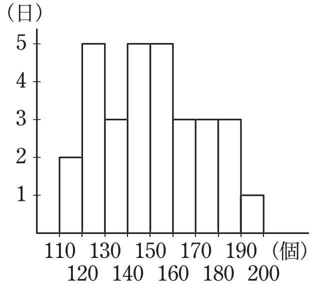
注 $P(R\cap A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$ と求めてもよい.

130

(1)

階　級 (個)	度数
110 以上 〜 120 未満	2
120 〜 130	5
130 〜 140	3
140 〜 150	5
150 〜 160	5
160 〜 170	3
170 〜 180	3
180 〜 190	3
190 〜 200	1
計	30

(2)



131

(1) データの最も多い階級は，7.5秒以上8.0秒未満だから最頻値は

$$\frac{7.5+8.0}{2}=\mathbf{7.75}\ \text{(秒)}$$

(2) (平均値)

$$=\left(\frac{6.0+6.5}{2}\times 2+\frac{6.5+7.0}{2}\times 2+\frac{7.0+7.5}{2}\times 6+\frac{7.5+8.0}{2}\times 8+\frac{8.0+8.5}{2}\times 2\right)\times\frac{1}{20}=\frac{148}{20}=\mathbf{7.4}\ \text{(秒)}$$

(3) データの平均値が最小となるのは各階級の最小値を使って平均を計算したときなので，

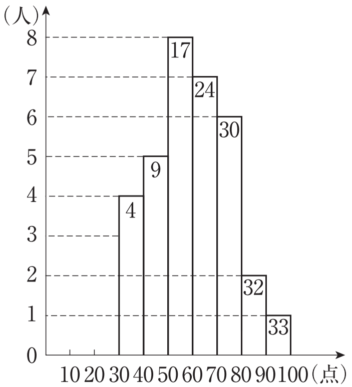
(平均値の最小値)

$=(6.0\times2+6.5\times2+7.0\times6+7.5\times8$
$+8.0\times2)\times\frac{1}{20}=\frac{143}{20}=7.15$
この値と階級の幅が0.5秒であることから平均値のとりうる値の範囲は，
7.15秒以上7.65秒未満

132

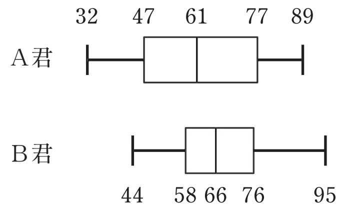
(1)　A君について第2四分位数は
$\frac{2+5}{2}=$**3.5（点）**
第1四分位数は**2点**，
第3四分位数は**6点**
四分位範囲は，$6-2=$**4（点）**
B君について第2四分位数は
$\frac{7+8}{2}=$**7.5（点）**
第1四分位数は**5点**，
第3四分位数は**9点**
四分位範囲は，$9-5=$**4（点）**
(2)　2人の四分位範囲が等しいことからデータの散らばり度合いは同程度と考えられる．

133



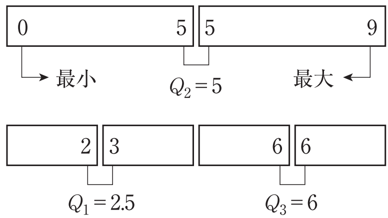
33人に対する第2四分位数は，点数の低い方から17人目．
第1四分位数は，点数の低い方から，8人目と9人目の平均．
第3四分位数は，点数の高い方から，8人目と9人目の平均．
よって，第1四分位数が存在する階級値は**45点**
第2四分位数が存在する階級値は**55点**
第3四分位数が存在する階級値は**75点**

134



135

棒グラフより，データを小さい順に並べると，
0，1，2，2，2，3，4，5，5，5，5，6，6，6，6，6，8，8，9，9



(1)　最大値は9だから，⓪，①，②は不適．
第1四分位数は2.5だから，④は不適．
第2四分位数は5だから，③は不適．
よって，⑤が適する．
(2)　⓪修正前の平均値は棒グラフから求められるが修正後については箱ひげ図しかなく，平均点はわからないので，必ずしも正しくない．
①　0点の生徒が10点になって，他の生徒が全く得点が変化しなかったとすると，新しい第2四分位数は，5.5となり正しくない．
よって，残り9人の中に得点が変化

した生徒がいることになり，これは正しい．

② データの範囲で考えると，修正前，修正後ともに 9 で同じ．四分位範囲で考えても，修正前，修正後ともに 3.5 で同じ．
よって，正しいとはいえない．

③ ①が正しいので，正しくない．

136

Aクラスの身長の平均値，分散，標準偏差をそれぞれ $\overline{x}_A$，$s_A{}^2$，s_A とすると

$\overline{x}_A=\dfrac{1}{20}(150\times5+160\times6+170\times4+180\times4+190\times1)=\mathbf{165}$ **(cm)**

$s_A{}^2=\dfrac{1}{20}\{(150-165)^2\times5+(160-165)^2\times6+(170-165)^2\times4+(180-165)^2\times4+(190-165)^2\times1\}=\mathbf{145}$

$s_A=\sqrt{\mathbf{145}}$ **(cm)**

Bクラスの身長の平均値，分散，標準偏差をそれぞれ $\overline{x}_B$，$s_B{}^2$，s_B とすると

$\overline{x}_B=\dfrac{1}{20}(150\times1+160\times4+170\times12+180\times2+190\times1)=\mathbf{169}$ **(cm)**

$s_B{}^2=\dfrac{1}{20}\{(150-169)^2\times1+(160-169)^2\times4+(170-169)^2\times12+(180-169)^2\times2+(190-169)^2\times1\}=\mathbf{69}$

$s_B=\sqrt{\mathbf{69}}$ **(cm)**

以上より，$s_A>s_B$ なので，Aクラスの方が身長の散らばり度合いが大きい．

137

それぞれのデータから 62 を引いた数を新しいデータとして考える．

$a'=a-62$，$b'=b-62$，$c'=c-62$ とおくと

(ア)は $-5<a'<b'<2<c'$ だから，

(イ)より，$c'-(-5)=10$　$\therefore$　$c'=5$

(ウ)より，$\dfrac{57+a+b+64+c}{5}=62$

$\therefore$　$\dfrac{(62-5)+(a'+62)+(b'+62)+(62+2)+(c'+62)}{5}=62$

$\therefore$　$-5+a'+b'+2+c'=0$

$\therefore$　$a'+b'=-2$　……①

(エ)より

$\dfrac{(57-62)^2+(a-62)^2+(b-62)^2+(64-62)^2+(c-62)^2}{5}=11.6$

$\therefore$　$25+a'^2+b'^2+4+c'^2=58$

$\therefore$　$a'^2+b'^2=4$　……②

①，②と $a'<b'$ より，$a'=-2$，$b'=0$

よって，$a=\mathbf{60}$，$b=\mathbf{62}$，$c=\mathbf{67}$

138

正方形 C_1，C_2，…，C_8 の 1 辺の長さをそれぞれ，a_1，a_2，…，a_8 とすると，面積の平均は

$$\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_8{}^2}{8}$$

である．ここで，1 辺の長さの平均は 3，分散は 4 であるから，分散の公式より

$$\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_8{}^2}{8}-3^2=4$$

よって　$\dfrac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_8{}^2}{8}=9+4=\mathbf{13}$

139

A グループの得点を a_1，a_2，a_3，a_4

B グループの得点を b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6 とおくと

$\overline{a}=8.0$ より，$a_1+a_2+a_3+a_4=32$

$\overline{b}=7.0$ より，

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=42$

よって，

$\overline{x}=\dfrac{(a_1+a_2+a_3+a_4)+(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)}{10}$

$=\dfrac{74}{10}=\mathbf{7.4}$

次に，$s_a{}^2=4.0$ より

$$\frac{1}{4}(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)-8^2=4$$

$\therefore \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=272$

また，$s_b{}^2=5.0$ より

$$\frac{1}{6}(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2)-7^2$$

$=5$

$\therefore \quad b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2=324$

$$s_x{}^2=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2}{10}$$

$$-(\overline{x})^2=\frac{272+324}{10}-(7.4)^2$$

$=59.6-54.76=\mathbf{4.84}$

140

$\overline{x}=6$ より，

$x_1+x_2+\cdots+x_9=54$

$s_x{}^2=4$ より

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2}{9}-(\overline{x})^2=4$$

$\therefore \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2=9\times(36+4)$

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2=360$

よって，

$$\overline{y}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9+9}{10}=\frac{54+9}{10}$$

$=\mathbf{6.3}$

$$s_y{}^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2+9^2}{10}-(\overline{y})^2$$

$$=\frac{360+81}{10}-(6.3)^2$$

$=44.1-39.69=\mathbf{4.41}$

141

$y=x-167$ で変換すると

x	166	158	177	187	162
y	-1	-9	10	20	-5

y の値は表のようになる．

$$\overline{y}=\frac{(-1)+(-9)+10+20+(-5)}{5}$$

$$=\frac{15}{5}=3$$

$\overline{y}=\overline{x}-167$ より，$\overline{x}=\overline{y}+167=\mathbf{170}$

次に

$$s_y{}^2=\frac{1}{5}(1+81+100+400+25)-3^2$$

$$=\frac{607}{5}-9=\frac{562}{5}=112.4$$

$s_y{}^2=1^2\cdot s_x{}^2$ だから，$s_x{}^2=\mathbf{112.4}$

142

（A の偏差値の合計）

科目 X の偏差値は

$$\frac{96-\overline{x}}{s_x}\times10+50=\frac{96-72}{16}\times10+50$$

$=65$

科目 Y の偏差値は

$$\frac{90-\overline{y}}{s_y}\times10+50=\frac{90-84}{24}\times10+50$$

$=52.5$

よって，A の偏差値の合計は

$65+52.5=117.5$

（B の偏差値の合計）

科目 X の偏差値は

$$\frac{88-\overline{x}}{s_x}\times10+50=\frac{88-72}{16}\times10+50=60$$

科目 Y の偏差値は

$$\frac{99-\overline{y}}{s_y}\times10+50=\frac{99-84}{24}\times10+50$$

$=56.25$

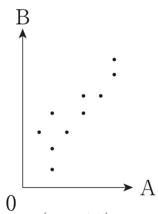
よって，B の偏差値の合計は，

$60+56.25=116.25$

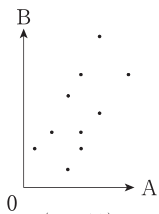
以上のことより，A の方が上位の成績といえる．

143

(1)



（1 回目）



（2 回目）

(2)　1 回目の方が相関が強い．

144

⓪　箱ひげ図によると最小値は 25 円より小さいので，正しくない．

①　散布図によると，秋では，20 ℃ 以下ではすべて 15 円を下回っている．
よって，正しくない．

②　箱ひげ図によると夏の購入額の範囲は 20 円より大きく．秋の購入額の範囲は 20 円より小さいので，正しくない．

③　箱ひげ図より，春の購入額の最大値は 25 円より小さく，秋の購入額の最大値は 25 円より大きい．
よって，正しくない．

④　箱ひげ図によると，秋の第 3 四分位数の方が春の第 3 四分位数より大きいので，正しい．

⑤　箱ひげ図によると，秋の中央値は春の中央値より小さい．
よって，正しくない．

⑥　散布図によると，秋にも最高気温が 25 ℃ を上回っている日がある．
よって，正しくない．

⑦　箱ひげ図によると，四分位範囲が最小なのは冬である．
よって，正しくない．

⑧　箱ひげ図によると，春，秋，冬に関しては正しく，夏について散布図を調べると正しい．
よって，正しい．

$\boxed{ア}$は④，$\boxed{イ}$は⑧（順不同）

145

(1)　$\overline{x}=\dfrac{50+52+46+42+43+35+48+47+50+37}{10}$

$=\mathbf{45}$ (**kg**)

$\overline{y}=\dfrac{31+33+48+42+51+49+39+45+45+47}{10}$

$=\mathbf{43}$ (**kg**)

$s_x{}^2=\dfrac{1}{10}(5^2+7^2+1^2+(-3)^2+(-2)^2+(-10)^2$
$+3^2+2^2+5^2+(-8)^2=\mathbf{29}$

$s_y{}^2=\dfrac{1}{10}(-12)^2+(-10)^2+5^2+(-1)^2+8^2$
$+6^2+(-4)^2+2^2+2^2+4^2)=\mathbf{41}$

(2)　$s_{xy}=\dfrac{1}{10}\{5(-12)+7(-10)+1\cdot5$
$+(-3)(-1)+(-2)\cdot8$
$+(-10)\cdot6+3\cdot(-4)+2\cdot2+5\cdot2$
$+(-8)\cdot4\}=\mathbf{-22.8}$

よって，$r=\dfrac{s_{xy}}{s_xs_y}=\dfrac{-22.8}{\sqrt{29}\sqrt{41}}\fallingdotseq\mathbf{-0.66}$

参考　注にある仮平均の考え（＝145の変量変換）を使うと…

x	50	52	46	42	43	35	48	47	50	37
x'	3	5	-1	-5	-4	-12	1	0	3	-10

（仮平均は 47）

$\overline{x'}=-2$ だから，$\overline{x}=47-2=45$