数学Ⅲ基礎問題精講［四訂新装版］

上園信武著

演習問題の解答 PDF

旺文社

演習問題の解答

1

(1)　$\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$ だから，**焦点は $(\pm\sqrt{3},\ 0)$**

長軸の長さは 4，短軸の長さは 2

(2)　C と l を連立すると，$x^2+(2k-x)^2=4$

$$\therefore\quad x^2-2kx+2k^2-2=0\quad \cdots\cdots①$$

①は，重解をもつので，

$$k^2-(2k^2-2)=0\qquad \therefore\quad k^2=2$$

$k>0$ だから，$k=\sqrt{2}$

このとき，接点の x 座標は①の重解，すなわち k

よって，接点は $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2

(1)　直線の式とだ円の式を連立すると

$$x^2-2kx+2k^2-2=0\quad \cdots\cdots①$$

①は，異なる 2 つの実数解をもつので，

$$k^2-(2k^2-2)>0$$

$$\therefore\quad k^2-2<0$$

よって，$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(2)　①の実数解を α，β とし，$\mathrm{M}(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=k,\quad y=-\frac{1}{2}x+k$$

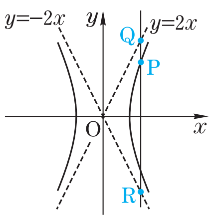
k を消去して，$y=\dfrac{1}{2}x$

また，(1)より　$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

よって，求める軌跡の方程式は，

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}\quad (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$$

3



$\mathrm{P}(a,\ b)$ とおくと，$\mathrm{Q}(a,\ 2a)$，$\mathrm{R}(a,\ -2a)$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=|2a-b||2a+b|$$
$$=|4a^2-b^2|$$

ここで，$\dfrac{a^2}{7}-\dfrac{b^2}{28}=1$ より

$$4a^2-b^2=28$$

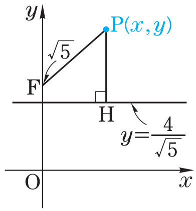
よって，PQ･PR$=$28

4

(1)　P から直線 $y=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ におろした垂線の足をHとすると，

$$\mathrm{PH}^2=\left|y-\frac{4}{\sqrt{5}}\right|^2$$

また，$\mathrm{PF}^2=x^2+(y-\sqrt{5})^2$



$\mathrm{PF}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{PH}$ より　　$4\mathrm{PF}^2=5\mathrm{PH}^2$

$$\therefore\quad 5\left(y-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=4\{x^2+(y-\sqrt{5})^2\}$$

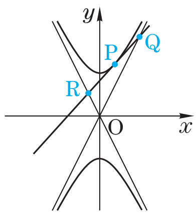
$$\iff 5y^2-8\sqrt{5}\,y+16=4x^2+4y^2-8\sqrt{5}\,y+20$$

$$\therefore\quad 4x^2-y^2=-4$$

よって，P の軌跡は双曲線.

(2)　P$(p,\ q)$ における接線は

$4px-qy=-4$　　……①



また，漸近線は，$y=2x$ ……②

と　$y=-2x$　　……③

①，②の交点の x 座標は

$4px-q\cdot 2x=-4$ より　$x=\dfrac{-2}{2p-q}$

①，③の交点の x 座標は

$4px-q\cdot(-2x)=-4$ より　$x=\dfrac{-2}{2p+q}$

$$\frac{-2}{2p-q}+\frac{-2}{2p+q}=\frac{-8p}{4p^2-q^2}=2p\quad(4p^2-q^2=-4\ \text{より})$$

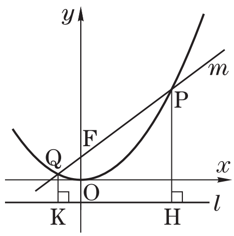
よって，点Pは線分 QR の中点.

5

(1)　$4\times\dfrac{1}{4}y=x^2$ だから，$\mathbf{F}\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$，$l:\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}}$

(2)　$y=\dfrac{t^2-\frac{1}{4}}{t-0}x+\dfrac{1}{4}$　　$\therefore\quad \boldsymbol{y=\dfrac{4t^2-1}{4t}x+\dfrac{1}{4}}$

(3)　$x^2=\dfrac{4t^2-1}{4t}x+\dfrac{1}{4}\iff 4tx^2-(4t^2-1)x-t=0$



Qの x 座標を s とおくと，解と係数の関係より

$$st=-\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{s=-\frac{1}{4t}}$$

(4)　P，Q から l におろした垂線の足をそれぞれ，H，K とすると，定義より，

$$\begin{aligned} PQ &= PF+FQ=PH+QK \\ &= \left(t^2+\frac{1}{4}\right)+\left\{\left(-\frac{1}{4t}\right)^2+\frac{1}{4}\right\} \\ &= \boldsymbol{t^2+\frac{1}{16t^2}+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

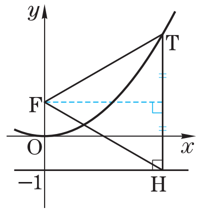
(5)　相加平均，相乗平均の関係より

$$t^2+\frac{1}{16t^2} \geqq 2\sqrt{t^2\times\frac{1}{16t^2}}=\frac{1}{2}$$

等号は，$t^2=\dfrac{1}{16t^2}$，すなわち，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき成立するので，

PQ の**最小値は 1**

6



(1)　放物線 $4py=x^2$ の焦点は

$(0,\ p)$ だから，　$p=\mathbf{1}$

また，準線は　$\boldsymbol{y=-1}$

(2)　定義より，TF＝TH だから，△FTH が正三角形となるとき，F から TH におろした垂線の足は，TH の中点．

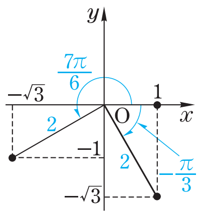
$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left\{\frac{t^2}{4}+(-1)\right\}=1 \iff t^2=12$$

$t>0$ だから，　$t=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

このとき，正三角形の 1 辺の長さは 4 だから，

求める面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\sin 60^\circ=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

7



右図より，$(1,\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ -1)$ を極座標で表すと，それぞれ

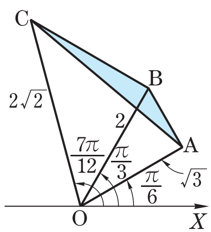
$$\left(\mathbf{1},\ \mathbf{0}\right),\ \left(\mathbf{2},\ \boldsymbol{\frac{7\pi}{6}}\right)$$

また，$2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，$2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

ゆえに，$\left(2,\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$ を直交座標で表すと

$$\left(\mathbf{1},\ \boldsymbol{-\sqrt{3}}\right)$$

8



(1)　余弦定理より

$$AB^2=3+4-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{6}=1$$

$$\therefore\quad AB=\mathbf{1}$$

$$BC^2=4+8-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=4$$

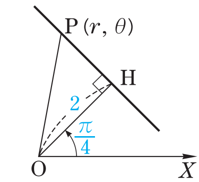
$$\therefore \quad \mathrm{BC}=\mathbf{2}$$

(2) $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ABO}+\angle\mathrm{OBC}$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

9



右図より

$$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2}$$

10

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ とおくと

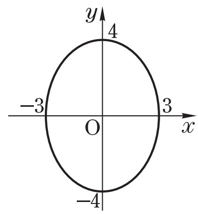
$$r^2\cos^2\theta=x^2,\quad r^2=x^2+y^2$$

$$\therefore \quad r^2(7\cos^2\theta+9)=144$$

$$\Longleftrightarrow 7x^2+9(x^2+y^2)=144$$

$$\Longleftrightarrow 16x^2+9y^2=144$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1}$$



よって，右図のようなだ円.

11

(1) 余弦定理より

$$(r+a)^2=r^2+1-2r\cos(\pi-\theta)$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{2r(a-\cos\theta)=1-a^2}$$

(2) PA が最小 $\Longleftrightarrow$ r が最小

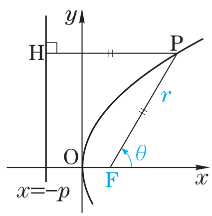
$\Longleftrightarrow$ $a-\cos\theta$ が最大

$\Longleftrightarrow$ $\cos\theta=-1$ $\Longleftrightarrow$ $\theta=\pi$

$$\therefore \quad r=\frac{1-a^2}{2(1+a)}=\frac{1-a}{2}$$

よって，$\mathbf{P}\boldsymbol{\left(\frac{1-a}{2},\ \pi\right)}$

12



(1) 右図より

$$r=\mathrm{PH}=2p+r\cos\theta$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r(1-\cos\theta)=2p}$$

(2) $\mathrm{FP}=r$ とおくと，(1)より

$$r(1-\cos\theta)=2p$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\mathrm{FP}}=\frac{1}{r}=\frac{1-\cos\theta}{2p}$$

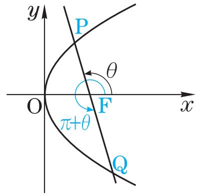
次に，$\mathrm{FQ}=r'$ とおくと

$$r'\{1-\cos(\pi+\theta)\}=2p$$

$$\Longleftrightarrow\quad r'(1+\cos\theta)=2p$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\mathrm{FQ}}=\frac{1}{r'}=\frac{1+\cos\theta}{2p}$$

よって，$\dfrac{1}{\mathrm{FP}}+\dfrac{1}{\mathrm{FQ}}=\dfrac{1}{p}$ （一定）



13

(1) $z=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i=\boldsymbol{\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ}$$

(2) $\left|\dfrac{2z-1}{z}\right|=2,\ \arg\left(\dfrac{2z-1}{z}\right)=120^\circ$ より，

$$\frac{2z-1}{z}=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)\ \Longleftrightarrow\ 2-\frac{1}{z}=-1+\sqrt{3}i$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{1}{z}=3-\sqrt{3}i\ \Longleftrightarrow\ z=\frac{1}{3-\sqrt{3}i}$$

$$\therefore\quad z=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}$$

14

$$|z-\alpha|^2=|1-\bar{\alpha}z|^2\ \Longleftrightarrow\ (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=(1-\bar{\alpha}z)(1-\alpha\bar{z})$$

$$\Longleftrightarrow\ |z|^2+|\alpha|^2=1+|\alpha|^2|z|^2\ \Longleftrightarrow\ (1-|\alpha|^2)|z|^2=1-|\alpha|^2$$

$|\alpha|^2\neq 1$ より $|z|^2=1$　　$\therefore\ |z|=\mathbf{1}$

15

(1) $\bar{\alpha}=1-i=\sqrt{2}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right\}=\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$

よって，$|\bar{\alpha}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\arg\bar{\alpha}=\mathbf{315^\circ}$

(2) $\beta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

よって，$|\beta|=2$，$\arg\beta=30^\circ$

$\therefore\quad |\gamma|=\dfrac{|\beta|}{|\bar{\alpha}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

また，$\arg\gamma=\arg\dfrac{\beta}{\bar{\alpha}}=\arg\beta-\arg\bar{\alpha}=30^\circ-315^\circ=-285^\circ$

$-180^\circ \leqq \arg\gamma \leqq 180^\circ$ だから，$\arg\gamma = \mathbf{75^\circ}$

16

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\,\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}$$ より

$$\therefore\quad (1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\{\cos(45^\circ\times n)+i\sin(45^\circ\times n)\}$$

$$(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\{\cos(-45^\circ\times n)+i\sin(-45^\circ\times n)\}$$

$\cos(-45^\circ\times n)=\cos(45^\circ\times n)$，$\sin(-45^\circ\times n)=-\sin(45^\circ\times n)$

より　$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos(45^\circ\times n)=2^5$

よって，$\cos(45^\circ\times n)=2^{4-\frac{n}{2}}$　　ここで，$2^{4-\frac{n}{2}}>0$ より，

$$\cos(45^\circ\times n)=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \therefore\quad 2^{4-\frac{n}{2}}=2^0,\ 2^{-\frac{1}{2}} \iff 4-\frac{n}{2}=0,\ -\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad n=\mathbf{8,\ 9}$

17

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$　……①

より，$z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=\cos^2\theta-1<0$

$(\because\quad 0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$0<\cos\theta<1)$

よって，①は虚数解をもつ．

(2)　解と係数の関係より，$|z|^2=z\bar{z}=1$　　$\therefore\quad |z|=\mathbf{1}$

(3)　$z=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sqrt{1-\cos^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

$0^\circ\leqq\arg z\leqq180^\circ$ より，z の虚部は正

$$\therefore\quad z=\boldsymbol{\cos\theta+i\sin\theta}$$

(4)　$|z|^2=1$ より，$z\bar{z}=1$

$$\therefore\quad z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+(\bar{z})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n$$

$$=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=\boldsymbol{2\cos n\theta}$$

18

$|z|^4=\sqrt{8^2\{(-1)^2+(\sqrt{3})^2\}}=16$ より，$|z|=2$

よって，$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$ とおくと

$$z^4=16(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=8(-1+\sqrt{3}\,i)$$

$$\therefore\quad \cos 4\theta=-\frac{1}{2},\ \sin 4\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq 4\theta<1440^\circ$ より，$4\theta=120^\circ,\ 480^\circ,\ 840^\circ,\ 1200^\circ$

$$\therefore \quad \theta=30^\circ,\ 120^\circ,\ 210^\circ,\ 300^\circ$$

よって，$z=\boldsymbol{\sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}\,i}$

19

求める頂点を z_3 とすると

(i)　四角形 $\mathrm{O}z_1z_3z_2$ が平行四辺形のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{O}z_3}=\overrightarrow{\mathrm{O}z_1}+\overrightarrow{\mathrm{O}z_2}=3-i$

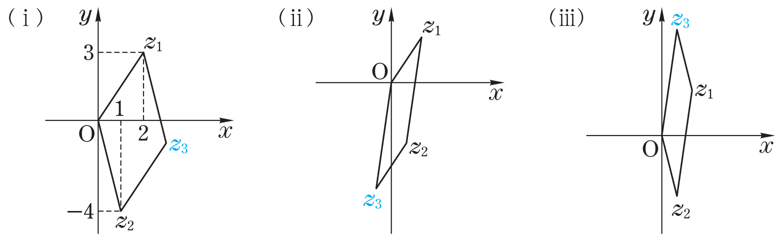
(ii)　四角形 $\mathrm{O}z_1z_2z_3$ が平行四辺形のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{O}z_3}=\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{\mathrm{O}z_2}-\overrightarrow{\mathrm{O}z_1}=-1-7i$

(iii)　四角形 $\mathrm{O}z_3z_1z_2$ が平行四辺形のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{O}z_3}=\overrightarrow{z_2z_1}=\overrightarrow{\mathrm{O}z_1}-\overrightarrow{\mathrm{O}z_2}=1+7i$

(i), (ii), (iii)より，求める第 4 頂点は，$\boldsymbol{3-i,\ -1-7i,\ 1+7i}$



20

(1)　$\alpha=\dfrac{2z_1+z_2}{2+1}=\dfrac{(4+2i)+(-1+2i)}{3}=\boldsymbol{1+\dfrac{4}{3}i}$

(2)　$\beta=\dfrac{2z_1-z_2}{2+(-1)}=(4+2i)-(-1+2i)=\boldsymbol{5}$

21

$z_1z_2{}^2=|(2+3i)-(1+i)|^2=|1+2i|^2=1+4=5$

$z_2z_3{}^2=|(6+i)-(2+3i)|^2=|4-2i|^2=16+4=20$

$z_3z_1{}^2=|(6+i)-(1+i)|^2=|5|^2=25$

$z_1z_2{}^2+z_2z_3{}^2=z_3z_1{}^2$ だから，

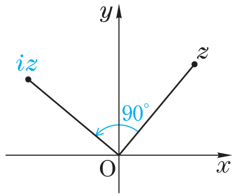
$\triangle z_1z_2z_3$ は **z_3z_1 を斜辺とする直角三角形.**

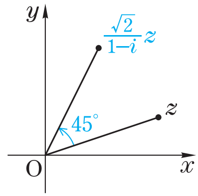
22

(1)　$i=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$ より，iz は，**z を原点まわりに 90°回転させた点**である.

(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i=\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$ より

z を原点まわりに 45°回転させた点である.





23

$$\alpha = iz + z = (i+1) + (1-i) = \mathbf{2}$$
$$\beta = i(z+z) = i(2-2i) = \mathbf{2+2i}$$

24

$$z_1 - z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\therefore\quad \arg(z_1 - z_2) = 240°$

$$z_3 - z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad \therefore\quad \arg(z_3 - z_2) = 210°$$

よって，$\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) = -30°$

$\therefore\quad \angle \mathrm{P_1P_2P_3} = \mathbf{30°}$

25

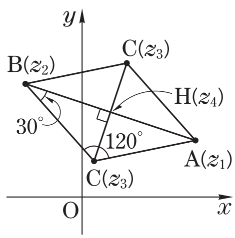
$$z - (1+2i) = (\cos 45° + i\sin 45°)\{0 - (1+2i)\}$$

$$\therefore\quad z = (1+2i)\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}$$
$$= 1 + 2i - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i + 2i + 2i^2) = \underline{\frac{\mathbf{2+\sqrt{2}+(4-3\sqrt{2})i}}{\mathbf{2}}}$$

26

(1)　Cから線分ABにおろした垂線の足をHとすると，$\angle \mathrm{ACH} = 60°$ より，

$$\mathrm{AC} : \mathrm{AH} = 2 : \sqrt{3}$$
$$\therefore\quad \mathrm{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{AH} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\mathbf{\sqrt{30}}}{\mathbf{3}}$$



(2)　(1)より，z_3 は z_2 を z_1 のまわりに $\pm 30°$ 回転し，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものであるから

$$z_3-z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2-z_1)\{\cos(\pm30°)+i\sin(\pm30°)\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(-3+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{z_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(\sqrt{3}-1)+(3\sqrt{3}-3)i\},}$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\{(\sqrt{3}+1)+(3\sqrt{3}+3)i\}}$$

27

$w=\dfrac{z}{z+1}$ とおくと，

$$\mathrm{Im}\,w=\frac{1}{2i}(w-\overline{w})=\frac{z-\overline{z}}{2i(z+1)(\overline{z}+1)}=0$$
$$\therefore\quad z-\overline{z}=0$$

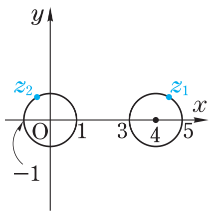
よって，$\mathrm{Im}\,z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})=0$ となり，z は実数である．

28

$z=(2-3t)+(1+2t)i=(2+i)+(-3+2i)t$ より

z は，**点 $\boldsymbol{2+i}$ を通り，傾き $\boldsymbol{-3+2i}$ 方向の直線**をえがく．

29



(1)　$|z_1-4|=1$ より，z_1 は 4 を中心とし，半径 1 の円周上を動き，$|z_2|=1$ より，z_2 はOを中心とし，半径 1 の円周上を動く．よって，右図のようになる．

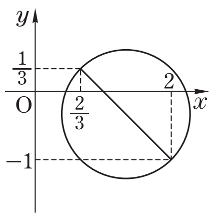
(2)　$|z_1-z_2|$ は z_1 と z_2 の距離を表すので，

$z_1=3$，$z_2=1$ のとき最小となり，最小値 2

$z_1=5$，$z_2=-1$ のとき最大となり，最大値 6

$$\therefore\quad \boldsymbol{2\leqq|z_1-z_2|\leqq6}$$

30



$\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right|=2 \iff |z-i|=2|z-1|$ より，z は，2 点 i，1 からの距離の比が，2：1 である点．よって，i，1 を 2：1 に内分する点 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}i}$ と外分する点 $\boldsymbol{2-i}$ **を直径の両端とする円**をえがく．

31

$$w=(1-i)z \iff \frac{w}{1-i}=z \iff \frac{w}{1-i}-1=z-1$$

$$\iff w-(1-i)=(1-i)(z-1)$$
$$\therefore\ |w-(1-i)|=|(1-i)(z-1)|$$
$$\iff |w-(1-i)|=\sqrt{2}\quad (\because\ |z-1|=1)$$

よって，w は**点 $1-i$ を中心とし，半径 $\sqrt{2}$ の円**をえがく．

32

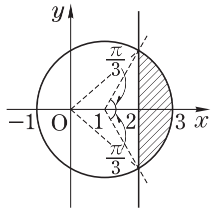
(1)　$z=x+yi$ とおくと

$$\begin{cases} 2|z-2|=2|(x-2)+yi|=2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\ |z-5|=|(x-5)+yi|=\sqrt{(x-5)^2+y^2} \\ |z+1|=|(x+1)+yi|=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

よって，与えられた不等式は

$$4(x-2)^2+4y^2\leqq(x-5)^2+y^2\leqq(x+1)^2+y^2$$
$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqq 4 \\ x\geqq 2 \end{cases}$$

ゆえに，D は右図の斜線部で，境界も含む．



(2)　$S=\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}$

(3)　図より，$\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

33

(1)　$z=x+yi$ とおくと

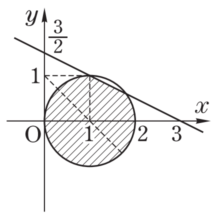
$|z-1|\leqq1$ より $|(x-1)+yi|\leqq1$

$$\therefore\ (x-1)^2+y^2\leqq1 \quad \cdots\cdots①$$

また，$(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}\leqq6$ より

$$(1-2i)(x+yi)+(1+2i)(x-yi)\leqq6$$
$$\therefore\ x+2y\leqq3 \quad \cdots\cdots②$$

よって，D は右図の斜線部で，境界も含む．



(2)　P(z)，A(i) とおくと，$|z-i|$ は線分 AP の長さを表すので

$z=1+\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき，**最小値 $\sqrt{2}-1$** をとり，

$z=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき，**最大値 $\sqrt{2}+1$** をとる．

34

$w=\dfrac{1+iz}{1+z}\iff w-i=\dfrac{1-i}{1+z}\iff z=-1+\dfrac{1-i}{w-i}$　これを，$|z|=1$ に代入すると，$\left|\dfrac{1-i}{w-i}-1\right|=1\iff|1-w|=|w-i|\iff|w-1|=|w-i|$

よって，w は**2点 1，i を結ぶ線分の垂直二等分線**をえがく．

35

$|z|\leqq 1$ ……①，$(1-i)z+(1+i)\overline{z}\leqq 2$ ……②

$w=\dfrac{2i}{z+1} \Longleftrightarrow z=-1+\dfrac{2i}{w}$ より

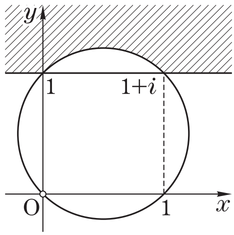
①に代入すると，

$$\left|-1+\frac{2i}{w}\right|\leqq 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{-w+2i}{w}\right|\leqq 1$$
$$\Longleftrightarrow |w-2i|\leqq|w|$$

より，w は 2 点 $2i$，O を結ぶ線分の垂直二等分線で分けられる 2 つの部分のうち $2i$ を含む部分を動く．

また，②に代入すると，$w\neq 0$ だから

$$(1-i)\left(-1+\frac{2i}{w}\right)+(1+i)\left(-1-\frac{2i}{\overline{w}}\right)\leqq 2$$
$$\Longleftrightarrow -2+\frac{2+2i}{w}+\frac{2-2i}{\overline{w}}\leqq 2$$
$$\Longleftrightarrow 2w\overline{w}-(1-i)w-(1+i)\overline{w}\geqq 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(w-\frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1-i}{2}\right)\geqq\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \left(w-\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(w-\frac{1+i}{2}\right)}\geqq\frac{1}{2}$$



ゆえに，$\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，中心 $\dfrac{1+i}{2}$，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円の周または外部を動く．ただし，原点Oは除く．よって，求める領域は，右上図の斜線部分．ただし境界は含む．

36

w は実数より，$w=\overline{w} \Longleftrightarrow \dfrac{(1+i)(z-1)}{z}=\dfrac{(1-i)(\overline{z}-1)}{\overline{z}}$

$z\neq 0$ だから

$$-2iz\overline{z}-(1-i)z+(1+i)\overline{z}=0$$
$$\Longleftrightarrow z\overline{z}-\frac{1+i}{2}z-\frac{1-i}{2}\overline{z}=0$$
$$\Longleftrightarrow \left(z-\frac{1-i}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{1+i}{2}\right)=\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \left(z-\frac{1-i}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{1-i}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \left|z-\frac{1-i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，z は**点 $\dfrac{1-i}{2}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円**をえがく．ただし，**点Oは除く**．

37

(1)　漸近線は $x=1$，$y=0$ だからグラフは下の〈図Ⅰ〉.

(2)　$y=-|x|+k$ ……① のグラフは，$y=-|x|$ のグラフを y 軸方向に k だけ平行移動したものだから下の〈図Ⅱ〉.

(1)のグラフと①のグラフが 2 個以上の交点をもてばよいので，〈図Ⅲ〉の k_0 に対して，　$k_0 \leqq k$

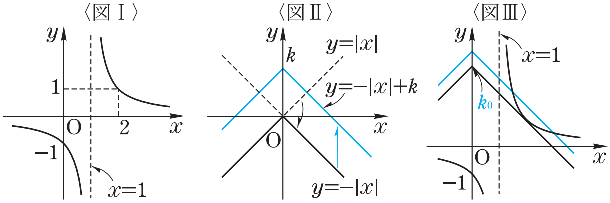
ここで，2 式を連立させて

$$-x+k_0=\frac{1}{x-1} \iff (x-1)(-x+k_0)=1$$
$$\iff x^2-(k_0+1)x+k_0+1=0$$

この 2 次方程式が重解をもつので，

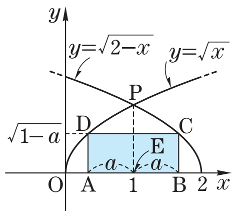
$$(k_0+1)^2-4(k_0+1)=(k_0+1)(k_0-3)=0 \qquad \therefore\ k_0=-1,\ 3$$

図より，$k_0=3$ だから　$\boldsymbol{3 \leqq k}$



38

$y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$ より，このグラフは $y=\sqrt{-x}$ を x 軸方向に 2 だけ平行移動したもの．よって，2 曲線のグラフは右図.



長方形 ABCD を図のようにとり，2 曲線の交点 P から x 軸におろした垂線の足を E とすると E の x 座標は

$$\sqrt{x}=\sqrt{2-x} \text{ より } \quad x=1$$

次に，$\text{AE}=a$ $(0<a<1)$ とおくと，　$\text{AD}=\sqrt{1-a}$

よって，$S=\text{AB}\cdot\text{AD}=2a\sqrt{1-a}$ である.

$S>0$ なので S^2 が最大になるとき S も最大であるから

$S^2=4a^2(1-a)=4a^2-4a^3=f(a)$ を考える.

$$f'(a)=8a-12a^2=4a(2-3a)$$

$$f'(a)=0 \text{ より } \quad a=\frac{2}{3}$$

よって，増減は右表のようになり，

$a=\dfrac{2}{3}$ のとき $f(a)$ は最大.

a	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗	最大	↘	

このとき，**S の最大値は** $2\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$

39

$f(g(x))=f(x^2)=a^{x^2+b}$,

$g(f(x))=g(a^{x+b})=(a^{x+b})^2=a^{2x+2b}$ より

$$f(g(x))=g(f(x)) \iff a^{x^2+b}=a^{2x+2b}$$

$$\iff x^2+b=2x+2b \iff x^2-2x-b=0 \quad \cdots\cdots ①$$

①がただ１つの実数解をもつための条件は 判別式$=0$ だから

$$1+b=0 \qquad \therefore \quad b=\mathbf{-1}$$

40

(1)　条件式より $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=0$, $f(2)=2$, $f(3)=10$ だから

$$\frac{16}{9}a+\frac{4}{3}b+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$4a+2b+c=2 \quad \cdots\cdots ②$$

$$9a+3b+c=10 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③を連立して解くと　$a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{-7}$, $c=\mathbf{4}$

(2)　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフが１点で接しているとき，$y=f(x)$ と $y=x$ は１点で接している (⇨**ポイント**).

$f(x)=3x^2-7x+c$ と $y=x$ を連立させて

$$3x^2-7x+c=x \iff 3x^2-8x+c=0$$

判別式$=0$ より　$16-3c=0$　　$\therefore$　$c=\mathbf{\dfrac{16}{3}}$

41

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=\mathbf{3}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{\dfrac{n-\sqrt{n}}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\mathbf{1}$$

42

$a_n=\dfrac{r^{2n+1}+1}{r^{2n}+1}=\dfrac{r(r^2)^n+1}{(r^2)^n+1}$ とおく．

(i) $r=1$ のとき，　$a_n=1$　　$\therefore$　$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

(ii) $r=-1$ のとき，$a_n=0$　　$\therefore$　$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(iii) $r^2<1$ すなわち $-1<r<1$ のとき，

$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\lim_{n\to\infty}r^{2n+1}=0$ より　$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

(iv) $r^2>1$ すなわち $r<-1,\ 1<r$ のとき，

$a_n=\dfrac{r+\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}}$ において，$-1<\dfrac{1}{r}<1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{2n}=0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=r$$

(i)〜(iv)より　$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\mathbf{0}\ (\boldsymbol{r=-1})\\ \mathbf{1}\ (\boldsymbol{-1<r\leqq 1})\\ \boldsymbol{r}\ (\boldsymbol{r<-1,\ 1<r})\end{cases}$ **収束**

43

(1) 与えられた漸化式の両辺に $-a_{n+1}$ を加えると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$$

$\Longleftrightarrow$ $b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}b_n$，$b_1=a_2-a_1=1$ より $\{b_n\}$ は初項 1，

公比 $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列である．　$\therefore$　$b_n=\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^{n-1}$

(2) $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列だから，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\left\{\mathbf{1}-\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^{n-1}\right\}$$

これは $n=1$ のときも成りたつ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ より　$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$

44

(1)　$n=1$ のとき，(左辺)$=3$，(右辺)$=1$ より成りたつ．
$n=2$ のとき，(左辺)$=9$，(右辺)$=4$ より成りたつ．
$n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき，$3^k>k^2$ が成りたつと仮定する．
両辺に 3 をかけて，$3^{k+1}>3k^2$　ここで，

$$3k^2-(k+1)^2=2k^2-2k-1=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}>0\quad (k\geqq 2 \text{ より})$$

$$\therefore\quad 3^{k+1}>3k^2>(k+1)^2\quad \text{すなわち，}3^{k+1}>(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成りたつので，すべての自然数 n について，$3^n>n^2$ が成りたつ．

(2)
$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}\quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{3}S_n=\qquad \frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}\quad \cdots\cdots②$$

①−②より

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$ より(2)の結果から

$$S_n=\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{n}{2\cdot 3^n}$$

(1)より $3^n>n^2$ だから，　$0<\dfrac{n}{3^n}<\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理から，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ より，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

45

(1)　($\sqrt{2}<x_n$ の証明)
(i)　$n=1$ のとき，条件より，$\sqrt{2}<x_1$ が成りたつ．
(ii)　$n=k$ のとき，$\sqrt{2}<x_k$ と仮定すると

$$x_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{{x_k}^2+2}{2x_k}-\sqrt{2}=\frac{(x_k-\sqrt{2})^2}{2x_k}>0$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}<x_{k+1}$$

(i)，(ii)より，すべての自然数 n で，$\sqrt{2}<x_n$ が成りたつ．
($x_{n+1}<x_n$ の証明)

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{{x_n}^2+2}{2x_n}=\frac{{x_n}^2-2}{2x_n}>0\quad (x_n>\sqrt{2} \text{ より})$$

よって，　$x_{n+1}<x_n$

以上のことより　$\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$

(2)　$x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}=\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})$

ここで，$\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}<\dfrac{x_n}{2x_n}=\dfrac{1}{2}$ だから

$x_n-\sqrt{2}>0$ より　$x_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{2})$

(3)　(2)の不等式をくり返し用いると

$$x_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-\sqrt{2})<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt{2})$$

$$\therefore\quad 0<x_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt{2})$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt{2})\right\}=0$ だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{2})=0\qquad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$$

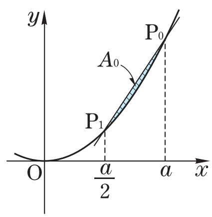
46

m 項までの部分和を S_m とすると

$$\begin{aligned}
S_m&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{2}{9n^2-1}+\frac{4}{9n^2-4}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{2}{(3n-1)(3n+1)}+\frac{4}{(3n-2)(3n+2)}\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{m}\left\{\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\\
&=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3m-1}-\frac{1}{3m+2}\right)\right\}\\
&\qquad+\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3m-2}-\frac{1}{3m+1}\right)\right\}\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3m+2}\right)+\left(1-\frac{1}{3m+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{3m+1}-\frac{1}{3m+2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 与式=\lim_{m\to\infty}S_m=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3m+1}-\frac{1}{3m+2}\right)=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

47

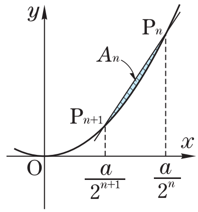


(1)　P_0，P_1 のx座標は，それぞれ a，$\dfrac{a}{2}$ だから，A_0 は右図の斜線部分の面積を表す．

直線 P_0P_1 を　$y=sx+t$　とおくと，

$$A_0=\int_{\frac{a}{2}}^{a}(sx+t-x^2)\,dx$$
$$=-\int_{\frac{a}{2}}^{a}(x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\left(a-\frac{a}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{a^3}{48}}$$

(2)　(1)と同様に直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $y=s'x+t'$ とおくと，



$$A_n=\int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a}{2^n}}(s'x+t'-x^2)\,dx$$
$$=-\int_{\frac{a}{2^{n+1}}}^{\frac{a}{2^n}}\left(x-\frac{a}{2^n}\right)\left(x-\frac{a}{2^{n+1}}\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2^n}-\frac{a}{2^{n+1}}\right)^3=\frac{1}{6\cdot 2^{3n}}\cdot\frac{a^3}{8}=\boldsymbol{\frac{a^3}{6\cdot 8^{n+1}}}$$

(3)　(1)，(2)より，$\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ は，初項 A_0，公比 $\frac{1}{8}$ の無限等比級数を表すので，

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n=\frac{A_0}{1-\frac{1}{8}}=\boldsymbol{\frac{a^3}{42}}$$

48

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2)　$x=-t$ とすると，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ だから

$$与式=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-2t+4}-t+1)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\{\sqrt{t^2-2t+4}-(t-1)\}\{\sqrt{t^2-2t+4}+(t-1)\}}{\sqrt{t^2-2t+4}+(t-1)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{t^2-2t+4}+t-1}=\boldsymbol{0}$$

49

(ｉ)より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^3+bx^2+cx}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left\{(a-2)x+b+\frac{c}{x}\right\}$

これが収束するためには $a-2=0$ でなければならない．

　∴　$a=\boldsymbol{2}$　　このとき，極限値は b　　∴　$b=\boldsymbol{1}$

(ii)より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+cx}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+x+c)=c$　　∴　$c=\boldsymbol{-3}$

(iii)より $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)=0$ だから

$\displaystyle\lim_{x\to-1}(2x^3+x^2-3x+d)=d+2=0$　　∴　$d=\boldsymbol{-2}$

このとき，分子$=(x+1)(2x^2-x-2)$ だから　$e=\boldsymbol{1}$

50

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=0$ より　$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} f(\theta)=0$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{1}{2}\right)^3+b\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\left(\frac{1}{2}\right)+5=0$$

$$\therefore\quad a=8-2b \quad \cdots\cdots ①$$

これを $f(\theta)$ に代入すると

$$f(\theta)=2(4-b)\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5$$
$$=(2\cos\theta-1)\{(4-b)\cos^2\theta+2\cos\theta-5\}$$

$t=\theta-\frac{\pi}{3}$ とおくと，$\theta\to\frac{\pi}{3}$ のとき，$t\to 0$ であり

$$\frac{2\cos\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{3}}=\frac{2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-1}{t}=-\frac{1-\cos t}{t}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sin t}{t}$$

$$=-\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot t-\sqrt{3}\cdot\frac{\sin t}{t} \longrightarrow -\sqrt{3}\ (t\to 0)$$

よって，　$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}\left(3+\frac{b}{4}\right)=3\sqrt{3}$　　$\therefore\quad \boldsymbol{b=0}$

①より　　$\boldsymbol{a=8}$

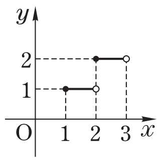
51

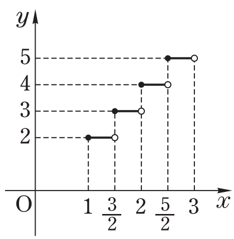
(1)　与式$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n=\lim_{2n\to\infty}\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

(2)　与式$=\lim_{2n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{e^3}}$

52

$y=[x]\ (1\leqq x<3)$，$y=[2x]\ (1\leqq x<3)$ のグラフはそれぞれ右図のようになる．





(1)　$\lim_{x\to 2+0}[x]=2$，$\lim_{x\to 2-0}[x]=1$

$\lim_{x\to 2+0}[2x]=4$，$\lim_{x\to 2-0}[2x]=3$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 2+0}([2x]-[x])=\boldsymbol{2}$$
$$\lim_{x\to 2-0}([2x]-[x])=\boldsymbol{2}$$

(2)　(1)より，$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} f(x)$

よって，$\lim_{x\to 2} f(x)$ は存在する．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}}[x]=1,\quad \lim_{x\to\frac{3}{2}+0}[2x]=3,\quad \lim_{x\to\frac{3}{2}-0}[2x]=2$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}+0}([2x]-[x])=2,\quad \lim_{x\to\frac{3}{2}-0}([2x]-[x])=1$

以上のことより，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}}f(x)$ は存在しない．

53

(1) $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ だから，$0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$ だから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ だから

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x\right)=1$$

よって，$a=\mathbf{1}$

54

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}\infty & (x^2>1)\\ 1 & (x^2=1)\\ 0 & (0\leqq x^2<1)\end{cases}\quad \text{だから}$$

i) $x^2>1$，すなわち，$x<-1$，$1<x$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1-\frac{1}{x}$$

ii) $x^2=1$，すなわち，$x=\pm 1$ のとき

$$f(1)=\frac{1-1+a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$$f(-1)=\frac{1+1+a-b}{2}=\frac{a-b+2}{2}$$

iii) $0\leqq x^2<1$，すなわち，$-1<x<1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$$

$x=\pm 1$ で連続であればよいので，

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=f(1)\\ \displaystyle\lim_{x\to -1+0}f(x)=\lim_{x\to -1-0}f(x)=f(-1)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}0=a+b=\dfrac{a+b}{2}\\ a-b=2=\dfrac{a-b+2}{2}\end{cases}\qquad \therefore\ a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{-1}$$

55

$z_{n+1}=iz_n+i$ ……① に対して，$\alpha=i\alpha+i$ ……② をみたす α を考える．

①−②より　$z_{n+1}-\alpha=i(z_n-\alpha)$

ここで，$\alpha=\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i(1+i)}{2}=\dfrac{-1+i}{2}$ だから

$$z_n-\alpha=(z_1-\alpha)i^{n-1}$$

$$\therefore\quad z_n=\alpha+(1+i-\alpha)i^{n-1}=\boldsymbol{\frac{-1+i}{2}+\frac{3+i}{2}i^{n-1}}$$

56

$z_{n+1}=\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{3}z_n+1$ ……① に対して，$\alpha=\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{3}\alpha+1$ ……② をみたす α を考える．

①−②より，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{3}(z_n-\alpha)$

$$\therefore\quad z_n-\alpha=(z_1-\alpha)\left(\frac{2+\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad z_n=\alpha+\left(\frac{2+\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{n-1}(z_1-\alpha)$$

ここで，$\left|\dfrac{2+\sqrt{3}\,i}{3}\right|=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{3}{9}}=\sqrt{\dfrac{7}{9}}<1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt{3}\,i}{3}\right)^{n-1}=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\alpha$

②より，$\alpha=\dfrac{3}{1-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{3}{4}(1+\sqrt{3}\,i)$ だから

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\boldsymbol{\frac{3}{4}(1+\sqrt{3}\,i)}$$

57

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$

$$=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$$

ここで，

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}=f'(a)$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a)+f'(a)=\boldsymbol{2f'(a)}$$

58

(1) $y'=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$ だから，

$y'=\lim_{h\to 0}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x+h+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(x+h+1)(x+1)}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x+h+1)(x+1)}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{(x+1)^2}}$

59

まず，$f(0)=0$

次に，$\lim_{h\to +0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\dfrac{h\sin h}{h}=\lim_{h\to +0}\sin h=0$

また，$\lim_{h\to -0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\dfrac{-h\sin h}{h}=-\lim_{h\to -0}\sin h=0$

左側極限と右側極限が一致するので

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能.

60

(1) $y'=(x+1)(x+3)+(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)$

$=x^2+4x+3+x^2+2x-3+x^2-1$

$=\boldsymbol{3x^2+6x-1}$

(2) $y=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ より

$y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}$

61

(1) $y=x^2+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}$ より

$$y'=2x+2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}$$
$$=2x+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}$$
$$=\boldsymbol{2x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}}$$

(2) $y'=(2^x)'\cos x+2^x(\cos x)'$
$$=\boldsymbol{2^x\log 2\cdot\cos x-2^x\sin x}$$

(3) $y=\log_2\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\log_2|x-1|-\log_2|x+1|$

$$\therefore\quad y'=\frac{1}{(x-1)\log 2}-\frac{1}{(x+1)\log 2}=\boldsymbol{\frac{2}{(x^2-1)\log 2}}$$

62

(1) $y'=\dfrac{1}{3x\log 3}\cdot(3x)'=\boldsymbol{\dfrac{1}{x\log 3}}$

(2) $y'=\dfrac{1}{(x^2-4)\log 2}\cdot(x^2-4)'=\boldsymbol{\dfrac{2x}{(x^2-4)\log 2}}$

(3) $y'=3(x^3+2x)^2\cdot(x^3+2x)'=\boldsymbol{3(x^3+2x)^2(3x^2+2)}$

(4) $y'=3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=\boldsymbol{3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

(5) $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=\boldsymbol{-\sin(\sin x)\cdot\cos x}$

(6) $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\boldsymbol{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}\quad(\boldsymbol{=-\tan x})$

(7) $y'=2\cdot\dfrac{x}{x^2-1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)'=\dfrac{2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$
$$=\boldsymbol{-\frac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^3}}$$

63

(1) $y=x^{\sqrt{x}}$ の両辺の自然対数をとると，　$\log y=\sqrt{x}\log x$
両辺をxで微分すると，
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\log x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$\therefore\quad y'=\boldsymbol{\frac{x^{\sqrt{x}}(\log x+2)}{2\sqrt{x}}}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると，
$$\log|y|=\log|x+1|+\log|x+2|+\log|x+3|$$
両辺を x で微分して，
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$
$$\therefore\quad y'=\frac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot y=\boldsymbol{3x^2+12x+11}$$

64

(1)　$\dfrac{dx}{dy}=2y-2$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y-1)}$

ここで，$y^2-2y-x=0$ より

$$y=1+\sqrt{1+x}\quad (y>1 \text{ より})$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$

(2)　$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ より $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$

また，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=-\dfrac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2(t^2-1)}{-4t}=\boldsymbol{\frac{t^2-1}{2t}}$$

次に，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dt}{dx}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t^2-1}{2t}\right)$

$$=-\frac{(1+t^2)^2}{4t}\cdot\frac{2t\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2}{4t^2}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{(1+t^2)^3}{8t^3}}$$

65

$x^2-2xy+2y^2=1$ の両辺を x で微分すると，

$$2x-2(y+xy')+4y\cdot y'=0 \iff (x-2y)y'=x-y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y'=\boldsymbol{\frac{x-y}{x-2y}}$$

次に，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-y}{x-2y}\right)$

$$=\frac{(x-y)'(x-2y)-(x-y)(x-2y)'}{(x-2y)^2}$$

$$=\frac{(1-y')(x-2y)-(x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}=\frac{xy'-y}{(x-2y)^2}$$

$$=\frac{\frac{x^2-xy}{x-2y}-y}{(x-2y)^2}=\frac{x^2-2xy+2y^2}{(x-2y)^3}=\boldsymbol{\frac{1}{(x-2y)^3}}$$

66

(1)　接点を T$(t,\ \log t)$ とおくと，T における接線は $y'=\dfrac{1}{x}$ より

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad \cdots\cdots①$$

これが点 (0, 2) を通るので,

$$2-\log t=\frac{1}{t}(0-t)$$

$$\log t=3 \qquad \therefore \quad t=e^3$$

これを①へ代入して

$$y-\log e^3=\frac{1}{e^3}(x-e^3)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{e^3}x+2}$$

(2) $y'=\dfrac{1}{x}$ より法線の傾きは $-x$

よって, 点 $(2,\ \log 2)$ における法線の方程式は,

$$y-\log 2=-2(x-2)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=-2x+4+\log 2}$$

67

①と l, ②と l の接点をそれぞれ,

$$\mathrm{P}(p,\ -e^{-p}),\ \mathrm{Q}(q,\ e^{aq})$$

とおくと, P における接線は, $y'=e^{-x}$ より

$$y+e^{-p}=e^{-p}(x-p)$$

すなわち, $y=e^{-p}x-e^{-p}(p+1)$ ……③

次に, Q における接線は, $y'=ae^{ax}$ より

$$y-e^{aq}=ae^{aq}(x-q)$$

すなわち, $y=ae^{aq}x-e^{aq}(aq-1)$ ……④

③, ④は, 一致するので

$$\begin{cases} e^{-p}=ae^{aq} & \cdots\cdots ⑤ \\ e^{-p}(p+1)=e^{aq}(aq-1) & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑥の両辺に a をかけて, $ae^{-p}(p+1)=ae^{aq}(aq-1)$

⑤より $ae^{-p}(p+1)=e^{-p}(aq-1)$

$e^{-p}\neq 0$ だから, $a(p+1)=aq-1$

$$\therefore \quad aq=a(p+1)+1$$

⑤に代入して, $e^{-p}=ae^{a(p+1)+1} \iff ae^{(a+1)(p+1)}=1$

両辺の自然対数をとると, $(a+1)(p+1)=-\log a$

$$\therefore \quad p=\boldsymbol{-1-\frac{\log a}{a+1}}$$

68

(1) $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=\boldsymbol{e^x(\sin x+\cos x)}$

(2) 関数 $f(x)$ の区間 $[\alpha,\ \beta]$ に平均値の定理を適用すると,

$$e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha=e^{c}(\sin c+\cos c)(\beta-\alpha) \quad (\alpha<c<\beta)$$

をみたす c が存在する.

$$\therefore\quad |e^{\beta}\sin\beta - e^{\alpha}\sin\alpha| = e^{c}|\sin c + \cos c||\beta-\alpha|$$

ここで，　$e^{c} < e^{\beta}$

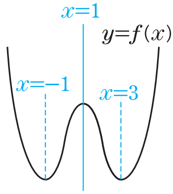
また，　$|\sin c + \cos c| = \sqrt{2}\left|\sin\left(c+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leqq \sqrt{2}$

$\beta-\alpha>0$ だから

$$|e^{\beta}\sin\beta - e^{\alpha}\sin\alpha| < \sqrt{2}(\beta-\alpha)e^{\beta}$$

69

(i)より，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=1$ に関して対称．
(iii)より，$x=3$ で極小値をもつので，$x=1$ で極大値となる．よって x^4 の係数は正で，グラフの概形は右図．



$$\therefore\quad f'(x) = 4a(x+1)(x-1)(x-3)$$
$$= 4a(x^3-3x^2-x+3)$$
$$\therefore\quad f(x) = \int f'(x)\,dx = ax^4-4ax^3-2ax^2+12ax+e$$

$f(1)=4$，$f(3)=-4$ より

$$\begin{cases} 7a+e=4 \\ -9a+e=-4 \end{cases}$$

よって，　$a=\dfrac{1}{2}$，$e=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{1}{2}x^4-2x^3-x^2+6x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=-2,\ c=-1,\ d=6,\ e=\frac{1}{2}}$$

70

(1)　$\sin\theta=u$ $(-1<u<1)$ とおくと，

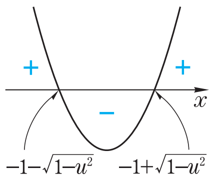
$$f(x) = \frac{x^2+(2u+1)x-u^2+2u+1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2u+1)(x+1)-\{x^2+(2u+1)x-u^2+2u+1\}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+u^2}{(x+1)^2} = \boldsymbol{\frac{x^2+2x+\sin^2\theta}{(x+1)^2}}$$

(2)　$f'(x)=0$ より $x^2+2x+u^2=0$

$$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{1-u^2}$$



右図より，$x=-1+\sqrt{1-u^2}$ で極小となり，極小値は，

$$f(-1+\sqrt{1-u^2})$$

分母 $=\sqrt{1-u^2}$

分子 $=(\sqrt{1-u^2}-1)^2+(2u+1)(\sqrt{1-u^2}-1)-u^2+2u+1$

$=1-u^2-2\sqrt{1-u^2}+1+(2u+1)\sqrt{1-u^2}-u^2$

$=\sqrt{1-u^2}(2\sqrt{1-u^2}-1+2u)$

$\therefore\quad 2\sqrt{1-u^2}-1+2u=-1 \iff \sqrt{1-u^2}=-u$

左辺$\geqq 0$ だから，$u\leqq 0$ で，このとき，両辺を平方して

$$1-u^2=u^2 \qquad \therefore\quad u=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\theta=\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}}$

71

(1)　$f(x)=x(x-1)^3$

$f'(x)=(x-1)^3+x\cdot 3(x-1)^2$

$=(x-1)^2(4x-1)$

よって，増減は右表のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{27}{256}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，　**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{27}{256}}$ $\left(x=\dfrac{1}{4}\ \text{のとき}\right)$

(2)　$f''(x)=2(x-1)(4x-1)+(x-1)^2\cdot 4$

$=6(x-1)(2x-1)$

よって，凹凸は右表のようになり，

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$-\frac{1}{16}$	$\cap$	0	$\cup$

変曲点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{16}\right)}$ **と** $\boldsymbol{(1,\ 0)}$

72

(1)　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ より　$\theta=\boldsymbol{\pm\dfrac{\pi}{3}}$

(2)　$g(x)=x-\sin 2x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$f(x)=a\cdot g(x)$

$g'(x)=1-2\cos 2x=0$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より　$x=\pm\dfrac{\pi}{6}$

よって，増減は表のようになる．

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

また，$g(-x)=-g(x)$ であり，

$-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}<\dfrac{4\pi-\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ だから

$a>0$ より，$f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a}{2} \qquad \therefore\quad \frac{\pi a}{2}=\pi \qquad \therefore\quad a=\mathbf{2}$$

(3)　$g(-x)=-g(x)$ だから，$a<0$ より

最大値は　$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi a}{2}$

$\therefore\quad -\dfrac{\pi a}{2}=\pi \qquad \therefore\quad a=\mathbf{-2}$

73

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$-e$	↗

$f(x)=x\log x-2x$

$f'(x)=\log x+1-2$

$\quad=\log x-1$

$f'(x)=0$ より $x=e$

よって，増減は表のようになり，**最小値は，$-e$**

74

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a(1-\log a)$	↗

$f(x)=e^x-ax$，$f'(x)=e^x-a$

$a>0$ だから，$f'(x)=0$ より

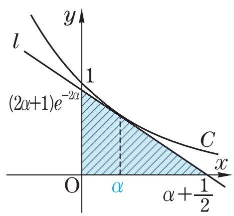
$e^x=a$

$\therefore\quad x=\log a$

右の増減表より

最小値は　$a(1-\log a)$

75



$f(x)=e^{-2x}$

$f'(x)=-2e^{-2x}$

(1)　$l:y-e^{-2\alpha}=-2e^{-2\alpha}(x-\alpha)$

$\iff \boldsymbol{y=-2e^{-2\alpha}x+(2\alpha+1)e^{-2\alpha}}$

(2)　$S(\alpha)=\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)(2\alpha+1)e^{-2\alpha}$

$=\boldsymbol{\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2e^{-2\alpha}}$

(3)　$S'(\alpha)=2\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)e^{-2\alpha}-2\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2e^{-2\alpha}$

$=2\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)e^{-2\alpha}\left(1-\alpha-\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)e^{-2\alpha}\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)$

$S'(\alpha)=0$ $(\alpha>0)$ より $\alpha=\dfrac{1}{2}$

このαの前後で，$S'(\alpha)$ の符号は，$+$ から $-$ に変化するので，$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{1}{2}}$ で，極大かつ最大．

よって，**最大値は，**$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

76

(1)　$t^2=1-2\sin x\cos x$ だから

$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$

$\therefore\quad f(x)=t\times\dfrac{2}{5-t^2}=\boldsymbol{\dfrac{2t}{5-t^2}}$　$(=g(t)$ とおく$)$

(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$g'(t)=\frac{2(5-t^2)-2t(-2t)}{(5-t^2)^2}=\frac{2(5+t^2)}{(5-t^2)^2}>0$$

よって，$g(t)$ は単調増加.

ゆえに，　**最大値は** $g(\sqrt{2})=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$，**最小値は** $g(-\sqrt{2})=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

77

$y=x-1+\dfrac{1}{x+3}$ より，

漸近線は，$\boldsymbol{x=-3}$，$\boldsymbol{y=x-1}$

また，$y'=1-\dfrac{1}{(x+3)^2}$ だから，

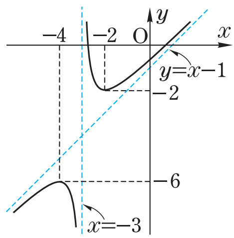
$y'=0$ より

$(x+3)^2=1 \iff x+3=\pm 1 \iff x=-4,\ -2$

よって，増減は表のようになる.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-6	$\searrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$

極大値　-6（$x=-4$ のとき）
極小値　-2（$x=-2$ のとき）
グラフは右図.



78

$y=e^x x^{-2}$ より

$$y'=e^x(x^{-2}-2x^{-3})=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

ゆえに，$y'=0$ より　$x=2$
よって，増減は表のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	$\dfrac{e^2}{4}$	$\nearrow$

ゆえに，**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{e^2}{4}}$ $(x=2$ のとき$)$

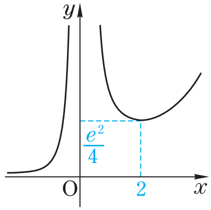
ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{(-t)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2e^t}=0$

$(x=-t$ とおいた$)$

以上のことより，グラフは右図.



79

$y=x\log x$ より　$y'=\log x+1$

$y'=0$ より　　$\log x=-1$　　$\therefore\ x=\dfrac{1}{e}$

よって，増減は表のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

ゆえに，

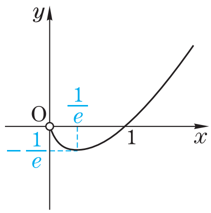
$$\textbf{極小値}\ -\frac{1}{e}\quad\left(x=\frac{1}{e}\ \text{のとき}\right)$$

また，$y''=\dfrac{1}{x}>0$ より，**下に凸で，変曲点はなし.**

次に，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ で $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=\lim_{x\to+0}x\log\frac{1}{x}$$
$$=-\lim_{x\to+0}x\log x=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to+0}x\log x=0$$

よって，グラフは右図.



80

$x=0$ は，$2x^3-3ax^2+8=0$ の解ではないので

$x\neq0$ として考えると，　$\dfrac{2x^3+8}{3x^2}=a$

ここで，$f(x)=\dfrac{2x^3+8}{3x^2}$　$(0<x\leqq3)$ とおくと

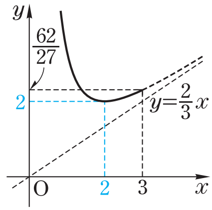
$$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3x^2}$$

ゆえに，漸近線は，$y=\dfrac{2}{3}x$ と $x=0$

$f'(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{16}{3x^3}=0$ より　$x=2$

よって，増減は表のようになり，

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	$\frac{62}{27}$



グラフは右図.

　このグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつので，$\boldsymbol{a \geqq 2}$

81

(1)　$f(x)=\sqrt{x}-\log x$　$(x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

　$f'(x)=0$ より，$x=4$ だから，増減は表のようになる.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\searrow$	$2-2\log 2$	$\nearrow$

　ここで，$2-2\log 2=2(1-\log 2)$ において

$\log 2<\log e=1$ より，$1-\log 2>0$ だから $2-2\log 2>0$

よって，$f(x)>0$，すなわち，$\sqrt{x}>\log x$

(2)　$x\to\infty$ だから，$x>1$ として考えてよい.

　このとき，(1)より，$\sqrt{x}>\log x$ だから，$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

82

$\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{3}\,t$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ だから，$\dfrac{dy}{dt}=0$，$\dfrac{dx}{dt}\neq 0$　　$\therefore$　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1,\ \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

83

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}})dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{4}-\frac{3}{7}=\mathbf{\frac{9}{28}}$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(\cos x-\sin x)dx=\Big[\sin x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}$

$\displaystyle=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-\sqrt{3}-1}$

(3) $\displaystyle 3\int_1^2 3^x\,dx=3\left[\frac{3^x}{\log 3}\right]_1^2=\frac{3(9-3)}{\log 3}=\mathbf{\frac{18}{\log 3}}$

(4) $\displaystyle\frac{1}{e}\int_0^1 e^x\,dx=\frac{1}{e}\Big[e^x\Big]_0^1=\mathbf{\frac{e-1}{e}}$

84

$\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$ で，$\sin x=t$ とおくと

$\displaystyle\frac{dt}{dx}=\cos x$ だから，　$dt=\cos x\,dx$

$\displaystyle\therefore$　与式$\displaystyle=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\mathbf{\log|\sin x|+C}$ **（C は積分定数）**

85

$\displaystyle\int\log(x+1)dx=\int(x+1)'\log(x+1)dx$

$\displaystyle=(x+1)\log(x+1)-\int dx$

$=\mathbf{(x+1)\log(x+1)-x+C}$ **（Cは積分定数）**

86

(1) $\displaystyle\int_1^2(2x-1)^4dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-1)^5\right]_1^2=\frac{1}{10}(3^5-1^5)=\mathbf{\frac{121}{5}}$

(2) $\displaystyle\int_0^4(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{1}{3}(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})=\mathbf{\frac{26}{3}}$

(3) $\displaystyle\int_e^{2e}\frac{dx}{3x-1}=\left[\frac{1}{3}\log(3x-1)\right]_e^{2e}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\{\log(6e-1)-\log(3e-1)\}=\mathbf{\frac{1}{3}\log\frac{6e-1}{3e-1}}$

87

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2(x^4+2x^2+1)\,dx$

$\displaystyle=2\int_0^1(x^6+2x^4+x^2)dx=2\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{184}{105}}$

(2)　$\sqrt{2x+1}=t$ とおくと，$x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$

$x:1\to 2$ のとき，$t:\sqrt{3}\to\sqrt{5}$

また，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{t}$ より $dx=t\,dt$

$\therefore$　与式$=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2+1}{2t}\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}(t^2+1)\,dt$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{5}}{3}-\sqrt{3}}$$

88

(1)　$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 4x+\sin 2x)\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\mathbf{0}$$

(2)　$\displaystyle\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+3\cos x)\,dx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

89

$$\frac{ax+b}{x^2-2x+3}+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2-2x+3)}{(x^2-2x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{(a+c)x^2+(b-a-2c)x+3c-b}{(x^2-2x+3)(x-1)}$$

分子が，x^2-2x-1 と一致するとき，

$$\begin{cases}a+c=1\\ b-a-2c=-2\\ 3c-b=-1\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}a=2\\ b=-2\\ c=-1\end{cases}$$

$$\therefore\quad\int_2^3\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\int_2^3\left\{\frac{(x^2-2x+3)'}{x^2-2x+3}-\frac{1}{x-1}\right\}dx$$
$$=\Big[\log(x^2-2x+3)-\log(x-1)\Big]_2^3=\left[\log\frac{x^2-2x+3}{x-1}\right]_2^3$$
$$=\log 3-\log 3=\mathbf{0}$$

90

(1)　$x=a\tan\theta$ とおくと

$x:0\to a$ のとき，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$

また，$x^2+a^2=a^2(1+\tan^2\theta)=\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$

次に，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{a}{\cos^2\theta}$ より　$dx=\dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\therefore\quad 与式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{a^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4a}}$$

(2)　$x=\sin\theta$ とおくと

$x:\dfrac{1}{2}\to 1$ のとき，$\theta:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{2}$

また，$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$

次に，$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ より　$dx=\cos\theta\cdot d\theta$

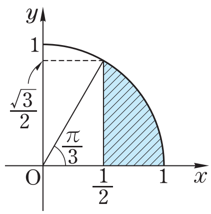
$$\therefore\quad 与式=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

(別解)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は右図の斜線部分の面積を表すので，

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$



91

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\cdot\sin x\,dx$$

$\cos x=t$ とおくと，$x:0\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$t:1\to\dfrac{1}{2}$

また，$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ より　$-dt=\sin x\,dx$

$$\therefore\quad 与式=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-t^2}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t}-t\right)dt=\left[\log t-\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\left(\log\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\boldsymbol{\log 2-\frac{3}{8}}$$

92

$$\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int_0^1\frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx$$

$$=-\Big[\log(e^{-x}+1)\Big]_0^1=\log 2-\log(1+e^{-1})$$

$$=\log\frac{2}{1+e^{-1}}=\boldsymbol{\log\frac{2e}{e+1}}$$

(別解) $1+e^x=t$ とおくと，$x:0\to1$ のとき，$t:2\to1+e$

また，$\dfrac{dt}{dx}=e^x=t-1$ より　$dx=\dfrac{1}{t-1}dt$

$$\therefore\quad \int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_2^{1+e}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}dt=\int_2^{1+e}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\Big[\log|t-1|-\log|t|\Big]_2^{1+e}=\left[\log\left|\frac{t-1}{t}\right|\right]_2^{1+e}$$
$$=\log\frac{e}{1+e}-\log\frac{1}{2}=\log\frac{2e}{1+e}$$

93

$1+x^2=t$ とおくと，$x:0\to1$ のとき，$t:1\to2$

また，$\dfrac{dt}{dx}=2x$ より $\dfrac{1}{2}dt=x\,dx$

$$\therefore\quad 与式=\int_1^2\frac{\log t}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_1^2(\log t)'\log t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}(\log t)^2\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\log 2)^2}$$

94

$x=2\sin\theta$ とおくと，$x:0\to2$ のとき，$\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$

また，$\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2|\cos\theta|=2\cos\theta$

次に，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$　$\therefore$　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

よって，$\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cdot2\cos\theta\cdot2\cos\theta\,d\theta$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=-\frac{8}{3}\Big[\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

95

$$\begin{cases}(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x & \cdots\cdots① \\ (e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①＋②より　$-2e^{-x}\sin x=(e^{-x}\sin x)'+(e^{-x}\cos x)'$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}$$

96

(1) $f(a)=\int_1^a (x^2-2x)(-e^{-x})'dx$

$=\left[-(x^2-2x)e^{-x}\right]_1^a+2\int_1^a (x-1)e^{-x}dx$

$=-(a^2-2a)e^{-a}-e^{-1}+2\int_1^a (x-1)(-e^{-x})'dx$

$=-(a^2-2a)e^{-a}-e^{-1}-2\left[(x-1)e^{-x}\right]_1^a+2\int_1^a e^{-x}dx$

$=-(a^2-2a)e^{-a}-e^{-1}-2(a-1)e^{-a}-2\left[e^{-x}\right]_1^a$

$=\boldsymbol{-a^2e^{-a}+e^{-1}}$

（別解）（参考 I の公式を使えば，次のようになります.）

$$\int_1^a (x^2-2x)e^{-x}dx=-\left[\{(x^2-2x)+(2x-2)+2\}e^{-x}\right]_1^a$$
$$=-\left[x^2e^{-x}\right]_1^a$$
$$=-a^2e^{-a}+e^{-1}$$

(2) $f'(a)=(a^2-2a)e^{-a}$ $(a>1)$ だから，

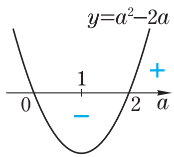
$f'(a)=0$ のとき $e^{-a}>0$ より $a=2$

右のグラフより，$a=2$ の前後で，

$f'(a)$ の符号は $-$ から $+$ に変わるので，

$a=2$ で，極小かつ最小となり

最小値は，$\boldsymbol{-4e^{-2}+e^{-1}}$



97

$$\int_1^2 x^{-2}(\log x)^2dx=\int_1^2(-x^{-1})'(\log x)^2dx$$
$$=-\left[\frac{(\log x)^2}{x}\right]_1^2+\int_1^2 x^{-1}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=-\frac{(\log 2)^2}{2}+2\int_1^2 x^{-2}\log x\,dx$$
$$=-\frac{(\log 2)^2}{2}+2\int_1^2(-x^{-1})'\log x\,dx$$
$$=-\frac{(\log 2)^2}{2}-2\left[\frac{\log x}{x}\right]_1^2+2\int_1^2 x^{-2}dx$$
$$=-\frac{(\log 2)^2}{2}-\frac{2\log 2}{2}-2\left[\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{-(\log 2)^2-2\log 2+2}{2}}$$

98

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cdot(\sin x)'\,dx$$

$$=\Big[\cos^{n-1}x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\sin x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\therefore\quad nI_n=(n-1)I_{n-2}$$

よって，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geqq 3)$

99

$$I_{n+1}=\int_0^1 e^{-x}x^{n+1}dx=\int_0^1 x^{n+1}(-e^{-x})'\,dx$$

$$=\Big[-x^{n+1}e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1(n+1)x^n e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+(n+1)\int_0^1 e^{-x}x^n dx$$

よって，$\boldsymbol{I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n}\quad(\boldsymbol{n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots})$

100

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=a$ とおくと

$$f'(x)=xe^x-2a$$

$$\therefore\quad f(x)=\int(xe^x-2a)\,dx=(x-1)e^x-2ax+C$$

$f(0)=0$ より　　$-1+C=0$　　$\therefore\quad C=1$

よって，　$\displaystyle a=\int_0^1\{(x-1)e^x-2ax+1\}\,dx$

$$=\Big[(x-2)e^x-ax^2+x\Big]_0^1=-e-a+3$$

$$\therefore\quad 2a=3-e$$

ゆえに，　$f(x)=\boldsymbol{(x-1)e^x+(e-3)x+1}$

101

$$f(x)=\int_0^x(x-t)\sin^2 t\,dt=x\int_0^x\sin^2 t\,dt-\int_0^x t\sin^2 t\,dt$$

$$\therefore\quad f'(x)=\int_0^x\sin^2 t\,dt+x\sin^2 x-x\sin^2 x=\int_0^x\sin^2 t\,dt$$

よって，$f''(x)=\boldsymbol{\sin^2 x}$

102

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$\tan x \leqq 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\tan x \geqq 0$ だから，

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x|\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$$

ここで，

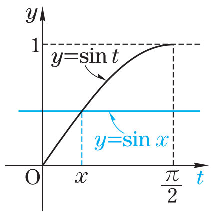
$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$$

だから，与式$=\Big[\log|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \Big[\log|\cos x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \left(0 - \log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\log\frac{1}{2} - 0\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}\log 2}$$

103



関数 $y=\sin t$ と直線 $y=\sin x$ のグラフは，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より右図のようになる．よって，

$0 \leqq t \leqq x$ のとき，$\sin t \leqq \sin x$

$x \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin t \geqq \sin x$

$$\therefore \quad f(x) = \int_0^x (\sin x - \sin t)\,dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin t)\,dt$$

$$= \Big[t\sin x + \cos t\Big]_0^x - \Big[t\sin x + \cos t\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2(x\sin x + \cos x) - 1 - \frac{\pi}{2}\sin x$$

$$= \boldsymbol{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\sin x + 2\cos x - 1}$$

104

(1) 接点を $(t,\ t^3-3t)$ とおくと，$f'(x)=3x^2-3$ より

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t) \qquad \therefore \quad y=(3t^2-3)x-2t^3$$

この直線上に $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ があるので，$-2t^3=\dfrac{1}{4}$

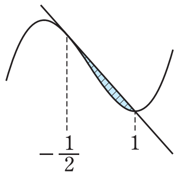
t は実数だから，$t=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，求める接線は　$y=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{4}$

(2)　$x^3-3x=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{4}$

$\iff 4x^3-3x-1=0$

$\iff (2x+1)^2(x-1)=0$　　$\therefore$　$x=-\dfrac{1}{2},\ 1$



よって，接点以外の交点の x 座標は 1 で，求める面積は図の斜線部．

$$\therefore\quad S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(x^3-3x)\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-1)\,dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^3}{2^6}(4-3)=\boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

105

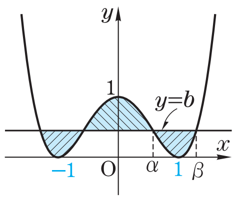
(1)　$y=x^4-2x^2+a$ は y 軸対称だから，接点の x 座標は $-t,\ t\ (t>0)$ とおける．

$\therefore\quad x^4-2x^2+a=(x+t)^2(x-t)^2$

$\iff x^4-2x^2+a=x^4-2t^2x^2+t^4$

これは，x についての恒等式だから

$t^2=1,\ a=t^4$　　$\therefore$　$a=\mathbf{1}$



(2)　曲線と直線 $y=b$ の交点のうち，第 1 象限にあるものの x 座標を $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とおくと，曲線が y 軸対称であることより

$$\int_0^{\alpha}(x^4-2x^2+1-b)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^4-2x^2+1-b)\,dx$$

$\iff \displaystyle\int_0^{\beta}(x^4-2x^2+1-b)\,dx=0 \iff \frac{1}{5}\beta^5-\frac{2}{3}\beta^3+(1-b)\beta=0$

$\iff 3\beta^5-10\beta^3+15(1-b)\beta=0$

ここで，$\beta^4-2\beta^2+1-b=0$ より

$3\beta^5-10\beta^3+15\beta(2\beta^2-\beta^4)=0 \iff 4\beta^3(5-3\beta^2)=0$

$\beta\neq 0$ だから，$\beta^2=\dfrac{5}{3}$

よって，$b=\beta^4-2\beta^2+1=\dfrac{25}{9}-\dfrac{10}{3}+1=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

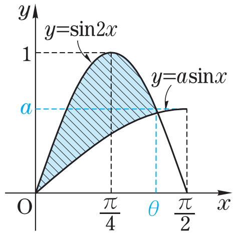
106

(1) $a\sin x=\sin 2x \iff 2\sin x\cos x-a\sin x=0$

$\iff \sin x(2\cos x-a)=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x>0$ だから，$\cos x=\dfrac{a}{2}$

$0<\cos x<1$ より　$0<\dfrac{a}{2}<1$　　$\therefore$　$\boldsymbol{0<a<2}$



(2) $\cos\theta=\dfrac{a}{2}$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

図形 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\therefore\quad \int_0^{\theta}(\sin 2x-a\sin x)dx=\frac{1}{2}$$

左辺$=\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2x+a\cos x\right]_0^{\theta}=-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+a\cos\theta+\dfrac{1}{2}-a$

ここで，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{a^2}{2}-1$ だから，

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}-1\right)+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}-a=\frac{1}{2} \iff \frac{a^2}{4}-a+\frac{1}{2}=0$$

$$\iff a^2-4a+2=0$$

$0<a<2$ より　$a=\boldsymbol{2-\sqrt{2}}$

107

(1) $y=\sin^2 x$ より　$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$\therefore$　$\sin 2x=1$　$(0\leqq 2x\leqq 2\pi)$

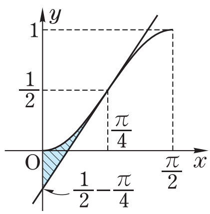
よって，$2x=\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$　$x=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，接点は $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となり，接線は

$y-\dfrac{1}{2}=1\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　$\therefore$　$\boldsymbol{y=x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}}$

(2) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ だから，

求める面積は図の斜線部．



$$\therefore\quad S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x-x-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi^2}{16}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}}$$

108

(1) $f(x)=e^x+e^{1-x}$ より $f'(x)=e^x-e^{1-x}$

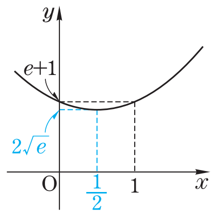
$f'(x)=0$ より $e^x-e^{1-x}=0 \iff (e^x)^2=e$

ゆえに，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，増減は右表．

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{e}$	$\nearrow$

次に，$f''(x)=e^x+e^{1-x}>0$ より，グラフは下に凸．

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ より，概形は右図．



(2) 2つのグラフが y 軸上で交わるとき，

$$g(0)=e+1$$

$$\therefore\quad -2+k=e+1 \iff \boldsymbol{k=e+3}$$

(3) $f(x)=g(x)$

$\iff e^x+e^{1-x}=-(e^x+e^{-x})+e+3$

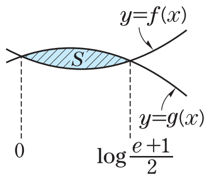
$\iff (e^x)^2+e=-(e^x)^2-1+(e+3)e^x$

$\iff 2(e^x)^2-(e+3)e^x+e+1=0$

$\iff (e^x-1)\{2e^x-(e+1)\}=0$

$\therefore\quad x=0,\ \log\dfrac{e+1}{2}$ （$=\alpha$ とおく）

右図より



$$S=\int_0^{\alpha}\{-(e^x+e^{-x})+e+3-e^x-e^{1-x}\}dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}\{2e^x+e^{-x}+e^{1-x}-(e+3)\}dx$$

$$=-\left[2e^x-e^{-x}-e^{1-x}-(e+3)x\right]_0^{\alpha}$$

$$=1-e-\{2e^{\alpha}-e^{-\alpha}-e^{1-\alpha}-(e+3)\alpha\}$$

ここで，$e^{\alpha}=\dfrac{e+1}{2}$，$e^{-\alpha}=\dfrac{2}{e+1}$，$e^{1-\alpha}=\dfrac{2e}{e+1}$ だから，

$$S=1-e-\left\{e+1-\frac{2}{e+1}-\frac{2e}{e+1}-(e+3)\log\frac{e+1}{2}\right\}$$

$$=\boldsymbol{-2e+2+(e+3)\log\frac{e+1}{2}}$$

109

$$f(x)=\frac{\log x^2}{x}=\frac{2\log x}{x}$$

(1) $f'(x)=2\cdot\dfrac{1-\log x}{x^2}=0$ より

$1-\log x=0 \qquad \therefore \quad x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘

増減表より，**最大値は $\dfrac{2}{e}$**

(2) $f''(x)=2\cdot\dfrac{2\log x-3}{x^3}=0$ より $\log x=\dfrac{3}{2}$

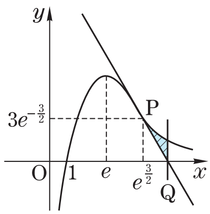
ゆえに，$x=e^{\frac{3}{2}}$ より $\mathrm{P}(e^{\frac{3}{2}},\ 3e^{-\frac{3}{2}})$

$f'(e^{\frac{3}{2}})=-e^{-3}$ より，P における接線は

$y-3e^{-\frac{3}{2}}=-e^{-3}(x-e^{\frac{3}{2}}) \iff y=-e^{-3}x+4e^{-\frac{3}{2}}$

$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るので，

$0=-e^{-3}q+4e^{-\frac{3}{2}} \qquad \therefore \quad q=\boldsymbol{4e^{\frac{3}{2}}}$



(3) $e^{\frac{3}{2}}=\alpha$ とおくと

$$S=\int_{\alpha}^{4\alpha}\frac{2\log x}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot 3\alpha\cdot\frac{3}{\alpha}$$

$$=2\int_{\alpha}^{4\alpha}(\log x)'\log x\,dx-\frac{9}{2}$$

$$=\Big[(\log x)^2\Big]_{\alpha}^{4\alpha}-\frac{9}{2}=(\log 4\alpha)^2-(\log\alpha)^2-\frac{9}{2}$$

$$=(\log 4+\log\alpha)^2-(\log\alpha)^2-\frac{9}{2}$$

$$=(\log 4)^2+2\log 4\cdot\log\alpha-\frac{9}{2}$$

$$=\boldsymbol{4(\log 2)^2+6\log 2-\frac{9}{2}}$$

110

(1) P の x 座標を t とすると，

$$\begin{cases} 2\cos t=k-\sin 2t & \cdots\cdots①\\ -2\sin t=-2\cos 2t & \cdots\cdots② \end{cases}$$

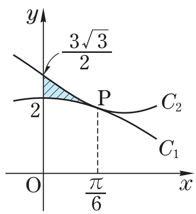
②より $2\sin^2 t+\sin t-1=0$

$\iff (\sin t+1)(2\sin t-1)=0$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq\sin t\leqq 1$ よって

$\sin t+1\neq 0 \qquad \therefore \quad \sin t=\dfrac{1}{2}$，すなわち，$t=\dfrac{\pi}{6}$

よって，**P の x 座標は，$\dfrac{\pi}{6}$**



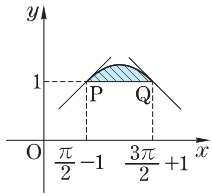
①より $k=2\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin 2x-2\cos x\right)dx$

$$=\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\,\pi-5}{4}}$$

111



$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad (0<t<2\pi)$$

(1) $\dfrac{dy}{dx}=1$ より

$$\sin t=1-\cos t \iff \sin t+\cos t=1$$
$$\iff \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\dfrac{\pi}{4}<t+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9\pi}{4}$ より $t+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$ $\quad\therefore\quad t=\dfrac{\pi}{2}$

よって，**P の $\boldsymbol{x}$ 座標は，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}-1}$**

$\dfrac{dy}{dx}=-1$ より $\sin t=\cos t-1$ $\quad\therefore\quad \sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\dfrac{\pi}{4}<t-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}$ より $t-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$ $\quad\therefore\quad t=\dfrac{3\pi}{2}$

よって，**Q の $\boldsymbol{x}$ 座標は，$\boldsymbol{\dfrac{3\pi}{2}+1}$**

(2) $S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3\pi}{2}+1}y\,dx-\left\{\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}\cdot 1=\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3\pi}{2}+1}y\,dx-(\pi+2)$

ここで，$y=1-\cos t$ と置換すると(1)より

$x:\dfrac{\pi}{2}-1\to\dfrac{3\pi}{2}+1$ のとき，$t:\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{3\pi}{2}$

また，$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$ より $dx=(1-\cos t)dt$

$$\therefore\quad \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3\pi}{2}+1}y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos t)^2dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}+4$$

よって，$S=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+2}$

112

(1)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(s,\ e^s)$ における接線は，$y'=e^x$ より

$$y-e^s=e^s(x-s) \qquad \therefore \quad y=e^s x+e^s(1-s)$$

C_2 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ e^{2t})$ における接線は，$y'=2e^{2x}$ より

$$y-e^{2t}=2e^{2t}(x-t) \qquad \therefore \quad y=2e^{2t}x+e^{2t}(1-2t)$$

この 2 つの接線は一致するので

$$\begin{cases} e^s=2e^{2t} & \cdots\cdots① \\ e^s(1-s)=e^{2t}(1-2t) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して

$$2e^{2t}(1-s)=e^{2t}(1-2t),\ 2(1-s)=1-2t$$

$$\therefore \quad 2t=2s-1$$

①に代入して，$e^s=2e^{2s-1}$

両辺の対数をとると

$$s=\log 2e^{2s-1}$$

$$\therefore \quad s=\log 2+(2s-1)$$

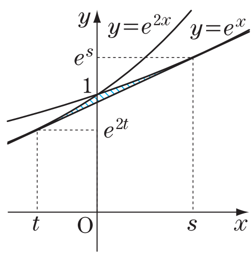
よって，$s=\boldsymbol{1-\log 2}$，$t=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\log 2}$

(2)　$S=\displaystyle\int_t^0 e^{2x}dx+\int_0^s e^x dx-\frac{1}{2}(s-t)(e^s+e^{2t})$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^{2x}\Big]_t^0+\Big[e^x\Big]_0^s-\frac{1}{4}(e^s+e^{2t})$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{2t})+(e^s-1)-\frac{1}{4}(e^s+e^{2t})$$

$$=\frac{3}{4}e^s-\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{2}$$



ここで，$e^s=e^{1-\log 2}=e^1\cdot e^{\log\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}e$

$$e^{2t}=e^{1-2\log 2}=e^1\cdot e^{\log\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}e$$

よって，$S=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}e-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}e-\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}e-\dfrac{1}{2}}$

113

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n^2+nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+2nk}{n^2+nk+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2\left(\dfrac{k}{n}\right)}{1+\dfrac{k}{n}+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$
$$=\Big[\log(x^2+x+1)\Big]_0^1$$
$$=\mathbf{\log 3}$$

114

(1) $y=e^x$ は単調増加だから，$e^0 \leqq e^x \leqq e^1$

$$\therefore\quad 1 \leqq e^x \leqq e$$

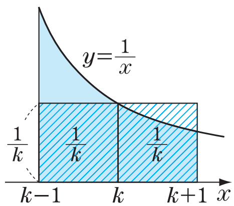
(2) (1)より，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$x^{2n-1} \leqq x^{2n-1}e^x \leqq e\cdot x^{2n-1}$$
$$\therefore\quad \int_0^1 x^{2n-1}dx \leqq \int_0^1 x^{2n-1}e^x dx \leqq e\int_0^1 x^{2n-1}dx$$
$$\Longleftrightarrow\ \left[\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 \leqq a_n \leqq e\left[\frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 \qquad \therefore\quad \frac{1}{2n} \leqq a_n \leqq \frac{e}{2n}\quad (n \geqq 1)$$

115

(1) 右図より，$k \geqq 2$ のとき

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x}dx$$



(2) (1)より

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ①$$
$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x}dx \quad \cdots\cdots ②$$

①より

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \Longleftrightarrow \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$ より

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ①'$$

②より，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x}dx \Longleftrightarrow 1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < 1+\int_1^n \frac{1}{x}dx$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1+\Big[\log x\Big]_1^n \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n+1 \quad \cdots\cdots ②'$$

①′，②′より，$\displaystyle\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n+1$

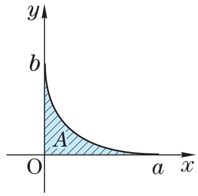
116

(1)　$V=\pi\int_0^a y^2\,dx=b^2\pi\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4 dx$

$=b^2\pi\int_0^a\left(1-\frac{4}{\sqrt{a}}\sqrt{x}+\frac{6}{a}x-\frac{4}{a\sqrt{a}}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{a^2}\right)dx$

$=b^2\pi\left[x-\frac{8}{3\sqrt{a}}x\sqrt{x}+\frac{3}{a}x^2-\frac{8}{5a\sqrt{a}}x^2\sqrt{x}+\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a$

$=b^2\pi\left(a-\frac{8}{3}a+3a-\frac{8}{5}a+\frac{1}{3}a\right)=\boldsymbol{\frac{ab^2}{15}\pi}$



(2)　$V=\frac{\pi}{15}(1-b)b^2\quad(0<b<1)$

$f(b)=(1-b)b^2$ とおくと

$f'(b)=2b-3b^2=-b(3b-2)$

$f'(b)=0$ より

$b=\frac{2}{3}$　$(0<b<1$ より$)$

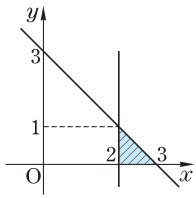
b	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗		↘	

右の増減表より　$b=\frac{2}{3}$,

すなわち，$a=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ のとき

最大．

117



$V=\pi\int_0^1(3-y)^2dy-\pi\cdot2^2\cdot1$

$=\pi\int_0^1(y^2-6y+9)dy-4\pi$

$=\pi\left(\frac{1}{3}-3+9\right)-4\pi=\boldsymbol{\frac{7}{3}\pi}$

118

(1)　接点を $(t,\ \log t)$　$(t>0)$ とおく

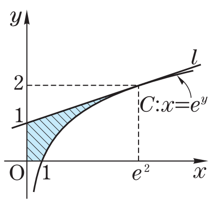
と，$y'=\frac{1}{x}$ より，接線は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

これが $(0,\ 1)$ を通るので，

$1-\log t=-1 \Longleftrightarrow \log t=2$

$\therefore\quad t=e^2$　　よって，　$l:\boldsymbol{y=\frac{1}{e^2}x+1}$



(2)　$y=\log x$ より　$x=e^y$

よって，$\pi\int_0^2 (e^y)^2 dy - \dfrac{\pi}{3}\cdot(e^2)^2\cdot 1 = \dfrac{\pi}{2}\Big[e^{2y}\Big]_0^2 - \dfrac{\pi}{3}e^4 = \boldsymbol{\dfrac{(e^4-3)\pi}{6}}$

119

(1)　$y'=\cos x+1$ より

$$l : y-2\pi=2(x-2\pi) \qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=2x-2\pi}$$

(2)　$f(x)=(\sin x+x)-(2x-2\pi)=\sin x-x+2\pi$

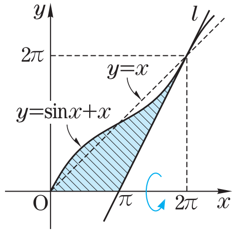
とおくと，$f'(x)=\cos x-1\leqq 0$

となり，$f(x)$ は単調減少．

よって，$f(x)=0$ は高々 1 個しか実数解をもたない．

$f(2\pi)=0$ だから，点 P 以外に共有点をもたない．

(3)　C と l と x 軸で囲まれた部分は右図の斜線部分だから，



$$V=\pi\int_0^{2\pi}(\sin x+x)^2dx-\frac{\pi}{3}(2\pi)^2\pi$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin x+x)^2dx$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 x+2x\sin x+x^2)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+2x\sin x+x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-2x\cos x+2\sin x+\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\pi-4\pi+\frac{8}{3}\pi^3$$

$$=-3\pi+\frac{8}{3}\pi^3$$

$$\therefore\quad V=\pi\left(-3\pi+\frac{8}{3}\pi^3\right)-\frac{4}{3}\pi^4$$

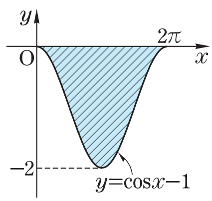
$$=\boldsymbol{\pi^2\left(-3+\frac{4}{3}\pi^2\right)}$$

120

右図のように，

$$y=\cos x-1 \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転すればよい．



$$\therefore\quad V=\pi\int_0^{2\pi}(\cos x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}-2\cos x+1\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-2\cos x\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-2\sin x\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi^2}$$

121

$V=\pi\int_0^{2\pi} y^2\,dx$ において，$y=1-\cos\theta$ と置換すると

$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta\geqq 0$ より

$x:0\to 2\pi$ のとき，$\theta:0\to 2\pi$

また，　$dx=(1-\cos\theta)d\theta$

ゆえに，　$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3 d\theta$ において

$$\begin{aligned}(1-\cos\theta)^3&=1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta\\&=1-3\cos\theta+\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)-\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\\&=\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{4}\cos 3\theta\end{aligned}$$

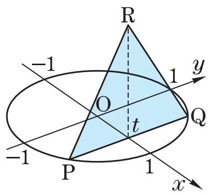
$$\therefore\quad V=\pi\left[\frac{5}{2}\theta-\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{12}\sin 3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=\boldsymbol{5\pi^2}$$

122

(1)　$\mathrm{PQ}=2\sqrt{1-t^2}$ だから，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}^2\cdot\sin 60^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}(1-t^2)}$$



(2)　$V=\int_{-1}^{1} S\,dt=2\sqrt{3}\int_0^1(1-t^2)dt$

$$=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

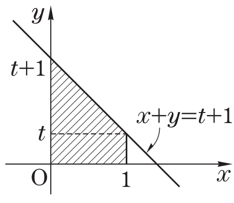
$$=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

123

(1)　平面 $z=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ による断面は，
xy 平面上の連立不等式

$$\begin{cases}0\leqq x\leqq 1,\ y\geqq 0\\ x+y\leqq t+1\end{cases}$$

で表される図形で，これは右図の斜線部分の面積を表すので，



$$S(t)=\frac{1}{2}(t+t+1)\times 1=\boldsymbol{t+\frac{1}{2}}$$

(2)　$V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1\left(t+\dfrac{1}{2}\right)dt=\left[\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t\right]_0^1=\boldsymbol{1}$

124

(1) $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ だから，求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}&\int_0^1\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1|e^x+e^{-x}|dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$

$$\therefore\quad\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{e^{-2t}\{(\sin t+\cos t)^2+(\sin t-\cos t)^2\}}$$
$$=\sqrt{2e^{-2t}}=\sqrt{2}\,e^{-t}$$

$$\therefore\quad l=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}dt=-\sqrt{2}\Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}\,(1-e^{-\frac{\pi}{2}})}$$

125

$\dfrac{T}{2}$ 秒後の体積は $2\cdot\dfrac{T}{2}=T\,(\mathrm{cm}^3)$ であるから，時刻 $\dfrac{T}{2}$ における水面の高さ h は

$T=\dfrac{\pi}{2}h^2$ より　$h=\sqrt{\dfrac{2T}{\pi}}$　$(h>0)$

これを $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{2}{\pi h}$ へ代入すると，

$$\frac{dh}{dt}=\frac{2}{\pi\sqrt{\dfrac{2T}{\pi}}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}}$$